

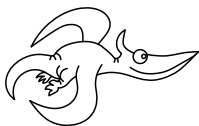
Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

s novým rokem se i korespondenční seminář FYKOS přehoupl do druhé poloviny s jeho čtvrtou sérií. V ní se můžete těšit na úlohy o vybíjení baterie, o rozjíždění kolony na semaforech nebo na problémovou úlohu s fyzikálními principy lodí. Tato série je zároveň první z druhého pololetí, podle kterého budeme vybírat účastníky podzimního soustředění. Dále bychom Vám rádi připomněli dodatečnou soutěž, kdy se nejlepší řešitelé experimentálních úloh mohou dostat na zhruba dvoutýdenní letní stáž na vědecká pracoviště Matfyzu.

Jako tradičně touto dobou, i letos nás čeká největší prezenční akce FYKOSu, kterou je Fyziklání 2023, jež se uskuteční v pátek 10. února na výstavišti Letňany. Pokud ještě nemáte tým, neváhejte si ho sestavit a dojet do Prahy, kde se kromě samotné soutěže můžete zúčastnit i bohatého doprovodného programu, který bude zahrnovat odborné přednášky či exkurze, ale i socializační aktivity jako párty nebo raut. Více informací zjistíte na stránkách soutěže fyziklani.cz.

Organizátoři



Zadání IV. série

Termín uploadu: 21. 2. 2023 23.59

Termín odeslání: 20. 2. 2023

Úloha IV.1 ... vybíjení baterie

3 body

Robert zjistil, že do své nové čelovky musí dát 3 baterie o kapacitě 1000mAh a napětí $U = 1,5$ V. V čelovce jsou baterie zapojeny sériově. Za jak dlouho se baterie vybijí, pokud napájí čelovku o výkonu $P = 5$ W a účinnosti $\eta = 90$ %?

Úloha IV.2 ... zmražený balónek

3 body

Balónek o hmotnosti $m_b = 2,7$ g a objemu $V_0 = 4$ l byl napuštěn heliem o stejné teplotě, jakou má okolní vzduch, tedy $T_0 = 20$ °C. Uvnitř balónku je tlak o $\Delta p = 2$ kPa vyšší než v okolí. Na jakou teplotu musíme balónek a plyn v něm zchladit, aby se přestal vznášet? Předpokládejte, že po zchlazení bude v balónku atmosférický tlak.

Úloha IV.3 ... uzavírka na silnici

6 bodů

Všichni to známe – uzavírky na silnicích a nekonečné stání na semaforech. Zelená svítí po dobu 60 s, ale než se stačí všichni rozjet, už je zase červená. Uvažujme 0,5 s reakční dobu řidiče, než se rozjede poté, co se dalo do pohybu auto před ním. O kolik procent by se zvýšil počet aut, která projedou uzavírkou, kdyby se všichni ve frontě rozjeli současně? První auto stojí na úrovni semaforu, vzdálenost předních nárazníků všech aut odhadněme na 5 m a všechna se rozjíždí rovnoměrně zrychleně po dobu 5 s na rychlost $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, kterou pak pokračují dále do uzavírky.

Úloha IV.4 ... vystřelený dalekohled

7 bodů

Máme hvězdářský (Keplerův) dalekohled, který chceme vyslat do vesmíru. Nejdřív si ho však vyzkoušíme na Zemi, kde naměříme zvětšení Z . Jak se musí změnit vzájemná vzdálenost čoček, aby měl stejný zvětšení i ve vesmíru? Čočky mají index lomu n .

Úloha IV.5 ... vesmírná návštěva

9 bodů

Dva mimozemšťané bydlí každý na své kosmické stanici. Stanice se nacházejí ve volném prostoru a vzdálenost mezi nimi je L . Když chce jeden mimozemšťan navštívit druhého, musí nasednout do své nerelativistické rakety a doletět k sousedovi. Jaký nejkratší čas může mimozemšťan strávit na cestě tam i zpět? Hmotnost rakety s palivem je m , bez paliva m_0 . Výtoková rychlost spalin je u , tok paliva je libovolný. Jeho soused mu žádné palivo načerpát nedovolí (sám má málo).

Úloha IV.P ... lodička si pluje

10 bodů

Diskutujte, jaké fyzikální jevy ovlivňují rychlost plavby lodi a ponorky. Jaké odporové síly na ně působí? Jakou nejvyšší rychlostí loď nebo ponorka může plout?

Úloha IV.E ... hodím si to

12 bodů

Mějme přes tyč omotané lano se závažím o hmotnosti m na jednom svém konci. Změřte závislost hmotnosti zátěže M na druhém konci potřebné k uvedení lana do pohybu na počtu obtočení lana kolem tyče.

Úloha IV.S ... kvanta molekul

10 bodů

1. Na začátku seriálu jsme zmínili několik aproximací, které jsme udělali – jednak zafixování jader a jednak zanedbání relativistických efektů. Pro které prvky čekáte, že se budou elektrony nejvíce vzájemně ovlivňovat s pohybem jader a proč? A ve které části periodické tabulky si myslíte, že se nejvíce projeví relativistické efekty? Z jakého důvodu? (2 b)
2. Celková energie molekuly vody, jak ji dostaneme z kvantově chemického výpočtu, je cca -75 Ha. Energie uvolněná slučováním vodíku a kyslíku na vodu je $242 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$. Pokud spočítáme energii reaktantů i produktů s chybou 1 %, jaká bude chyba v určení reakční energie? Také zkuste najít nějakou analogii s měřením v reálném světě. (Například: „Zvážíme se s pětikorunou a bez ní, abych určil její hmotnost.“) (3 b)
3. Nainstalujte si program Psi4 a pokuste se spočítat, o kolik se liší energie lodičkové a (zkřížené) vaničkové konformace cyklohexanu. Můžete použít přiložené vstupní soubory s již optimalizovanou geometrií. Jak moc se liší výsledek od experimentální hodnoty $21 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$? (2 b)

Poznámka: Pokud narazíte na problémy s programem Psi4, neváhejte se ozvat na emailovou adresu mikulas@fykos.cz

4. Zkuste spočítat energii reakce pro chloraci benzenu $\text{C}_6\text{H}_6 + \text{Cl}_2 \Rightarrow \text{C}_6\text{H}_5\text{Cl} + \text{HCl}$. Srovnajte s experimentální hodnotou $-134 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$. Můžete využít geometrii molekuly benzenu. (3 b)

Bonus: Vyberte svoji oblíbenou (nebo jakoukoliv jinou) chemickou reakci a spočítejte její energii. (až +3 b)



Řešení III. série

Úloha III.1 ... kreativní řešení problémů 3 body; průměr 2,98; řešilo 123 studentů

Danka připojila zahradní hadici s vnitřním průměrem 1,5 cm na vodovodní kohoutek na koleji a druhý konec položila na okraj okna na 8. poschodí ve výšce 23 m nad zemí. Jaký objemový průtok vody by musel kohoutek mít, aby se Danka podařilo postříkat proudem vody lidi stojící pod kolejí ve vodorovné vzdálenosti 9 m od budovy, kteří ruší noční klid? Může se to Danka podařit, pokud voda stříká vodorovně a nefouká vítr?

Bonus Kde nejdále mohou stát tito lidé, aby na ně Danka hadicí dostříkla, pokud je objemový průtok kohoutku $0,41 \cdot \text{s}^{-1}$? Danka teď může konec hadice natočit tak, aby voda stříkala pod libovolným úhlem vůči vodorovné rovině. Danka opravdu vadí hluk v noci pod okny.

Keď si situáciu predstavíme, uvedomíme si, že ide vlastne o vodorovný vrh vody, ktorá vytryskuje z hadice nejakou rýchlosťou v . Rýchlosť vieme určiť z objemového prietoku Q ako

$$v = \frac{Q}{S},$$

kde $S = \pi d^2/4$ je plocha prierezu hadice. Potom si môžeme napísať rovnice pre súradnice hmotného bodu pohybujúceho sa vodorovným vrhom

$$\begin{aligned} x &= vt, \\ y &= h - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

Tu označujeme x a y postupne vodorovnú a zvislú súradnicu. Počiatok súradnicovej sústavy položíme do bodu na zemi priamo pod oknom. Premenná t označuje čas, ktorý plynie od okamihu vytrysknutia vody z konca hadice, $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ je tiažové zrýchlenie. Voda je vystrekovaná z počiatkovej výšky $h = 23 \text{ m}$. Ľudia, ktorých chce Danka trafiť, sú na zemi, čiže ich y -ová súradnica je $y = 0 \text{ m}$. Od internátu¹ sú vzdialení $l = 9 \text{ m}$, to je teda aj ich x -ová súradnica. Máme teda dve rovnice s dvoma neznámymi, ktorými sú čas letu vody t a rýchlosť v

$$\begin{aligned} l &= vt, \\ 0 &= h - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

Vyjadříme preto z druhej rovnice čas

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

a to dosadíme do prvej z rovníc. Dostávame

$$l = v\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

¹česky kolej

Rychlost vyjádříme cez objemový tok a máme

$$l = \frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4}} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Úpravami vyjádříme Q z rovnice a dosadíme hodnoty známých veličin

$$Q = \frac{l\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{g}{2h}} \approx 0,731 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Danke sa teda nepodarí týmto spôsobom dostreknúť z okna na nepříjemných susedov, pretože z bežného vodovodného kohútika v domácnosti alebo v internáte nedostaneme takto veľký objemový prietok.

Bonus

Když chceme spočítat maximální dostřel z nenulové výšky, je postup pomocí derivací velmi komplikovaný. Proto použijeme koncept takzvané *ochranné paraboly*, což je množina bodů, za kterou se danou rychlostí vystříknutý proud vody nedostane pod žádným počátečním úhlem. Nyní si ukážeme její odvození pro konstantní počáteční rychlost proudu vody $v = 4Q/(\pi d^2)$. Nejprve si napíšeme závislost obou souřadnic myšleného hmotného bodu na čase pro vrh rychlostí v pod úhlem φ jako

$$\begin{aligned}x &= v \cos \varphi t, \\y &= h + v \sin \varphi t - \frac{1}{2}gt^2.\end{aligned}$$

Z těchto rovnic nyní zkusíme vyjádřit, pod jakým úhlem φ musíme hmotný bod vystřelit, aby proletěl pevně daným bodem se souřadnicemi $[x, y]$. Z první rovnice tedy nejprve vyjádříme čas, který dosadíme do druhé

$$\begin{aligned}t &= \frac{x}{v \cos \varphi}, \\y &= h + v \sin \varphi \frac{x}{v \cos \varphi} - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v^2 \cos^2 \varphi}.\end{aligned}$$

Nyní rovnici upravíme, aby v ní vystupoval pouze tangens úhlu φ , který budeme chtít pro pevné x a y vyjádřit

$$\begin{aligned}y &= h + x \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi), \\ \frac{gx^2}{2v^2} \operatorname{tg}^2 \varphi - x \operatorname{tg} \varphi + y + \frac{gx^2}{2v^2} - h &= 0.\end{aligned}$$

Vidíme, že pro tangens počátečního úhlu máme kvadratickou rovnici. To znamená, že v závislosti na souřadnicích bodu x a y dostáváme buď dvě řešení (můžeme bodem proletět buď cestou nahoru nebo cestou dolů), žádné řešení (rychlost je moc malá a bod nezasáhneme), nebo

jedno řešení, což je množina bodů oddělující tyto dvě oblasti. Pro tuto množinu bodů bude diskriminant kvadratické rovnice rovný nule, můžeme ji tedy tímto způsobem snadno popsat

$$\begin{aligned}x^2 - 4 \frac{gx^2}{2v^2} \left(y + \frac{gx^2}{2v^2} - h \right) &= 0, \\ \frac{v^2}{2g} - y - \frac{gx^2}{2v^2} + h &= 0, \\ y &= \frac{v^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v^2} + h.\end{aligned}$$

Pro množinu bodů ohraničujících prostor, kam můžeme danou rychlostí dostřelit a kam ne, tedy dostáváme tento předpis. Ten, jak si můžete všimnout, je rovnicí paraboly. Říkáme mu ochranná parabola, protože žádný bod mimo něj nemůžeme zasáhnout. K určení maximálního dostřelu stačí spočítat průsečík této paraboly se zemí, tedy bod, kde $y = 0$:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{v^2}{2g} - \frac{gx_{\max}^2}{2v^2} + h, \\ \frac{gx_{\max}^2}{2v^2} &= h + \frac{v^2}{2g}, \\ x_{\max}^2 &= \frac{2v^2 h}{g} + \frac{v^4}{g^2}, \\ x_{\max} &= \frac{v}{g} \sqrt{2hg + v^2}.\end{aligned}$$

Po dosažení za počáteční rychlost tak dostáváme maximální vzdálenost, ve které Danka trefí hlučné lidi, jako

$$x_{\max} = \frac{4Q}{\pi d^2 g} \sqrt{2hg + \left(\frac{4Q}{\pi d^2} \right)^2} \doteq 4,9 \text{ m}.$$

Pokud tedy stojí hluční lidé dále než 5 m od koleje, jsou před rozzuřenou Dankou v bezpečí.

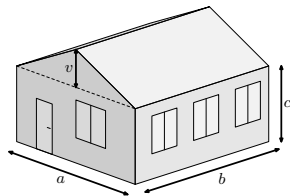
Daniela Dupkalová
daniela@fykos.cz

Kateřina Rosická
kacka@fykos.cz

Úloha III.2 ... topení na chalupě

3 body; průměr 2,68; řešilo 130 studentů

Danka přišla uprostřed zimy na svou chalupu, kde bylo uvnitř jen $T_1 = 12^\circ\text{C}$. Zapálila proto v krbu oheň, kde topila dřevem s výhřevností $H = 14,23 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$. Kolik ho musí spálit, aby ohřála vzduch vevnitř na $T_2 = 20^\circ\text{C}$? Chalupa má tvar kvádr s rozměry $a = 6 \text{ m}$, $b = 8 \text{ m}$ a $c = 3 \text{ m}$, kde c je výška stěn, a střechou ve tvaru nepravidelného ležatého trojbokého hranolu s výškou $v = 1,5 \text{ m}$, jehož horní hrana je osou půdorysu chalupy. Vzduch zabírá 87% objemu chalupy, jeho hustota je $\rho_v = 1,29 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a měrná tepelná kapacita je $c_v = 1007 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Odpovídá výsledek očekávání? Diskutujte nad použitým jednoduchým modelem.



Dance bývá na chalupě zima.

Aby Danka ohriala vzduch v chalupe, musí získať energiu spálením dreva. Ak spáli drevo s hmotnosťou M , uvoľní sa tým z neho teplo

$$Q = MH.$$

Ak sa všetko toto teplo odovzdá vzduchu, bude platiť

$$Q = mc_v(T_2 - T_1),$$

kde m je hmotnosť vzduchu v chalupe. Tú jednoducho vypočítame ako súčin objemu a hustoty vzduchu. Celkový objem chalupy V_0 je súčet objemu kvádra vymedzeného stenami chalupy a trojbokého ihlanu tvoriaceho strechu chalupy. Objem ihlanu sa rovná $avb/2$. Následne objem chalupy je

$$V_0 = abc + \frac{1}{2}avb = ab \left(c + \frac{1}{2}v \right).$$

Keďže vieme, že vzduch zaberá len $\eta = 0,87$ z objemu celej chalupy, môžeme napísať

$$Q = \eta ab \left(c + \frac{1}{2}v \right) \rho_v c_v (T_2 - T_1).$$

Nakoniec dosadíme do tejto rovnice vzťah zo začiatku riešenia, vyjadríme potrebnú hmotnosť dreva a dostaneme

$$M = \frac{\eta \rho_v c_v}{H} ab \left(c + \frac{1}{2}v \right) (T_2 - T_1).$$

Po dosadení zadaných hodnôt dostaneme, že Danke stačí spáliť $M \approx 0,11$ kg dreva.

Keď sa zamyslíme, uvedomíme si, že v reálnom živote to takto nefunguje. Určite nestačí spáliť iba sto gramov dreva na to, aby sme zohriali vzduch v chalupe o niekoľko stupňov. Z vlastných skúseností by sme to skôr odhadli na niekoľko kilogramov. Náš jednoduchý model je teda nesprávny. Predpokladá totižto, že všetko teplo získané spálením dreva, sa bez strát využije na ohrev vzduchu a iba vzduchu.

V skutočnosti hrá pri ohrievaní chalupy rolu niekoľko ďalších faktorov. Najdôležitejším z nich je, že účinnosť odovzdaného tepla zďaleka nie je stopercentná. Veľké množstvo teplého vzduchu uniká hore komínom preč z chalupy. Steny komína sa zohrievajú, pričom budú odovzdávať teplo obklopujúcemu vzduchu v chalupe. Musíme taktiež myslieť na to, že merná tepelná kapacita steny z betónu je rádo podobná mernej tepelnej kapacite vzduchu ², ale stena má o niekoľko rádo vyššiu hustotu. Preto celkové teplo potrebné na ohriatie steny je oveľa väčšie ako pre ohriatie vzduchu. Podobne je to aj s predmetmi vnútri chalupy. Ak je chalupa vybavená nejakým nábytkom z dreva, plastu či látky, ten pohltí omnoho viac tepla ako samotný vzduch. V zadaní síce hovoríme iba o ohriatí vzduchu, ale v skutočnosti nemôžeme zanedbať tepelnú výmenu medzi vzduchom v chalupe a predmetmi v nej. Pokiaľ sú predmety chladnejšie ako vzduch, teplo prúdi zo vzduchu do týchto predmetov, čím sa späťne ochladzuje. Aby sme dosiahli stabilnú teplotu vzduchu v miestnosti, musia aj všetky predmety v miestnosti nadobudnúť túto teplotu. Ďalší jav, ktorý sme v riešení nevzali do úvahy, je tepelná izolácia samotnej chalupy. Predpokladali sme, že chalupa je tepelne izolovaná. Avšak u reálnej chalupy dochádza k významnej tepelnej výmene s okolím, pričom jej miera závisí na materiálu chalupy, kvalite izolácie stien a na tom, ako dobre sú utesnené okná a dvere.

Ak by sme zohľadnili všetky tieto faktory, bolo by možné spočítať skutočnú hmotnosť spáleného dreva potrebnú na zohriatie vzduchu v chalupe. Potom by podiel hodnoty získanej

²https://www.designingbuildings.co.uk/wiki/Specific_heat_capacity

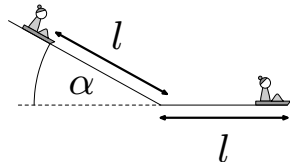
jednoduchým výpočtem vyššie a skutečnej hodnoty, popisoval niečo, ako účinnosť odovzdanej energie z dreva vzduchu. Ako vidíme podľa nereálne malej hmotnosti získanej výpočtom, táto účinnosť je veľmi nízka.

Daniela Dupkalová
daniela@fykos.cz

Úloha III.3 ... bobování

5 bodů; průměr 3,44; řešilo 89 studentů

Matěj s Davidem se kloužou na bobech z kopce se sklonem $\alpha = 29^\circ$, který v jeho patě přechází ve vodorovnou zem. Oba vyrazili z klidu ze stejné výšky. Matějovy boby ujedou vždy stejnou vzdálenost l po nakloněné rovině i ve vodorovné části. Protože se při vyšší zátěži boby proboří hlouběji do sněhu, uvažujte, že třecí koeficient je úměrný normálové síle jako $f(F) = kF$, kde k je kladná konstanta. Určete, kolikrát dále dojde Matěj od paty kopce než David, je-li Davidova hmotnost (i s boby) o 12% vyšší než Matějova. V patě kopce bobaři neztrácí žádnou energii. *Matěj se rád baví o bobech.*



Úlohu vyřešíme pomocí zákona zachování energie. Když jsou bobaři na vrcholu kopce o výšce h , mají potenciální energii E_p , která se v průběhu přeměny na energii kinetickou E_k a na práci konanou třením W_t . Po dosažení roviny se kinetická energie E_k přemění na práci třením W'_t . Pro práci vykonanou třením platí

$$W_t = F_t d = f F_N d = k F_N^2 d,$$

kde d je uražená dráha a F_N normálová síla, pro kterou v tomto případě platí $F_N = mg \cos \alpha$.

Rozeberme nejdříve pohyb Matěje, u kterého víme, že urazí stejnou dráhu na kopci i po rovině. Označme ji l . Z geometrie kopce je jasné, že jeho výška bude $h = l \sin \alpha$. Napíšeme dvě zmiňované rovnice

$$\begin{aligned} E_{pM} &= W_{tM} + E_{kM}, \\ E_{kM} &= W'_{tM}. \end{aligned}$$

které mají po dosažení tvar

$$\begin{aligned} mgl \sin \alpha &= k(mg \cos \alpha)^2 l + E_{kM}, \\ E_{kM} &= k(mg)^2 l. \end{aligned}$$

Dále dosadíme z druhé rovnice do první

$$mgl \sin \alpha = k(mg \cos \alpha)^2 l + k(mg)^2 l,$$

odkud po úpravě vyjádříme koeficient k jako

$$k = \frac{1}{mg} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}.$$

Obdobně postupujme u Davida, kde známe hmotnost $m_D = 1,12m$, a označme dráhu, kterou urazí na rovince, jako l_D . Dostáváme

$$1,12mgl \sin \alpha = k(1,12mg \cos \alpha)^2 l + E_{kD},$$

$$E_{kD} = k(1,12mg)^2 l_D.$$

Znovu vyjádříme za kinetickou energii, k tomu i za koeficient k

$$1,12mgl \sin \alpha = \frac{1}{mg} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} (1,12mg \cos \alpha)^2 l + \frac{1}{mg} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} (1,12mg)^2 l_D.$$

a finálně najdeme poměr l/l_D jako

$$\frac{l}{l_D} = \frac{1,12}{1 - 0,12 \cos^2 \alpha}.$$

Stačí dosadit za úhel $\alpha = 29^\circ$ a máme výsledek

$$\frac{l}{l_D} \doteq 1,23.$$

Patrik Kašpárek

patrik.kasperek@fykos.cz

Úloha III.4 ... útěk na Tau Ceti

7 bodů; průměr 3,17; řešilo 84 studentů

Protože naše Slunce jednou exploduje, bude potřeba zorganizovat stavbu evakuační lodi, v níž alespoň 0,000 001 % lidstva získá možnost uniknout. Pro únik si vyberou hvězdu Tau Ceti vzdálenou 12 ly. Podaří se jim sestrojít motory, které za velmi krátký čas zrychlí loď na cestovní rychlost $v = 0,75c$. Bohužel, právě v polovině vzdálenosti k cíli zpozorují jak explozi Slunce, tak explozi Tau Ceti. Jak dlouho před touto strašlivou scénou exploze nastaly v soustavě spojené s lodí? A kdy v soustavě, ve které jsou Slunce i Tau Ceti nehybné? Předpokládejte, že se vzdálenost mezi oběma hvězdami nemění.

Karel chtěl uniknout včas. Ale nepovedlo se.

V súradnicovej sústave spojenjej s hviezdami loď dorazí do polovice cesty v čase $t_1 = d/2v = 8$ rokov po opustení Zeme. V tomto čase na lodi spozorovali výbuch oboch hviezd, ktorého svetlo k lodi z oboch strán cestovalo $t_0 = d/2c = 6$ rokov. V sústave spojenjej s hviezdami teda oba výbuchy nastali $t_0 = 6$ rokov pred tým, ako boli loďou pozorované.

V sústave spojenjej s loďou je situácia komplikovanejšia kvôli vplyvu relativistických efektov. V tejto sústave je loď statická, Slnko sa od nej vzdaluje rýchlosťou v a Tau Ceti sa približuje rýchlosťou v . Uvažujme, že vzdialenosť hviezd v sústave spojenjej s loďou je D . Od momentu, keď Slnko vybuchlo, prešlo Slnko vzdialenosť vt_1 a svetlo urazilo ct_1 do okamihu, keď bol výbuch loďou pozorovaný. Čas t_1 označuje čas plynutí na lodi. Vzhľadom na to, že v okamihu pozorovania sa loď nachádza v polovici cesty medzi hviezdami,

$$\frac{D}{2} = ct_1 + vt_1 = ct_2 - vt_2,$$

$$t_1 = \frac{D}{2(c+v)}, \quad t_2 = \frac{D}{2(c-v)},$$

kde sme uvážili podobne pre druhú hviezdu čas t_2 a fakt, že svetlo aj hviezda majú zhodný smer pohybu. Vidíme teda, že pozorovateľ na lodi určí časy výbuchov hviezd ako nie súčasne. Navyše ani vzdialenosť hviezd pozorovaná v sústave lode nie je rovnaká ako v sústave hviezd. Tieto vzdialenosti sú previazané vzťahom pre tzv. kontrakciu dĺžky

$$D = d\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Celkovo máme pre časy výbuchov Slnka a Tau Ceti pred ich pozorovaním v sústave lode

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{d}{2(c+v)}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \\ &= \frac{d}{2c}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = \\ &= t_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \doteq 2,2 \text{ roka}, \\ t_2 &= t_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = 15,9 \text{ roka}. \end{aligned}$$

K tomuto záveru by sa dalo prísť aj vhodným využitím vzorčeka pre Dopplerov posun, ak by sme sa pozreli na periodický signál s periódou t_0 .

Na záver dodajme, že hviezdy sa voči sebe pohybujú rýchlosťami okolo desiatok kilometrov za hodinu, teda predpoklad vzájomnej nehybnosti je oprávnený. Trochu menej realistické je však to, že na konci svojho života bude Slnko (aj Tau Ceti) prechádzať fázou Asymptotickej vetvy obrov, ktorú sprevádzajú výrazné termálne pulzy odhadzujúce veľké množstvo hmoty trvajúce niekoľko stotisíc rokov. Táto hmota následne vytvorí okolo Slnka planetárnu hmlovinu a odhalí jadro, ktoré sa stane bielym trpaslíkom. Na výbuch supernovy je Slnko príliš málo hmotné. Pre život v Slnčnej sústave je teda výrazne nebezpečnejšie postupné zvyšovanie žiarivého výkonu Slnka, ktoré znemožní život na Zemi ako ho poznáme už o asi miliardu rokov.

Komentár k došlým riešeniam

Najčastejšou chybou pri riešení úlohy bola nesprávna transformácia medzi sústavami. Väčšina riešiteľov použila na transformáciu len vzťah pre dilatáciu času alebo kontrakciu dĺžky. Tieto vzťahy je možné použiť len v špeciálnych prípadoch. Plná Lorentzova transformácia medzi súradnicami (t, x) a (t', x') dvoch sústav pohybujúcich sa voči sebe rovnomerne priamočiario rýchlosťou v má tvar

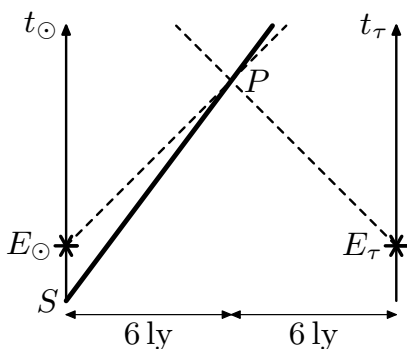
$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \quad x' = \gamma(x - vt).$$

Dôležité sú nasledujúce pozorovania:

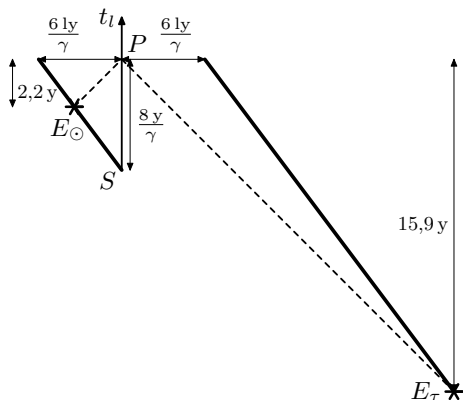
- pre malé rýchlosti $v \ll c$ je $t' = t$ a $x' = x - vt$, čo je štandardná Galileovská transformácia;
- ak máme dve udalosti, ktoré v jednej zo sústav nastali súčasne $\Delta t = 0$, pre ich časový rozostup v druhej sústave máme $\Delta t' = -\gamma v \Delta x / c^2$. Ak sa neodohrali na tom istom mieste v prvej sústave, v druhej sústave sa neodohrajú naraz;

- ak pozorujeme hodinky **nepohybujúce sa** v nečiarkovanej sústave ($\Delta x = 0$) z čiarkovanej sústavy, zdá sa nám, že tikajú s intervalom $\Delta t' = \gamma t$ – dilatácia času;
- ak máme tyč dĺžky $\Delta x = l$ meranej v nečiarkovanej sústave orientovanú v smere x-ovej osi, v čiarkovanej sústave by pozorovateľ pri meraní oboch koncov **v tom istom časovom okamihu** $\Delta t' = 0$ zmeral dĺžku $\Delta x' = \gamma(l - v\Delta t) = \gamma(l - v^2l/c^2) = l/\gamma$, kde sme dosadili z prvej rovnice za $\Delta t = v\Delta x/c^2$. Dostávame tak známy vzťah pre kontrakciu dĺžky.

V našom prípade však výbuch hviezd a ich pozorovanie neboli súčasné ani súmestné javy v ani jednej zo sústav hviezd a lode. Musíme tak použiť plnú Lorentzovu transformáciu. Celá situácia sa dá graficky znázorniť na časopriestorových diagramoch na obrázkoch 1 a 2. V týchto vynášame časovú osu zvislo a priestorovú osu vodorovne, pričom pri vhodnej voľbe jednotiek (ako napríklad roky a svetelné roky) sa svetlo pohybuje vždy pod uhlom 45° . Svetočiaru lode, resp. hviezd je vyznačená tučne, svetelné lúče explózií sú vyznačené prerušovane, loď odštartovala v udalosti S, hviezdy vybuchli v udalostiach E a tieto výbuchy boli lodou pozorované v udalosti P. Vidíme, že pre pozorovateľov v sústave hviezd, resp. lode, sa situácia javí značne odlišne.



Obr. 1: Časopriestorový diagram v sústave hviezd.



Obr. 2: Časopriestorový diagram v sústave lode.

Jozef Lipták

liptak.j@fykos.cz

Úloha III.5 ... kytarová

10 bodů; průměr 6,32; řešilo 66 studentů

Mějme kytaru naladěnou při pokojové teplotě. O kolik púltónů (při temperovaném ladění) se přeladí jednotlivé struny, pokud se přesuneme k táboráku, kde bude o 10°C chladněji? Bude kytara stále znít naladěně? Vzdálenost mezi body upevnění strun je $d = 65\text{ cm}$. Struny mají hustotu $\rho = 8900\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, Youngův modul pružnosti $E = 210\text{ GPa}$ a teplotní roztažnost $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$.

Honzovi se opět rozladila kytara.

Frekvence struny

Frekvenci struny vypočteme ze vzorce

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}{2d},$$

kde μ je délková hustota struny. Nyní si rozmyslíme, odkud se bere síla, která strunu napíná. Klidová délka napnutého úseku struny L_0 je menší než d . Je tedy třeba strunu napnout silou o velikosti F , aby se natáhla na délku d . Pokud ovšem přejdeme do chladnějšího prostředí, struna bude mít tendenci se zkrátit, ale bude stále pevně uchycena. Bude tedy napínána silněji. Hookův zákon říká

$$\begin{aligned}\sigma &= E\varepsilon, \\ \frac{F}{S} &= E\varepsilon, \\ \varepsilon &= \frac{F}{SE},\end{aligned}$$

kde σ je mechanické napětí, ε je relativní protažení struny a S je plocha příčného řezu struny. Celková délka natažené struny bude vždy d a souvisí s L_0 následovně

$$d = L_0 + \varepsilon L_0 = L_0(1 + \varepsilon).$$

Z předchozí diskuse vyplývá, že po zahrnutí teplotní roztažnosti struny bude vztah pro její délku vypadat

$$d = L_0(1 + \alpha T)(1 + \varepsilon) = L_0(1 + \alpha T)\left(1 + \frac{F}{SE}\right).$$

Z této rovnice vyjádříme sílu F a dosadíme ji do první rovnosti

$$F = SE\left(\frac{d}{L_0(1 + \alpha T)} - 1\right).$$

Nyní vyjádříme frekvenci jako

$$f = \frac{\sqrt{\frac{SE\left(\frac{d}{L_0(1 + \alpha T)} - 1\right)}{\mu}}}{2d}.$$

Výraz S/μ upravíme

$$\frac{S}{\mu} = \frac{S}{\frac{m}{d}} = \frac{1}{\frac{m}{dS}} = \frac{1}{\rho}$$

a dosadíme do vzorce pro frekvenci

$$f = \frac{\sqrt{\frac{E\left(\frac{d}{L_0(1 + \alpha T)} - 1\right)}{\rho}}}{2d}.$$

Pokud položíme teplotní rozdíl $T = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$, dostaneme frekvenci f_0 , kterou měla struna uvnitř:

$$f_0 = \frac{\sqrt{\frac{E\left(\frac{d}{L_0} - 1\right)}{\rho}}}{2d},$$

$$L_0 = \left(\frac{d}{\frac{4d^2 f_0^2 \rho}{E} + 1} \right).$$

Z rovnice pro f_0 jsme získali vztah pro neznámou L_0 . Ten dosadíme do vzorce pro f a výsledný výraz upravíme. Z důvodů vysvětlených níže vyjádříme poměr frekvencí f/f_0 :

$$f = \sqrt{\frac{f_0^2 - \frac{E\alpha T}{4d^2\rho}}{1 + \alpha T}},$$

$$\frac{f}{f_0} = \sqrt{\frac{1 - \frac{E\alpha T}{4d^2\rho f_0^2}}{1 + \alpha T}}.$$

Hudební teorie

V teorii hudby platí, že tón o oktávu vyšší má dvojnásobnou frekvenci původního tónu. Dále platí, že poměr frekvencí dvou not, které jsou od sebe vzdálené o půltón, je vždy konstantní (označme konstantu K). Jelikož je oktáva tvořena dvanácti půltóny, platí

$$f_{\text{vyšší}} = 2f_0,$$

$$f_{\text{vyšší}} = K^{12}f_0,$$

$$K^{12} = 2,$$

$$K = 2^{\frac{1}{12}}.$$

O kolik půltónů se struna přeladí, spočteme následovně

$$\frac{f}{f_0} = \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^n,$$

$$\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^n = \sqrt{\frac{1 - \frac{E\alpha T}{4d^2\rho f_0^2}}{1 + \alpha T}},$$

$$n = 6 \log_2 \left(\frac{1 - \frac{E\alpha T}{4d^2\rho f_0^2}}{1 + \alpha T} \right),$$

kde n je počet půltónů, o který se struna původně naladěná na frekvenci f_0 přeladí. Vypočtené hodnoty lze elegantně shrnout do tabulky 1.

Lze vidět, že struny naladěné na vyšší frekvence se vlivem změny teploty moc nerozladí, zatímco struny na nižších frekvencích se mohou při běžných teplotních rozdílech přeladit i o celý tón. Jelikož je tato změna nerovnoměrná, tj. všechny struny se nepřeladí o stejnou hodnotu například jednoho tónu, nástroj se nám rozladí.

Tab. 1: Změna frekvence strun

struna	$\frac{f_0}{\text{Hz}}$	$\frac{f}{\text{Hz}}$	n
E	330	334	0,19
H	247	252	0,33
G	196	202	0,52
D	146	154	0,92
A	110	120	1,55
e	82	95	2,62

Ještě bychom měli zmínit, že jsme během výpočtu zanedbali to, že se plocha průřezu vlivem roztahování zmenší. Pokud bychom chtěli započítat i tento jev, museli bychom použít další materiálovou konstantu zvanou Poissonovo číslo (anglicky Poisson's ratio), které vystihuje, jak se materiál smrští ve směru kolmém na směr tahu. Jestliže bychom započítali i tento jev, vypočtené hodnoty by se lišily až na čtvrté nebo páté platné cifře. Můžeme jej tedy s chladnou hlavou zanedbat.

Jan Benda
honzab@fykos.cz

Úloha III.P ... absurdní kyvadlo

9 bodů; průměr 5,88; řešilo 67 studentů

Jaké jevy mohou ovlivnit měření tíhového zrychlení pomocí kyvadla? Odhadněte, kolik platných cifer by musel obsahovat váš výsledek, abyste je naměřili. Uvažujte i jevy, které běžně zanedbáváte.

Kačka přemýšlela, co všechno může napsat do diskuze.

Skutečné změny tíhového zrychlení

První skupinou jevů, kterou se budeme zabývat, jsou skutečné změny tíhového zrychlení, tedy vlivy, které bychom zaznamenali i sebedokonalejším přístrojem. Prvním rozdílem od tabelované hodnoty $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ jsou lokální rozdíly dle místa měření.

Změny dle zeměpisné šířky Protože Země není přesná koule, ale je to takzvaný *geoid*, tedy nepravidelný útvar, který budeme v prvním přiblížení považovat za elipsoid s rovníkovým poloměrem $R_r = 6\,378 \text{ km}$ a polárním poloměrem $R_p = 6\,357 \text{ km}$ ³, budou se i tíhová zrychlení lišit v rozdílu gravitačního zrychlení, protože dle zeměpisné šířky jsme jinak daleko od centra Země. Pokud budeme uvažovat veškerou hmotnost soustředěnou v centru Země, můžeme spočítat v obou případech gravitační zrychlení. Hmotnost Země je $M_Z = 5,9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, tedy gravitační zrychlení na pólu bude

$$g_{\text{pól}} = G \frac{M_Z}{R_p^2} = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \frac{5,9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6\,357 \text{ km})^2} \doteq 9,865 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

³https://is.muni.cz/el/1441/podzim2007/ZS1BP_IVZ1/um/02.Tvar_a_velikost_Zeme.pdf

a na rovníku bude

$$g_{\text{rov}} = G \frac{M_Z}{R_p^2} = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \frac{5,9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6378 \text{ km})^2} \doteq 9,801 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Jelikož tíhová síla je výslednicí gravitační a odstředivé síly otáčení Země, bude mít tíhové zrychlení různou hodnotu na různých zeměpisných šířkách. Na pólu nepůsobí žádné odstředivé zrychlení, zatímco na rovníku o rovníkovém poloměru $R = 6378 \text{ km}$ je odstředivé zrychlení velikosti

$$a_{\text{ods}} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{(1 \text{ den})^2} \cdot 6378 \text{ km} \doteq 0,03 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Zeměpisná šířka má tedy na tíhové zrychlení vliv v řádu setin $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, musíme tedy měřit alespoň na tři platné cifry, abychom tento vliv naměřili.

Změny dle nadmořské výšky Změny dle nadmořské výšky budeme počítat stejně jako jsme počítali změnu dle zeměpisné šířky, tedy s modelem hmoty soustředěné v centru a pro dva body na rovníku, a to hladinu moře s poloměrem $R_r = 6378 \text{ km}$ a vrchol Cayambe, který je téměř na rovníku a má nadmořskou výšku $5\,790 \text{ m. n. m.}$ ⁴ tedy jeho poloměr je $R_{\text{Cay}} = 6\,383,79 \text{ km}$. Tíhové zrychlení na hladině moře z předchozího příkladu máme a je $g_0 = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} - 0,03 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 9,77 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, tíhové zrychlení na Cayambe je

$$\begin{aligned} g_{\text{Cay}} &= G \frac{M_Z}{R_{\text{Cay}}^2} - \omega^2 R_{\text{Cay}} = \\ &= 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \frac{5,9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6\,383,79 \text{ km}^2} - \frac{4\pi^2}{1 \text{ den}^2} \cdot 6\,383,79 \text{ km} \doteq \\ &\doteq 9,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} - 0,03 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = \\ &= 9,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \end{aligned}$$

rozdíl je tedy opět na druhém desetinném místě. Pro menší výškové rozdíly v řádu stovek metrů bude rozdíl na třetím desetinném místě.

Vliv podloží Kromě zeměpisné šířky a nadmořské výšky má vliv i podloží a reliéf okolí. Dle geologického učebního materiálu⁵ budou změny tíhového pole způsobené hlubinnými změnami, jako například podzemním ložiskem ropy řádu $10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, pro jejich určení tedy musíme měřit s přesností na 7 platných cifer.

Kosmické okolí Nyní jsme již zanedbali všechny vlivy pocházející ze Země a lokace bodu na ní. Podíváme se tedy dále, a to do kosmu. Objekty zde jsou sice velmi daleko, ale jsou také velmi hmotné a některé z nich mají nezanedbatelný vliv na těleso Země. Změny tíhového zrychlení způsobené těmito tělesy spočítáme jako rozdíl jejich gravitační síly na bod ve středu Země pro různé vzdálenosti daných těles. Spočítáme tedy rozdíl gravitačního zrychlení od tohoto tělesa v obou těchto polohách, kde gravitační zrychlení spočítáme dle vzorce

$$g = G \frac{M}{r^2},$$

⁴<https://cs.wikipedia.org/wiki/Cayambe>

⁵https://is.muni.cz/el/1431/podzim2007/Z0135/um/Uvod_06_Tihove_pole.pdf

kde $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$ je gravitační konstanta, M je hmotnost daného tělesa a r je jeho vzdálenost od Země. Výsledky pro vybraná tělesa jsou uvedeny v tabulce 2.

Tab. 2: Vliv kosmických těles na tíhové zrychlení

těleso	$\frac{M}{\text{kg}}$	menší vzdálenost	větší vzdálenost	$\frac{\Delta g}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$
Měsíc	$7,35 \cdot 10^{22}$	365 033 km	407 241 km	$7 \cdot 10^{-6}$
Slunce	$1,99 \cdot 10^{30}$	147 098 074 km	152 097 701 km	$4 \cdot 10^{-4}$
Mars	$6,42 \cdot 10^{23}$	0,5 AU	2,5 AU	$6 \cdot 10^{-9}$
Jupiter	$1,90 \cdot 10^{27}$	4,2 AU	6,2 AU	$2 \cdot 10^{-7}$
Pluto	$1,30 \cdot 10^{23}$	38 AU	40 AU	$3 \cdot 10^{-13}$

V této tabulce bylo použito hodnot hmotností a vzdáleností z Wikipedie⁶, kde pro Slunce a Měsíc používáme vzdálenost perihelia a afélia, respektive perigea a apogea, zatímco pro planety používáme součet a rozdíl střední poloosy dané planety a Země.

Nyní ještě můžeme porovnat vliv těchto kosmických těles s gravitačním vlivem malých velmi blízkých těles. Pro člověka o hmotnosti $M = 80 \text{ kg}$ ve vzdálenosti $r = 1 \text{ m}$ je gravitační zrychlení přibližně $\Delta g = 5 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a pro kamion o hmotnosti $M = 40 \text{ t}$ ve vzdálenosti $r = 50 \text{ m}$ je gravitační zrychlení přibližně $\Delta g = 1 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, tedy porovnatelné s vlivem člověka nebo Marsu.

Slapové síly V předcházejícím odstavci jsme počítali vliv kosmických těles na bod ve středu Země. Tyto síly jsou však již zahrnuty do pohybu Země ve sluneční soustavě pomocí změn trajektorie. Co však má na měření na povrchu vliv, je slapová síla daná tím, že gravitační síla od jednotlivých těles není stejná na povrchu Země jako v jejím středu. Velikost slapové síly je tedy úměrná gradientu gravitační síly. V přímce procházející středy obou těles pozorujeme slapové zrychlení

$$\frac{2GMr}{R^3},$$

kde M je hmotnost daného tělesa, r je poloměr Země, R je vzdálenost Země od daného tělesa a M je hmotnost tohoto tělesa. Po dosazení hodnot pro Měsíc dostáváme $\Delta g \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a pro Slunce $\Delta g \approx 1 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Tyto síly jsou sice malé, ale i tak pozorovatelné v podobě přílivu, odlivu a rozdílů v jeho výšce dle fáze Měsíce. Tento vliv je řádově menší než vliv daných rozdílů gravitace na střed Země, obzvlášť pro vzdálenější objekty jako Slunce (vzhledem k závislosti na její třetí mocnině). Předpokládejme tedy, že vliv ostatních těles bude také řádově nižší než jejich přímý vliv na střed Země. Pokud tělesa okolo sebe rotují, je třeba připočítat ještě vliv odstředivé síly, který je přibližně poloviční⁸.

Systematické problémy matematického kyvadla

Skutečné změny tíhového zrychlení máme rozebrané, nyní se podíváme na systematické chyby měření matematickým kyvadlem. Pro náš příklad budeme uvažovat, že naše kyvadlo je realizo-

⁶<https://cs.wikipedia.org/>

⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Tidal_force#Sun,_Earth,_and_Moon

⁸https://cs.wikipedia.org/wiki/Slapov%C3%A1_s%C3%ADla

váno železnou koulí o hmotnosti $m = 1$ kg, které je uvázáno na ocelové struně tak, že vzdálenosti jejího těžiště od závěsu jsou $l = 2$ m.

Matematické kyvadlo, přesnost parametrů V modelu matematického kyvadla pak pro periodu platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Z měření periody tedy vypočítáme tíhové zrychlení jako

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}.$$

Podívejme se tedy, s jakou přesností bychom museli měřit periodu a délku závěsu, abychom dosáhli dané přesnosti. Z teorie přenosu chyb lze určit, že relativní nejistota měření délky závěsu a tíhového zrychlení budou stejné, tedy abychom například zvládli změřit odchylky tíhového zrychlení řádu $10^{-9} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, musíme dosáhnout relativní přesnosti 10^{-10} , tedy bychom museli měřit závěs s přesností 10^{-10} m, což je řádově rozměr atomu. Přesnost měření času je zde ještě podstatnější, protože dle přenosu chyb by pro pouze tuto chybu byla relativní chyba měření tíhového zrychlení dvojnásobná oproti relativní chybě měření periody. Pokud bychom např. chtěli dosáhnout přesnosti měření g do řádu $10^{-5} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ (pro délku už teoreticky možné, bylo by třeba měřit na mikrometry), museli bychom mít relativní přesnost měření periody $5 \cdot 10^{-6}$, což pro naše kyvadlo s periodou přibližně 2,8 s dává nejistotu měření času přibližně 10^{-5} s. Pro měření stopkami s možnou přesností měření 0,1 s by to tedy znamenalo měřit 10^4 kmitů, což by s danou periodou zabralo asi 8 hodin. Pro takto dlouhou dobu už by se kyvadlo pravděpodobně působením dalších vlivů zastavilo. Pro dosažení požadované přesnosti pro měření 100 kmitů (5 minut) bychom tedy potřebovali měřit s přesností alespoň na 0,001 s.

Matematické kyvadlo, změny délky Abychom měli délku stabilizovanou na mikrometry, musíme uvážit jevy, které by ji mohly měnit, a to teplotní roztažnost a pružné napínání. Změna délky vlivem délkové teplotní roztažnosti se spočítá jako

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta T,$$

kde l_0 je původní délka, ΔT je změna teploty a α je koeficient délkové teplotní roztažnosti. Jeho velikost nalezneme například v tabulkách⁹ a vidíme, že jeho velikost je například pro ocel $11 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, tedy pro bychom potřebovali udržovat přesnou teplotu na desetiny stupně, zatímco pro polyetylen je více než desetkrát větší, tedy tady bychom potřebovali udržovat teplotu na setinu stupně.

Druhý vliv je změna napěťové síly natahující lano vlivem kývání kyvadla. Pokud uvážíme maximální výchylku kyvadla 5° , budou změny tahové síly řádové

$$\Delta F = mg(1 - \cos \varphi) \approx 4 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

Pro přepočítání na změnu délky použijeme vztah popisující pružnost $\Delta l = k\Delta F$, kde k vyjadřuje tuhost, kterou vypočteme jako $k = l_0/(ES)$, kde S je průřez vlákna a E je modul pružnosti

⁹<http://kabinet.fyzika.net/studium/tabulky/tepelna-kapacita-roztaznost>.

v tahu. Předpokládejme tloušťku vlákna $d = 0,1$ mm a kruhový průřez a modul pružnosti v tahu oceli¹⁰ $E = 220$ GPa. Pro změnu délky pak dostáváme

$$\Delta l = \frac{l_0}{ES} \Delta F \approx 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{N}^{-1} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \text{ N} \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

Abychom dosáhli přesnosti 10^{-6} potřebovali bychom úhel maximálně $0,1^\circ$, což by dávalo průmět kyvu do vodorovného směru přibližně 3 mm.

Fyzikální kyvadlo Nyní se podíváme na náš model fyzikálního kyvadla, tedy už nebudeme považovat naše kyvadlo za hmotný bod na nehmotném závěsu, ale za tuhou kouli a tuhou tyč (obojí z oceli). Pro dobu kmitu fyzikálního kyvadla platí vzorec

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}, \quad (1)$$

kde l je vzdálenost těžiště od bodu otáčení a I je moment setrvačnosti kolem osy otáčení. Když uvážíme hustotu oceli $\rho = 7850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, spočítáme hmotnost vlákna modelovaného tuhou tyčí $m_v = 0,12$ g a poloměr koule $r = 3,12$ cm. Změna polohy těžiště vlivem vlákna bude asi 0,1 mm. Moment setrvačnosti vyjádříme jako součet momentu setrvačnosti tuhé tyče $I_t = m_v(l-r)^2/3$ a moment setrvačnosti koule $I_k = 2m_k r^2/5$, který ovšem musíme posunout o vzdálenost středu koule od těžiště l pomocí Steinerovy věty. Nyní vyjádříme z rovnice (1) tíhové zrychlení a dosadíme za všechny veličiny:

$$\begin{aligned} g &= 4\pi^2 \frac{I}{m l T^2} = \\ &= 4\pi^2 \frac{\frac{2}{5} m r^2 + m l^2 + \frac{1}{3} m_v (l-r)^2}{(m + m_v) \left(l - \frac{m_v l}{2(m+m_v)} \right) T^2} = \\ &= 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \frac{\frac{2}{5} \frac{r^2}{l^2} + 1 + \frac{1}{3} \frac{m_v}{m} \left(1 - \frac{r}{l} \right)^2}{\left(1 + \frac{m_v}{m} \right) \left(1 - \frac{m_v}{2(m+m_v)} \right)} = \\ &= g_0 \frac{\frac{2}{5} \frac{r^2}{l^2} + 1 + \frac{1}{3} \frac{m_v}{m} \left(1 - \frac{r}{l} \right)^2}{\left(1 + \frac{m_v}{m} \right) \left(1 - \frac{m_v}{2(m+m_v)} \right)} \approx \\ &\approx 1,000\,076 g_0 \end{aligned}$$

Rozdíl naměřeného tíhového zrychlení při započtení modelu fyzického kyvadla je tedy řádově $7 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Další otázkou by bylo, jak přesně by musely být měřeny konkrétní veličiny vystupující ve výpočtu. Zde bychom postupovali opět metodou přenosu chyb, ovšem pro komplikovanost výpočtu pro takto složitý vzorec to zde nebudeme počítat.

Vliv odporu vzduchu Jak jsme určili v minulém bodě, závaží bude mít nenulový rozměr, tedy při jeho pohybu ve vzduchu na něj bude působit odporová síla. Abychom mohli použít

¹⁰<http://kabinet.fyzika.net/studium/tabulky/modul-pruznosti.php>

teorii tlumeného kmitání, budeme uvažovat, že odporová síla je přímo úměrná rychlosti tělesa, tedy obtékání je laminární a pro odporovou sílu můžeme psát

$$F_o = 6\pi\mu r v ,$$

kde r je poloměr koule a μ je dynamická viskozita vzduchu, která má hodnotu asi $\mu = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ a je silně teplotně závislá. Pohybová rovnice má tedy nyní tvar

$$I\ddot{\varphi} + 6\pi\mu r l \dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0 ,$$

který po linearizaci a vydělení momentem setrvačnosti upravíme na

$$\ddot{\varphi} + \frac{6\pi\mu r l}{I} \dot{\varphi} + \frac{mgl}{I} \sin \varphi = 0 ,$$

což identifikujeme jako tvar rovnice pro tlumené kmitání $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ s parametry $\delta = \frac{3\pi\mu r l^2}{I} \dot{\varphi}$ a $\omega_0^2 = mgl/I$. Takovýto systém bude mít vlastní frekvenci ω modifikovanou, a to

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} ,$$

z čehož vypočítáme modifikovanou periodu

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 - \delta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\delta^2 T_0^2}{4\pi^2}}} \approx 1,000001 T_0$$

Odpor vzduchu tedy dává relativní změnu periody 10^{-6} , tedy relativní změnu měřeného tíhového zrychlení přibližně dvojnásobnou, přibližně $2 \cdot 10^{-5} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Amplituda pak klesá jako $e^{-\delta t}$, charakteristická konstanta útlumu (kdy se zmenší amplituda na $1/e$) je přibližně $1,7 \cdot 10^5 \text{ s} \doteq 50 \text{ h}$. Na zmenšení amplitudy tedy bude mít větší vliv tření v závěsu než odpor vzduchu.

Dalšími zdroji, které by zde mohly hrát roli je teplotní roztažnost koule nebo vliv změn teploty a tlaku na hustotu a dynamickou viskozitu vzduchu. Ty však opět nebudeme pro přílišnou náročnost explicitně počítat.

Vliv anharmonicity Při řešení rovnice harmonického oscilátoru užíváme aproximaci $\sin \varphi = \varphi$, která platí pro malé výchylky. Když však budeme chtít mít pro výchylky větší přesnost, můžeme použít rozvoj sinu do vyššího řádu, tedy $\sin \varphi = \varphi + \varphi^3/6$, což nám dává řešení pro periodu¹¹

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) .$$

To nám pro maximální úhel 5° dává relativní změnu periody přibližně $5 \cdot 10^{-4}$, tedy pro tíhové zrychlení dává rozdíl oproti jednoduchému výpočtu rozdíl řádu $10^{-2} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Pokud bychom chtěli ještě přesnější výsledek, můžeme použít rozvoj sinu do ještě vyššího řádu, pro ty však už nemáme přesné analytické řešení. Maximální úhel ale není stále stejný, ale vlivem odporu vzduchu se postupně zmenšuje, tedy ani řešení z části Anharmonicity není přesné.

¹¹[https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical_Mechanics/Classical_Mechanics_\(Dourmashkin\)/24%3A_Physical_Pendulums/24.04%3A_Appendix_24A_Higher-Order_Corrections_to_the_Period_for_Larger_Amplitudes_of_a_Simple_Pendulum](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical_Mechanics/Classical_Mechanics_(Dourmashkin)/24%3A_Physical_Pendulums/24.04%3A_Appendix_24A_Higher-Order_Corrections_to_the_Period_for_Larger_Amplitudes_of_a_Simple_Pendulum)

Další vlivy Dalším podstatným vlivem (viz sekce Vliv odporu vzduchu) je odpor v závěsu, který je ale složité kvantifikovat. Protože však z praxe víme, že kyvadlu trvá zmenšit svou amplitudu na třetinu méně než 50 h, bude rozhodně nezanedbatelný. Dalším vlivem, který bychom museli kontrolovat, je proudění vzduchu v místnosti. To by mělo být ideálně nulové, ale dosáhnout toho je technicky velmi obtížné, tedy bychom se alespoň snažili mít jej stabilní. Stabilitu proudění však může narušit už i pohyb experimentátora či jiných osob v místnosti.

Závěr

V první části řešení jsme si ukázali, jak velký vliv mají jednotlivé skutečné změny tíhového zrychlení. V druhé části jsme se pak podívali, jaké všechny úvahy a korekce bychom museli zahrnout, abychom dané přesnosti skutečně dosáhli. Vidíme, že z našeho modelu 1 kg závaží na 2 m závěsu nejsme schopni kvůli přesnosti měření délky a času měřit s větší přesností než na $10^{-6} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, což je řádově ovlivněno složením podloží se započtením přesné zeměpisné polohy i nadmořské výšky. Měření vlivu kosmických těles je pak zcela mimo naše rozlišovací možnosti. K dosažení přesnosti na $10^{-6} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ pak ale kromě velmi přesného měření vstupních parametrů a hlídání jejich změn musíme započítat i to, že jde o fyzické kyvadlo, které je tlumeno odporem vzduchu, a dokonce je třeba i započítat nepřesnost linearizace problému. Měřit veličiny velmi přesně je tedy velice složité nejen z praktického hlediska a potřeb pečlivého měření a přesné aparatury, ale narážíme i na hranice použité teorie.

Kateřina Rosická
kacka@fykos.cz

Úloha III.E ... vybíjená

13 bodů; (chybí statistiky)

Třením nabijte předmět a poté proměřte závislost jeho samovolného vybíjení na čase. Určete elektrickou vodivost vzduchu. Uvažujte, že velikost náboje se mění jako

$$Q = Q_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t},$$

kde Q_0 je počáteční náboj, ϵ je permitivita vzduchu a σ je hledaná vodivost.

Nápověda: Zavěste na tenké dlouhé vlákno malý kovový předmět (např. matičku). Třením nabijte brčko a přeneste část náboje na předmět. Měl by se od brčka začít odpuzovat. Z jejich vzájemné vzdálenosti pak určíte součin nábojů a poté vodivost.

Jarda se tak dlouho pokoušel měřit náboj, až celou úlohu předělal na měření vodivosti.

Úvod a teoretický základ

Experiment lze naměřit tak, jak je uvedeno v nápovědě. Ve vztahu pro rychlost vybíjení v zadání není žádná závislost na tvaru předmětů. Budeme proto dále předpokládat, že tvar ani poloha předmětů nehrají při ztrátě náboje žádnou roli. Použijeme dvě matičky ze stavebnice Merkur, které přivážeme na dlouhou niť. Tu přehodíme přes tyčku a matičky umístíme do stejné výšky. Plastové brčko třením o papírový kapesník nabijeme a dotykem s matičkami přeneseme část náboje na ně. Brčko můžeme nabít ještě jednou a položíme jej mezi obě matičky, které by se nyní měly odpuzovat od sebe a od brčka, které jsme upevnili. Může se stát, že se jedna z matiček elektřinově „přilepí“ k brčku, zatímco druhá matička začne být odpuzována. Na naše měření závislosti náboje na čase to ale nebude mít vliv, protože tvar předmětů nehraje roli.

Ačkoli postup vysvětlený v předchozím odstavci funguje, ve svém řešení jsme nakonec použili pouze jednu zavěšenou matičku (viz obrázek dále), kterou jsme nechali se odpuzovat od brčka. To jsme umístili co nejbližší původnímu místu, kde se matička nacházela. Polohu matičky budeme fotoaparátem snímat po dobu několika minut, během kterých dojde k samovolnému vybití nábojů na brčku i na matičce.

Nyní se zaměříme na geometrii experimentu a na to, jak díky ní získat informaci o náboji.

Protože odchylka matičky od kolmice byla vždy malá, můžeme uvažovat $\text{tg } \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$ a $\cos \alpha \approx 1$. Pak tedy $\alpha = d/l$, kde l je délka závěsu a d je průběžná vzdálenost středů matičky a brčka.

Na matičku působí odpuzující elektrostatická síla F_e , tíhová síla F_G a tahová síla závěsu T . V aproximaci malého úhlu α působí F_e vodorovně a vyrovná se se složkou tahové síly $T\alpha$, zatímco tíhová se vyrovná s vertikální složkou $T \cos \alpha \approx T$. Z jedné rovnice pak vyjádříme T a dosadíme do druhé, čímž dostaneme $F_e = mg\alpha$.

Nyní nastává potíže, jak vyjádřit elektrickou sílu F_e . Nemůžeme zde jednoduše použít Coulombův zákon, protože nemáme bodové zdroje náboje. Elektrickou sílu se pokusíme spočítat pomocí vztahu $F_e = EQ_m$, kde Q_m je náboj na matičce a E je elektrická intenzita vyvolaná nábojem na brčku. Tu v závislosti na vzdálenosti od středu brčka odhadneme vztahem

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon d},$$

kde λ je délková hustota náboje na brčku, kterou považujeme za homogenní (lepší odhad nemáme). Brčko přitom považujeme za dlouhý tenký drát.

Z rovnosti sil tak můžeme vyjádřit závislost mezi nábojem a vzdáleností d jako

$$mg\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon d} Q_m \Rightarrow \frac{2\pi\epsilon mg}{l} d^2 = \lambda Q_m.$$

Jestliže na začátku měření byl na matičce náboj Q_{m0} a na brčku nábojová hustota λ_0 , můžeme pravou stranu rovnice zapsat jako

$$\lambda Q_m = \lambda_0 e^{-\sigma t/\epsilon} Q_{m0} e^{-\sigma t/\epsilon} = \lambda_0 Q_{m0} e^{-2\sigma t/\epsilon}.$$

Závislost vzájemně vzdálenosti d na čase pak vyjádříme jako

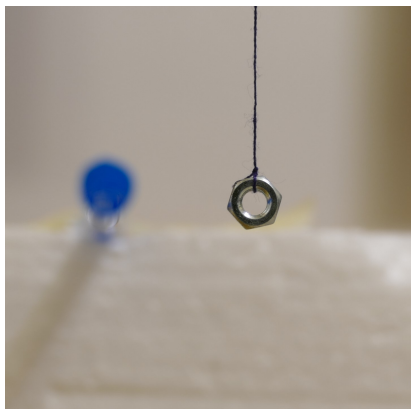
$$d = \sqrt{\frac{l\lambda_0 Q_{m0}}{2\pi\epsilon mg}} e^{-\sigma t/\epsilon}.$$

Vzdálenost by tak měla v čase klesat exponenciálně rychle.

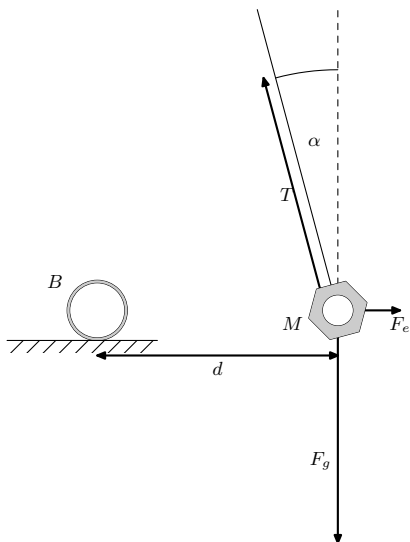
Naměřené hodnoty a zpracování výsledků

Vzdálenost jsme určovali pomocí fotoaparátu, který jsme nechali na stálém místě. Ten každých 10 s udělal snímek polohy matičky vůči brčku (viz obrázek níže). Matičku jsme zavěsili na dlouhé vlákno a zaznamenali si, kde je její stabilní poloha. Nabili jsme brčko třením a dotekem s matičkou jsme část náboje přenesli. Matička se začala od brčka odpuzovat. Brčko jsme umístili tak, aby bylo těsně vedle stabilní polohy matičky, tedy aby po vybití veškerého náboje bylo vlákno svislé a matička v původní stabilní poloze.

Hmotnost použité matičky je přibližně $m = 0,4$ g a délka závěsu činila $l = 76$ cm. Vzdálenost protějších rovnoběžných stran matičky je $r = 0,6$ cm.



Obr. 3: Fotografie provádění experimentu.



Obr. 4: Nákres situace s důležitými prvky. Velikosti veličin nejsou v měřítku.

V programu *Geogebra* jsme pak změřili u každé fotografie vzdálenost středů matičky a brčka. Tu jsme naměřili v relativních jednotkách. Pomocí rozměru matičky v reálném světě a v relativních jednotkách jsme jednoduše schopni přepočítat vzdálenosti na fotografii na reálné centimetry pomocí trojčlenky

$$d = \frac{r}{r'} d',$$

kde r je rozměr matičky v centimetrech a čárkované veličiny jsou udávány v relativních jednotkách na fotografii. Relativní jednotka na fotografii byla zvolena tak, aby byl přepočet triviální, tedy $r' = 0,6$, což odpovídalo již výše zmíněnému průměru matičky $r = 0,6$ cm.

Byla provedena tři (použitelná) měření. V jistém okamžiku přibližování matičky k brčku jsme viděli změnu chování – matička se rychle přiblížila k brčku a "přilepila" se k němu – začala působit přitažlivá síla. Chybu jednotlivých vzdáleností na fotce odhadneme na 0,1 cm, pro názorné grafické zpracování však v tabulce udáváme hodnoty na tři platné číslice. V grafu nevykreslujeme chybové úsečky, protože jejich hodnota by byla všude stejná a navíc jsme ji jen odhadli.

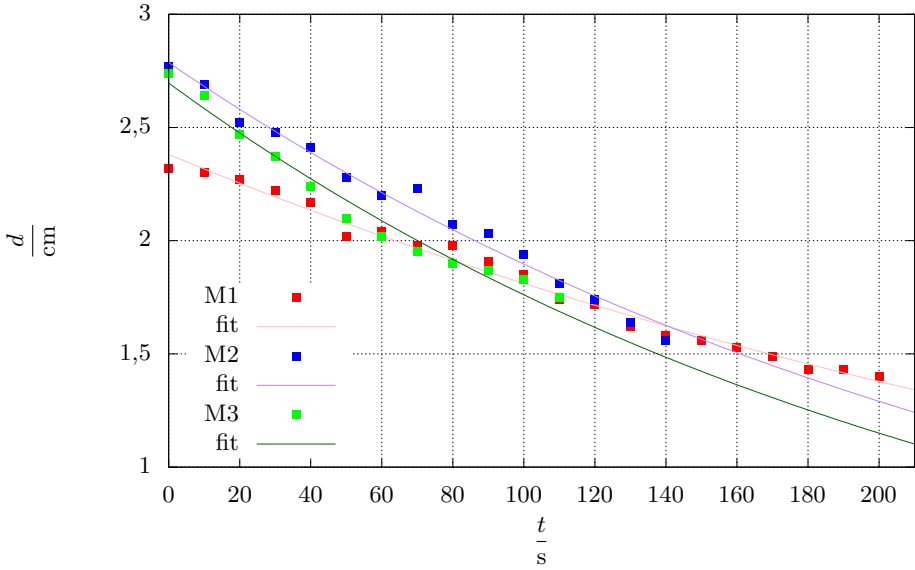
Všechny tři závislosti vyneseme do grafu a proložíme je exponenciálou. Pro měření číslo 2 nebudeme zohledňovat poslední tři datové body, protože zcela evidentně se systém začal chovat podle jiných zákonů. V měření 2 a 3 máme méně datových bodů, protože se matička přitáhla k brčku dříve než při měření 1.

V programu *Gnuplot* jsme závislosti proložili exponenciálou a zobrazili si jejich rovnice ve tvaru

$$y = Ae^{Bt}. \quad (2)$$

Tab. 3: Závislost vzdálenosti mezi matičkou a brčkem na čase. Hodnoty jsou uvedeny po přepočtu z relativních jednotek. Pro názornost poklesu je necháváme zapsané na tři platné číslice.

$\frac{t}{s}$	$\frac{d}{cm}$	$\frac{d}{cm}$	$\frac{d}{cm}$
0	2,32	2,77	2,74
10	2,30	2,69	2,64
20	2,27	2,52	2,47
30	2,22	2,48	2,37
40	2,17	2,41	2,24
50	2,02	2,28	2,10
60	2,04	2,20	2,02
70	1,98	2,23	1,95
80	1,98	2,07	1,90
90	1,91	2,03	1,87
100	1,85	1,94	1,83
110	1,74	1,81	1,75
120	1,72	1,74	0
130	1,62	1,64	0
140	1,58	1,56	0
150	1,56	1,45	0
160	1,53	1,10	0
170	1,49	0,51	0
180	1,43	0	0
190	1,43	0	0
200	1,40	0	0



Obr. 5: Závislost vzdálenosti mezi matičkou a brčkem na čase.

Koeficienty jsou určeny parametry podle rovnice 2. Chyby těchto koeficientů jsou též vypočítané programem *Gnuplot*.

Tab. 4: Parametry fitování. Symbolem Δ jsou označeny chyby příslušných veličin.

Parametr	Měření 1	Měření 2	Měření 3	Průměr
$\frac{A}{\text{cm}}$	238	290	270	
$\frac{\Delta A}{\text{cm}}$	2	10	3	
$\frac{B}{\text{s}^{-1}}$	$-2,7 \cdot 10^{-3}$	$-3,8 \cdot 10^{-3}$	$-4,3 \cdot 10^{-3}$	$-3,6 \cdot 10^{-3}$
$\frac{\Delta B}{\text{s}^{-1}}$	$0,1 \cdot 10^{-3}$	$0,1 \cdot 10^{-3}$	$0,2 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$

Počítat průměr pro hodnotu parametru A nedává smysl, protože tento parametr závisí na počátečním náboji, který je pro každé měření jiný. Naopak B by mělo být ve všech případech podobné a rovné zlomku $-\sigma/\varepsilon$. Vodivost vzduchu tak dostaneme jako

$$\sigma = -B\varepsilon = (3,2 \pm 0,4) \cdot 10^{-14} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Dosadili jsme $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$, neboť permitivita vzduchu je blízka permitivitě vakua a při naší přesnosti měření způsobí toto zaokrouhlení zanedbatelnou chybu.

Relativní chyba vodivosti σ je zde stejná, jako relativní chyba parametru B , protože obě tyto veličiny se liší jen přenásobením konstantou ε , která má chybu řádově menší a můžeme ji zanedbat. Chyba parametru B , v tabulce výše ve sloupečku s označením *Průměr* je určena jako směrodatná odchylka aritmetického průměru parametru B .

Diskuze

Samotný experiment byl poměrně obtížně proveditelný. Ne vždy se totiž náboj přenesl z brčka na matičku tak, jak jsme potřebovali, a k odpuzování tak nedošlo. Často se dokonce stávalo, že se matička k brčku celou dobu přitahovala. Jen v několika málo případech se experiment povedl tak, jak bylo zamýšleno. Ovšem i v průběhu těchto měření převládaly přitažlivé síly a matička se na brčko nakonec přilepila. Jakmile se totiž náboj na ní částečně vybil, vlivem elektrostatické indukce se zbytek náboje přeuspořádal. Jestliže bylo brčko a matička nabitý jedním druhem náboje, tak se na matičce na straně směrem k brčku indukoval náboj opačného znaménka. Ačkoli jeho celková velikost mohla být menší než velikost náboje opačného znaménka na matičce, tak byl blíže brčku, takže převážila elektrostatická síla opačným směrem.

Rozměry předmětů hrají velkou roli při navrhování vhodného modelu pro danou situaci. Podle vztahu ze zadání na tvaru tělesa nezávisí, neznáme ovšem rozložení náboje na tělesu, velikost a ani působišť elektrostatické síly.

V použitém modelu jsme předpokládali, že brčko je rovnoměrně nabitý dlouhý drát. Je ale velmi nepravděpodobné, že bychom brčko nabili aspoň přibližně homogenně po jeho nějaké delší části. Kousek náboje jsme navíc hned přenesli na matičku. Ta se v průběhu experimentu nenacházela příliš daleko od brčka, proto nemůžeme zanedbat jeho válcovitý tvar. Zároveň také brčko není „velmi dlouhé“ v porovnání s měřítkem experimentu a zřejmě bychom měli počítat s jeho konečnými rozměry, to je ale matematicky mnohem náročnější.

Podobný problém nastává u matičky. V navrženém modelu jsme ji považovali za bodový náboj s polohou uprostřed. Ani matička ale nemá rozměry zanedbatelné vůči měřítku experimentu, proto je tento model poměrně odvážný. Zároveň je vyrobena z vodivého materiálu, takže se na ní náboj může přeuspořádat a působíště elektrostatické síly tak mění svoji polohu.

Podle zadání úlohy jsme měli proměřit závislost vybíjení na čase. Tuto formulaci můžeme také brát tak, že proměříme závislost celkového náboje na čase. V rámci svého experimentu ovšem od sebe nejsme schopni oddělit jednotlivé náboje v součinu $Q_m \lambda$. Dle teorie v zadání se ale oba náboje vybíjí stejně rychle, takže zadání splňuje i závislost $\sqrt{Q_m \lambda}$ na čase. A protože dle našeho modelu je $\sqrt{Q_m \lambda}$ přímo úměrné vzdálenosti d , tak vynesení d do grafu jsme vlastně vynesli i závislost $\sqrt{Q_m \lambda}$ na čase, pouze v jiných jednotkách.

Z naměřených hodnot tedy pozorujeme, že náboj, který způsobíme třením, ztratí předměty v řádu jednotek minut. V běžném životě nás tedy tyto jevy výrazně nelimitují.

Porovnejme ještě námi naměřenou hodnotu vodivosti vzduchu $(3,2 \pm 0,4) \cdot 10^{-14} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ s příklady uvedenými na internetu. Anglická wikipedie¹² uvádí rozmezí $1 \cdot 10^{-15} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ až $1 \cdot 10^{-9} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ při pokojové teplotě, velmi tedy závisí na dalších parametrech vzduchu, například na vlhkosti. Jinde¹³ můžeme nalézt rozmezí $3 \cdot 10^{-15} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ až $8 \cdot 10^{-15} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. Nyní se ale ještě vraťme k předchozí diskuzi našeho modelu a uvědomme si, že jsme předpokládali, že síla mezi brčkem a matičkou je úměrná d^{-1} , což pravděpodobně není pravda. Síla bude závislá na rozměru brčka, a i když tuto závislost aproximujeme na daném rozsahu mocninnou funkcí, bude hodnota v exponentu pravděpodobně vyšší (v absolutní hodnotě, protože při konečných rozměrech se

¹²https://en.wikipedia.org/wiki/Electrical_resistivity_and_conductivity.

¹³<https://www.thoughtco.com/table-of-electrical-resistivity-conductivity-608499>.

brčka chová alespoň trochu více jako bodový zdroj). Velikost tohoto exponentu se promítne do naměřené vodivosti přímo úměrně, tedy kolikrát bude větší exponent, tolikrát bude větší vodivost.

Další nepřesnost je způsobena předpokladem $\alpha = d/L$, který je poměrně obtížné splnit, je potřeba přesné umístění brčka vůči matici. Také vůbec definice vzdálenosti d , na kterou elektrostatická síla působí, jako vzdálenosti středů obou těles nemusí být správná, protože v matici se náboj může volně pohybovat a nemůžeme si být jisti, že působí síly je přesně ve středu.

Přes všechny tyto nepřesnosti však můžeme konstatovat, že jsme vodivost vzduchu určili aspoň řádově dobře a máme představu, jak je velká (nebo spíše malá, naměřili jsme něco o velikosti $1 \cdot 10^{-14} \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$, i když samozřejmě závisí na definici jednotek). Také tedy už víme, že vzduch je izolant, protože konduktivita je malá.

Závěr

Sestavili jsme experiment dle nápovědy v zadání a proměřili vzdálenost matičky od brčka v závislosti na čase. Určení náboje je pak podle zvoleného modelu úměrné této vzdálenosti. Po proložení dat exponenciálou jsme určili vodivost vzduchu za normálních podmínek jako $(3,2 \pm \pm 0,4) \cdot 10^{-14} \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha III.S ... kvanta orbitalů

10 bodů; průměr 10,53; řešilo 47 studentů

- Podobně jako v seriálu vytvořte pomocí Hückelovy metody matici hamiltoniánu pro molekulu cyklobutadienu a ověřte, že její vlastní čísla jsou $\alpha + 2\beta$, α , α , $\alpha - 2\beta$. Načrtněte do diagramu, jaké jsou energie vzniklých orbitalů a jak by je obsadily elektrony. (4b)

Bonus: Jaký je zásadní rozdíl v charakteru těchto orbitalů a jejich obsazení oproti molekule benzenu, kterou jsme si ukázali v seriálu? Jaké to má pro molekulu cyklobutadienu důsledky? (2b)

- Zkuste se vrátit k molekule betakarotenu a znovu spočítat, na jaké vlnové délce by měla absorbovat, tentokrát pomocí Hückelovy metody. Kolik by musel být parametr β , aby vyšla experimentální hodnota?

Alternativa Pokud narazíte na problém s diagonalizací hamiltoniánu, proveďte úlohu s molekulou hexa-1,3,5-trienem. Experimentální hodnota absorpce je v tomto případě na vlnové délce 250 nm. (4b)

- Co se stane s molekulou (stačí taková, která má jen jednoduché vazby), pokud pomocí UV světla excitujeme elektron ze σ do σ^* orbitalu? (2b)

Mikuláš znovu naděloval, tentokrát dokonce skoro ve správnou roční dobu.

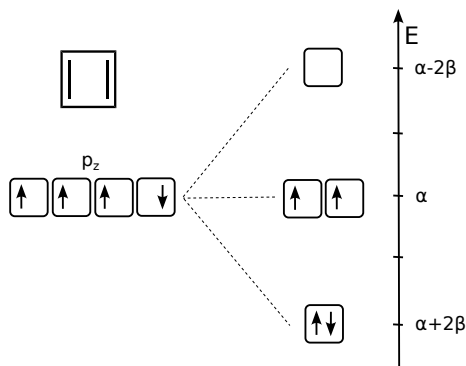
- Pro molekulu cyklobutadienu vytvoříme matici hamiltoniánu podle stejných pravidel jako pro benzen. Výsledkem bude velmi podobná matice, jen zmenšená na 4×4 .

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Tu rozložíme stejně jako v seriálu na

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla druhé z matic jsou $0, 0, 2, -2$. Tím pádem vlastní čísla celé matice hamiltoniánu budou $\alpha, \alpha, \alpha + 2\beta, \alpha - 2\beta$. (Moc se omlouvám za chybu v zadání, na kterou nás upozornil jeden z řešitelů.) Máme 4 orbitály, do kterých je potřeba umístit 4 elektrony. První dva jsou jasné, ty obsadíme do nejnižší hladiny s energií $\alpha + 2\beta$. (Parametry α i β jsou záporné.) Zbylé dva elektrony jsou složitější. Ty musíme obsadit do dvou orbitalů, které mají stejnou energii α . Na úrovni Hückelova modelu je jedno, jak tyto orbitály obsadíme, tedy jestli oba elektrony dáme do jednoho z orbitalů, nebo zda každý orbital obsadíme jedním elektronem. Pokud ale chceme započítat vlivy jako je odpuzování mezi elektrony, které v Hückelově modelu zanedbáváme, musíme elektrony obsadit podle Hundových pravidel. Umístíme tedy po jednom elektronu do každého orbitalu tak, aby spiny obou elektronů mířily stejným směrem. Obsazenost orbitalů bude vypadat jako na obrázku.



Hlavní rozdíl oproti molekule benzenu je, že na nejvyšší obsazené hladině máme ve 2 orbitalech o stejné energii jen dva elektrony (není plně obsazená). To má zásadní důsledky. Především nedojde ke stejné stabilizaci delokalizovaných π orbitalů jako u molekuly benzenu, cyklobutadien se proto nechová jako aromatické uhlovodíky. Dokonce existuje pravidlo, které říká, že pro to, aby byl cyklický uhlovodík aromatický, musí mít $4n + 2$ π -elektronů, kde n je přirozené číslo. Zároveň existuje taková deformace geometrie molekuly, která sníží energii jednoho z orbitalů na úkor zvýšení energie toho druhého. To se v tomto případě vyplatí, jelikož můžeme obsadit dvěma elektrony ten orbital se sníženou energií a mít nižší celkovou energii. Ve skutečnosti tedy molekula cyklobutadienu není čtvercová, ale má tvar obdélníku.

- Hamiltonián pro betakaroten, vzhledem k tomu, že máme 22 atomů uhlíku v konjugovaném systému, bude matice 22×22 . Její tvar je i přes velikost jednoduchý:

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

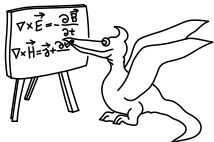
Diagonalizací Hamiltoniánu dostaneme celkem 22 vlastních čísel. Podstatná jsou pro nás jen 11. a 12. v pořadí při seřazení podle velikosti, protože odpovídají orbitalům, mezi kterými elektron při excitaci přeskakuje. Energie těchto orbitalů jsou $\alpha + 0,136\beta$ a $\alpha - 0,136\beta$. Energie přechodu bude tedy $-0,272\beta$. Pokud dosadíme hodnotu $\beta = -3\text{ eV}$, dostaneme energii přechodu přibližně $0,816\text{ eV}$, což odpovídá vlnové délce $1\,520\text{ nm}$. To je ještě horší výsledek než který jsme získali v minulém díle z nekonečné potenciálové jámy, která nám dala $1\,240\text{ nm}$. Abychom dostali experimentální hodnotu 450 nm , která odpovídá energii přechodu $2,76\text{ eV}$, muselo by β mít hodnotu $-10,15\text{ eV}$. Takto velké fluktuace β v závislosti na tom, co počítáme, indikují, že Hückelova metoda je občas příliš drastická aproximace na to, abychom dostali přesné hodnoty.

Pokud pracujeme s molekulou hexa-1,3,5-trienu, pak místo toho diagonalizujeme Hamiltonián

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

a dostaneme energie odpovídajících hladin $\alpha + 0,445\beta$ a $\alpha - 0,445\beta$. Energie přechodu pak bude $-0,89\beta$ a s $\beta = -3\text{ eV}$ nám vyjde vlnová délka 464 nm . Pokud bychom chtěli experimentální vlnovou délku, potřebovali bychom β o hodnotě $-5,57\text{ eV}$.

3. Pokud excitujeme elektron z σ do σ^* orbitalu, musíme si uvědomit, co se stane s energií. Elektron v σ orbitalu bude mít sice nižší energii oproti situaci, kdy by atomy ve vazbě byly nekonečně vzdáleny, penalizace za druhý elektron v σ^* orbitalu však bude vyšší. I celková energie molekuly proto bude vyšší, než kdyby oba atomy ve vazbě byly nekonečně vzdáleny. Vyplatí se jí proto postupným zvyšováním vzdálenosti atomů ve vazbě „sklouznout“ do stavu s nižší energií, a dojde tak k rozpadu celé molekuly na dvě části. Molekula by sice mohla vyzářit foton a vrátit se do původního stavu s oběma elektrony ve vazebném orbitalu, vyzářování fotonu ale probíhá na mnohem delších časových škálách než geometrické změny, molekula to před svým rozpadem „nestihne“. Toto je důvod, proč je záření s fotony o vysoké energii (UV, Röntgenovo a γ) tak škodlivé. Dokáže ničit molekuly, včetně těch v našem těle. (Je nutné ale poznamenat, že lidské tělo je náhylné především na poškození DNA, na což stačí excitace z π do π^* , které pak způsobí chemické vazby mezi molekulami dvou různých bází, což naruší strukturu DNA natolik, že ji tělo neumí opravit.)



Seriál: Kvanta molekul

V dnešním díle se konečně podíváme na to, jak se pomocí kvantové fyziky počítají molekuly.

Nic není tak jednoduché

Jak jistě tušíte a také jak Vám jistě napověděl závěr druhého dílu seriálu, spočítat celou molekulu není jen tak jednoduché. V průběhu řešení musíme provést řadu zjednodušení. Začínáme už tím, jakou uvažujeme fyziku problému, tedy jaké fyzikální efekty uvažujeme. V první řadě většinou neuvažujeme efekty speciální teorie relativity, tedy například to, že pohybující se elektron je těžší. Druhá, zásadnější úvaha, je, že atomová jádra jsou mnohonásobně těžší než elektrony, a tím pádem se budou pohybovat na mnohem pomalejších časových škálách. Výsledkem toho je, že elektrony vidí jádra jako téměř nehybná, a tedy můžeme řešit jejich pohyb (vlnovou funkci) se zafixovanými jádry, a pohybem jader se případně zabývat až později. Ze stejného důvodu můžeme i zanedbat kvantovou povahu jader a považovat je za bodové náboje.

Ve výsledku tedy řešíme Schrödingerovu rovnici jen pro sadu elektronů v elektrostatickém poli zafixovaných jader. Samozřejmě nechceme zanedbávat elektrostatickou interakci mezi elektrony, takže hamiltonián bude obsahovat příslušné členy. Ale pokud si znovu vzpomenete na závěr druhého dílu, ani toto není vůbec jednoduché. Tam jsme si naznačili, že na přesné řešení Schrödingerovy rovnice můžeme v případě, kdy máme více než několik málo elektronů, rovnou zapomenout. A to si uvědomme, že často nás zajímají molekuly, které mají mnoho desítek atomů a pár set elektronů.

Řešení tohoto problému je snadné, stačí si vzpomenout na minulý díl. Zavedeme si báze funkce. V případě, že chceme počítat molekuly, máme k dispozici mnoho různých optimalizovaných sad. Většinou se jedná o funkce, které připomínají atomové orbitály, jak je známe, jen jsou definované tak, aby se s nimi lépe numericky počítalo. Při výpočtu pak použijeme pro každý atom jednu sadu funkcí s parametry specifickými pro konkrétní prvek, které jsou centrovány okolo polohy tohoto atomu. Většinou nám stačí pro každý atom jen několik desítek báze funkcí.

Mohlo by se zdát že máme vyhráno – Povedlo se nám zredukovat problém na několik set až pár tisíc báze funkcí, přestože předtím jsme měli více mřížových bodů, než je částic ve vesmíru! Opak je ale pravdou. Musíme si uvědomit, že nemáme jednočásticový problém. Tedy základní „konstrukční“ jednotkou nejsou samotné orbitály, ale stavy, kde máme v dané sadě orbitalů nějakým způsobem naskládané elektrony. Každý takovýto stav pak bude mít svůj vlastní neznámý koeficient. Kolik takových stavů je? To dokážeme jednoduše určit. Máme N báze funkcí, to znamená N různých orbitalů, do kterých můžeme obsazovat elektrony. V každém orbitalu může být elektron se spinem nahoru, dolů, oba, nebo ani jeden. To znamená, že máme vlastně $2N$ chlívčků, do kterých umísťujeme po jednom elektrony. Počet možností pak je, pokud počet elektronů je k , dán kombinačním číslem $\binom{2N}{k}$. To je stále pro většinu systémů astronomické číslo, například pokud máme 40 elektronů a 100 orbitalů, tak počet možností je řádově 10^{42} . A to odpovídá ještě docela malé molekule, například benzenu. Ale naštěstí existuje aproximace, která nás z této kaše umí dostat.

Hartree-Fockova aproximace

Jak z toho ven? Problém vězí v tom, že se snažíme řešit problém pro všechny elektrony najednou. Musíme se pokusit problém rozdělit, tak, abychom měli nezávislou rovnici pro každý elektron zvlášť, ale zároveň jsme nezanedbali odpuzování mezi jednotlivými elektrony, jako jsme to dělali doteď. Prvním krokem je opustit myšlenku toho, že můžeme mít různé konfigurace ve vlnové funkci, tedy že do vlnové funkce přispívají různé způsoby, jak mohou být orbitály obsazeny. Místo toho využijeme to, že vlnovou funkci většiny molekul můžeme dobře popsat jedinou konfigurací, takovou, že postupně odspodu dvakrát obsazujeme orbitály s nejnižší energií. Celý problém se nám pak postupně smrskne jen na hledání správného tvaru těchto obsazených orbitalů. Jak ale tyto orbitály hledáme? Představme si, že by nám někdo prozradil, jak vypadají všechny obsazené orbitály kromě jednoho. Pak bychom mohli vzít vlnové funkce všech těchto orbitalů a vyrobit z nich hustotu pravděpodobnosti, kterou jsme si zavedli v druhém díle seriálu. Když ale tuto hustotu pravděpodobnosti vynásobíme nábojem elektronu, dostaneme nábojovou hustotu!

Tím pádem známe jak elektrostatický potenciál jader, tak rozložení náboje ostatních elektronů, nic nám nebrání vytvořit Schrödingerovu rovnici pro poslední orbital z potenciálem daným tímto rozložením náboje a tu snadno vyřešit, najednou máme jen několik set neznámých, což pro počítač je hračka. (Hledáme jen jeden neznámý koeficient pro každou básovou funkci.) Výsledkem pak je vlnová funkce posledního orbitalu a energie elektronu v tomto orbitalu.

A jak se vypořádáme s tím, že vlnové funkce jednotlivých obsazených orbitalů neznáme? Na začátku si je nějakým způsobem odhadneme. Tyto orbitály pak použijeme k sestavení hamiltoniánů pro jednotlivé elektrony. Vyřešíme odpovídající rovnice a získáme novou sadu orbitalů, která je přesnější než náš původní odhad. A pak celý postup opakujeme s novými orbitály, pokračujeme do té doby, než dosáhneme toho, že dostaneme stejné orbitály, jaké jsme použili k vyrobení hamiltoniánu, tedy orbitály zkonvergují.

Proč výsledek této aproximace není přesný? Háček spočívá v tom, že elektrostatický potenciál od ostatních elektronů v Schrödingerově rovnici pro orbital je nezávislý na poloze tohoto elektronu. V reálném světě si jistě dokážeme představit, že podle toho, kde se elektron nachází, bude v důsledku odpuzování ostatní orbitály různě deformovat. To bohužel ale neumíme popsat, pokud řešíme rovnici pro jediný elektron.

Celková chyba této aproximace je asi 1% ve výsledné energii. Bohužel pro popis chemických dějů většinou potřebujeme přesnost výrazně vyšší. Proto se velká část vývoje metod na kvantově chemické výpočty zaměřuje právě na to, jak obejít tento nedostatek, aniž by se neúměrně zvýšila výpočetní náročnost. Proč ale vlastně jedno procento je tak velká chyba?

Musíme si uvědomit, že celková energie molekuly, kterou vypočítáme, je energie, kterou bychom potřebovali k „rozebrání“ na jednotlivé elektrony a jádra a na jejich odtahení do nekonečna. Tato energie je ve srovnání s energií chemických reakcí ohromná. V chemických reakcích totiž dochází jen k přeuspořádání orbitalů ve valenční vrstvě. Když tedy počítáme energii reakce, musíme spočítat celkovou energii produktů a od ní odečteme celkovou energii reaktantů. Pokud máte zkušenosti s tím, jak se při matematických úpravách pracuje s odchylkami, víte, že odchylka reakční energie bude ohromná. Dokonce může vyjít i vyšší než energie samotné reakce. Proto se snažíme, aby se nám chyba u energie reaktantů a produktů co nejlépe vykompenzovala – Musíme použít pro oba výpočty stejnou metodu i bázi.

A co s geometrií molekuly?

Jak jsme si již na začátku řekli, pozice jader jsou v celém výpočtu zafixované a musíme jejich souřadnice na začátku běhu programu zadat. Kde ale tyto souřadnice jader získáme? Sice je někdy můžeme získat z experimentu, pomocí rentgenové difrakce, ale ve většině případů je předem neznáme. Co s tím? Stačí nám vědět, jak chceme, aby molekula vypadala, a z toho určíme přibližnou geometrii. Pro tu spočítáme energii. Pak zkusíme jádru trochu pohnout nějakým směrem a sledujeme, jestli se nám energie sníží, nebo ne. Postupně takto umíme dojít až k takové geometrii, která má nejnižší energii. Výhodou je, že nemusíme tato posunutí jader hledat „naslepo“, ale přímo z vlnové funkce umíme spočítat gradient energie, tedy směr, ve kterém se nám energie snižuje nejrychleji.

Díky tomu umíme najít i struktury takových molekul a komplexů, které experimentálně pozorovat téměř nemůžeme, například krátce žijící meziproducty některých chemických reakcí.

A jak to vypadá v praxi?

Nyní si ukážeme, jak v praxi vypadají výpočty. My budeme používat program Psi4, který je volně dostupný. (<https://psicode.org/>) Zkusme si celý postup ukázat na molekule vody. Musíme si připravit vstupní soubor, kde tomuto programu popíšeme, co po něm vlastně chceme.

V první řadě je potřeba popsat molekulu. Na vstupu zadáme molekulu vody, to se udělá pomocí

```
molecule{
0 1
O      -1.818556   -0.320567    1.225399
H      -0.898992   -0.062457    1.771117
H      -2.278145   -1.054597    1.903623
}
```

Primárně by nás měla zajímat první řádka `0 1`. První číslo udává náboj molekuly. Číslo 0 tedy značí, že máme neutrální molekulu. V případě kationtu bychom měli kladné číslo, pro aniont bychom měli číslo záporné. Druhé číslo značí spinovou multiplicitu. To je trochu složitější koncept, který označuje celkový počet nespárovaných elektronů, tedy o kolik je víc elektronů se spinem nahoru než dolů. Z historických důvodů se označuje číslem o jedna vyšším, než je nespárovaných elektronů. Tedy pokud máme všechny elektrony spárovány, jedná se o singletní stav a značíme jej 1. Stav se dvěma nespárovanými elektrony je triplet (3). Radikály mohou mít i jeden nespárovaný elektron, pak máme dublet. Každopádně drtivá většina molekul jsou v základním stavu singlet, takže daná řádka je málokdy jiná než `0 1`. Notorickou výjimkou je molekula kyslíku O_2 , která je triplet. Dále následují souřadnice jader udané v angstromech.

Bázi udáme řádkem `set basis cc-pvdz`. Zkratka `cc-pvdz` označuje jednu z běžně používanýchází. Další možnosti se vzrůstající velikostí (tedy vzrůstající přesností i výpočetní náročností) jsou: `sto-3g`, `cc-pvdz`, `cc-pvtz`, `cc-pvqz`.

Ve chvíli, kdy máme toto zadefinované, už můžeme na závěr přidat řádek `optimize("HF")`, který spustí geometrickou optimalizaci. "HF" říká, že chceme optimalizovat právě Hartree-Fockovou metodou. Pokud bychom měli již správné souřadnice jader a chtěli bychom jen spočítat energii, vystačili bychom si s příkazem `energy("HF")`.

Když tedy dáme všechny tyto řádky dohromady, dostaneme celý vstup pro program:

```
set basis cc-pvdz
molecule {
0 1
  O      -1.818556   -0.320567   1.225399
  H      -0.898992   -0.062457   1.771117
  H      -2.278145   -1.054597   1.903623
}
optimize("HF")
```

kteřý můžeme uložit jako soubor pojmenovaný například `vstup.inp`. Výpočet můžeme spustit v příkazové řádce pomocí `psi4 vstup.inp`.

Po proběhnutí programu ve složce najdeme soubor `vstup.inp.dat`, případně `vstup.out` nebo podobný, který obsahuje veškeré informace z běhu programu. Pokud vše proběhlo v pořádku, na konci tohoto souboru najdeme výsledné optimalizované souřadnice jednotlivých atomů a výslednou energii celé molekuly. V tomto případě získáme na konci souboru:

```
...
==> Convergence Check <==
```

Measures of convergence in internal coordinates in au.

Criteria marked as inactive (o), active & met (*), and active & unmet ().

Step	Total Energy	Delta E	Max Force	RMS Force	Max Disp	RMS Disp
Convergence Criteria		1.00e-06 *	3.00e-04 *		1.20e-03 *	o
7	-76.02703278	-6.09e-06	3.51e-05 *	2.65e-05 o	1.79e-04 *	1.05e-04 o

Next Geometry in Ang
Fragment 1 (Ang)

```
O  0.0057046143  -0.0645290211  0.0000000000
H -0.7911519198  0.4458305979  0.0000000000
H  0.7006716423  0.5777071999  0.0000000000
```

Final optimized geometry and variables:

Molecular point group: cs

Full point group: Cs

Geometry (in Angstrom), charge = 0, multiplicity = 1:

```
O      0.005700842385  -0.064489709337  0.000000000000
H      -0.791211319490  0.445805409758  0.000000000000
H      0.700734813858  0.577693076293  0.000000000000
```

Psi4 stopped on: Wednesday, 04 January 2023 05:36PM

Psi4 wall time for execution: 0:00:01.40

*** Psi4 exiting successfully. Buy a developer a beer!

Z kolonky **Final energy** v tabulce, kde je uvedeno -76.02703278, zjistíme, že celková energie molekuly je -76,027 Ha. Jednotky Ha v tomto případě značí hartree a jeden hartree odpovídá 27,21 eV, tedy asi $2625,5 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ nebo $4,36 \cdot 10^{-18} \text{ J}$. Pokud bychom měli optimalizovanou geometrii a počítali jen energii, stačilo by nám hledat řádek **Total Energy** = -76.02703278. Těsně před koncem souboru je již výsledná optimalizovaná geometrie molekuly.

Pár poznámek na závěr

Jak samotné hledání správných orbitalů, tak geometrická optimalizace jsou iterativní procedury. Tím pádem se může stát, a docela často se i stává, že iterace nekonvergují, tedy i kdybychom program nechali běžet nekonečně dlouho, nezískáme správný výsledek. Proto je program nastavený, aby vyhodil chybu a skončil, pokud nedosáhne konvergence po určitém množství iterací. V takovém případě je třeba jej zkusit spustit znovu s odlišnou vstupní geometrií, případně i jiným nastavením programu, ale to již žádá zkušeného kvantového chemika.

Zároveň Hartree-Fockova metoda v původní formulaci předpokládá molekulu, která má všechny orbitály molekuly buď obsazené dvěma elektrony, nebo prázdné. To automaticky znamená, že molekula je v singletním stavu. Pokud bychom chtěli počítat jiný spin (například triplet u zmíněného kyslíku), musíme tento požadavek uvolnit pomocí řádku **set reference rohf**.

Při přípravě geometrie komplikovanějších molekul se často hodí používat grafické programy, kde si molekulu můžeme „nakreslit“. Dobrý je v tomto ohledu například program Avogadro.

A jak nainstalovat a použít Psi4 na Windows?

Instalační program na Windows si můžete stáhnout přímo z http://vergil.chemistry.gatech.edu/psicode-download/Psi4conda-1.7-py38-Windows-x86_64.exe. Při instalaci můžete zakliknout volbu „Add Psi4conda to my PATH environment variable“, pak je možné ke spuštění možné použít přímo Windows příkazovou řádku. V každém případě vám po instalaci v menu Start přibude program „Anaconda prompt“, který můžete použít úplně stejně. Pokud otevřeme Anaconda prompt, můžeme napsat „psi4“, abychom si ověřili, že všechno funguje. Program by se měl spustit a vynadat nám, že nemá vstupní soubor.

Dalším krokem je tedy vzít vstupní soubor (můžete použít například ten ze seriálu), a dát jej programu jako parametr. Pouze je třeba dát si pozor na to, v jaké složce jsme v rámci příkazové řádky a kde je uložený vstupní soubor. Buď je třeba dát za příkaz celou cestu k souboru (např: **psi4 Dokumenty\psi4\vstup.inp**, pokud si na vstupy vyrobíme složku psi4 v Dokumentech) Druhou z možností je použít příkaz **cd**, který nás přesunuje mezi složkami. (Tedy bychom použili příkaz **cd Dokumenty**, pak **cd psi4**, a nakonec spustili program pomocí **psi4 vstup.inp**) Pokud bychom se chtěli přesunout o složku výše, je na to příkaz **cd ..**. A příkazem **dir** vypíšeme obsah aktuální složky. Výsledkem běhu programu je v tomto případě soubor **vstup.inp.out**, který si můžeme otevřít pomocí poznámkového bloku.

Tímto končí díl seriálu, a příště na něj navážeme tím, že si ukážeme, co se stane, když jádrům dovolíme se přeci jen hýbat.



Pořadí řešitelů po III. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ
Student	MFF UK	6	6	5	7	10	9	13	10	66	100	110	198
1. <i>Damian Šatánek</i>	ZŠ a MŠ Telecí	6	4	4	4	10	13	-	10	51	80	80	144
2. <i>Kosma Šatánek</i>	ZŠ a MŠ Telecí	8	6	5	4	10	10	-	10	53	77	79	142
3. <i>Jiří Preč</i>	G J. A. Komenského, Uh. Brod	6	6	3	4	8	8	-	-	35	73	71	127
4. <i>Vojtěch Jan Schreib</i>	G Jírovcova, České Budějovice	4	6	3	2	4	6	-	13	38	73	65	117
5. <i>Adam Pustka</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	10	6	2	3	9	6	-	-	36	83	62	111
6. <i>Vojtěch Kubrycht</i>	G, Budějovická, Praha	8	6	4	3	10	-	-	13	44	86	57	102
7. <i>Ludmila Šírová</i>	Mensa G, Praha 6	6	6	3	2	8	5	-	-	30	62	55	99
8. <i>Míchal Stroff</i>	G, Budějovická, Praha	-	-	-	-	-	2	-	-	2	95	51	92
9. <i>Lukáš Franta</i>	G Christiana Dopplera, Praha	8	6	5	8	10	-	-	-	37	95	38	69
10. <i>Patrik Pöschl</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	6	6	5	3	-	-	-	-	20	72	35	63
11. <i>Anežka Skupínová</i>	G, Hodonín	10	4	-	-	2	-	-	-	16	72	33	60
12. <i>Md Faiyaz Siddiquee</i>	DPS STS School Dhaka	10	6	2	3	2	4	-	-	27	64	32	57
13. <i>Matej Karpáč</i>	ZŠ Jána Švermu	-	-	-	-	-	-	-	-	-	69	30	54
14.-15. <i>Gala Dědková</i>	G, Roudnice nad Labem	8	6	1	3	4	6	-	1	29	29	29	53
14.-15. <i>Ondřej Skála</i>	G Volgogradská 6a, Ost-rava	6	6	-	1	-	4	-	-	17	51	29	53
16. <i>Jakub Hlavenka</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	-	4	1	2	-	3	-	-	10	43	26	46
17. <i>Mikuláš Vlčan</i>	SPŠ, Třebíč	-	6	-	3	-	-	-	-	9	63	24	43
18. <i>Barbora Blínová</i>	Podkrušnohorské G, Most	2	4	-	2	0	-	-	-	8	35	21	37
19. <i>Dominik Kaňka</i>	Lepařovo G, Jičín	10	6	-	-	-	-	-	-	16	55	20	36
20. <i>Klaudía Lalová</i>	G L. Svobodu, Humenné	-	6	-	-	-	-	-	-	6	73	18	33
21. <i>Monika Nováková</i>	Reálné G a ZŠ, Prostějov	2	2	-	2	0	2	-	-	8	23	18	32
22. <i>Samuel Šandor</i>	G Poštová, Košice	8	6	5	-	-	-	-	-	19	107	17	31
23. <i>Tomáš Řehák</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	6	-	-	-	-	-	-	12	94	17	30
24. <i>Vojtěch Novosád</i>	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	-	-	-	-	-	-	-	-	-	84	15	27
25. <i>Ján Lakota</i>	G Grösslingová, Bratislava	10	6	2	-	-	-	-	-	18	104	14	26
26. <i>Nina Vážna</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	76	14	25
27. <i>Teo Višňovský</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	73	13	24
28. <i>Vojtěch Janáček</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	6	4	-	-	-	-	-	-	10	92	12	22
29. <i>Filip Krafčík</i>	G T. Vansovej, Stará Lubovňa	-	-	-	-	-	-	-	-	-	44	12	21
30. <i>Erik Ježek</i>	Smíchovská SPŠ Praha 5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	11	20
31.-32. <i>Roberto Franchin</i>	Liceo Sci. Augusto Righi, Roma	6	-	-	-	-	-	-	-	6	100	10	18
31.-32. <i>Vit Vycudilík</i>	Gymnázium Oty Pavla, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	36	10	18
33.-34. <i>Bára Kopačková</i>	G a SOŠ Podbořany	2	2	2	-	-	3	-	-	9	24	9	17

Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ
		6	6	5	7	10	9	13	10	66	100	110	198
1. <i>David Něnička</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	10	6	5	3	10	4	-	12	50	<i>84</i>	<i>77</i>	139
2. <i>Vladimír Slanina</i>	G Poštová, Košice	10	6	5	3	10	-	-	13	47	<i>100</i>	<i>74</i>	133
3. <i>Lukáš Hrdý</i>	G, Lesní čtvrt, Zlín	10	6	5	3	10	5	-	10	49	<i>70</i>	<i>65</i>	117
4. <i>Filip Čihlár</i>	G J. Š. Baara, Domažlice	10	6	5	4	2	5	-	12	44	<i>66</i>	<i>64</i>	115
5. <i>Zuzana Grycová</i>	G Botičská, Praha	6	4	2	4	4	2	-	10	32	<i>60</i>	<i>62</i>	111
6. <i>Pavla Šimová</i>	G, Šumperk	4	6	5	3	-	4	-	-	22	<i>75</i>	<i>61</i>	110
7. <i>Linda Tománková</i>	G, Boskovice	10	4	4	4	-	-	-	7	29	<i>68</i>	<i>60</i>	108
8. <i>Matouš Mišta</i>	G, Olomouc-Hejčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>85</i>	<i>58</i>	104
9. <i>Tomáš Otrubčák</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	8	6	3	5	5	9	-	-	36	<i>82</i>	<i>56</i>	100
10. <i>Lujza Lea Lavriková</i>	G, P. Horova, Michalovce	10	6	5	4	10	4	-	2	41	<i>67</i>	<i>55</i>	99
11.-12. <i>Anna Škrdletová</i>	G, Lovosice	2	6	2	3	0	4	-	6	23	<i>52</i>	<i>54</i>	97
11.-12. <i>Hana Žitňanská</i>	Slovanské G, Olomouc	4	2	1	2	3	9	-	10	31	<i>52</i>	<i>54</i>	97
13. <i>Jakub Buzalka</i>	G, Považská Bystrica	6	6	5	2	10	-	-	3	32	<i>65</i>	<i>53</i>	96
14. <i>Tomáš Kubříký</i>	G Poštová, Košice	6	6	5	2	-	-	-	-	19	<i>92</i>	<i>48</i>	86
15.-16. <i>Tomáš Bourek</i>	G J. Heyrovského, Praha	6	6	5	2	11	7	-	-	37	<i>81</i>	<i>44</i>	80
15.-16. <i>Martin Zuzek</i>	G Dobruška	8	6	1	-	9	5	-	-	29	<i>68</i>	<i>44</i>	80
17. <i>Ivan Žemlička</i>	G Ústavní, Praha	6	6	4	-	3	-	-	12	31	<i>85</i>	<i>44</i>	79
18. <i>Petr Brettschneider</i>	G, Dukelská, Bruntál	2	6	2	3	-	7	-	-	20	<i>52</i>	<i>43</i>	78
19.-21. <i>Sabina Mihulová</i>	G, Nad Alejí, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>63</i>	<i>38</i>	69
19.-21. <i>Daniel Švec</i>	G, Pelhřimov	10	6	2	1	-	5	-	-	24	<i>62</i>	<i>38</i>	69
19.-21. <i>Radim Švec</i>	G, Pelhřimov	8	6	2	2	-	-	-	-	18	<i>62</i>	<i>38</i>	69
22. <i>Jakub Radim Zbončák</i>	G, Křenová, Brno	10	6	4	-	-	-	-	-	20	<i>93</i>	<i>36</i>	65
23. <i>Matyáš Beran</i>	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	2	6	-	7	-	5	-	-	20	<i>58</i>	<i>33</i>	59
24. <i>Jakub Kubica</i>	G F. Hajdy, Ostrava	6	4	5	3	9	6	-	12	45	<i>66</i>	<i>32</i>	57
25. <i>Gabriela Kotúčová</i>	G PdC, Piešťany	6	6	-	-	-	-	-	12	24	<i>70</i>	<i>31</i>	55
26. <i>Soňa Vasilová</i>	G, Kukučínova, Poprad	6	6	5	-	-	-	-	-	17	<i>96</i>	<i>29</i>	53
27. <i>Lucia Kleščová</i>	G Poštová, Košice	6	6	-	-	-	-	-	-	12	<i>78</i>	<i>29</i>	52
28. <i>Zuzana Harbutová</i>	G L. Štúra, Zvolen	6	6	2	2	-	-	-	-	16	<i>62</i>	<i>28</i>	51
29. <i>Matěj Pěnička</i>	G, Nad Alejí, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>82</i>	<i>28</i>	50
30. <i>Petra Ivanišová</i>	G, Ohradní, Praha-Michle	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>40</i>	<i>24</i>	44
31.-32. <i>Martin Uhrin</i>	G Hubeného, Bratislava	2	6	-	-	-	-	-	-	8	<i>86</i>	<i>24</i>	43
31.-32. <i>Eva Žilková</i>	G Fr. Švantnera	2	6	1	2	-	-	-	-	11	<i>66</i>	<i>24</i>	43
33. <i>Tudor Popescu</i>	Inter. Computer HS, Bucharest,RO	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>95</i>	<i>23</i>	42
34. <i>Míchal Friml</i>	G Dobruška	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>77</i>	<i>23</i>	41
35. <i>Petr Toman</i>	G, Velké Meziříčí	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>83</i>	<i>22</i>	40
36.-37. <i>Adam Filip</i>	G, Česká Lípa	4	4	-	3	5	-	-	-	16	<i>60</i>	<i>22</i>	39
36.-37. <i>Mária Mederlyová</i>	G Grösslingová, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>91</i>	<i>22</i>	39
38.-40. <i>Jana Bartoňová</i>	G, Broumov	-	-	-	-	8	-	-	-	8	<i>88</i>	<i>19</i>	35
38.-40. <i>Tereza Kendrová</i>	Gymnázium Ladislava Novomeského	0	6	-	2	1	-	-	-	9	<i>45</i>	<i>19</i>	35
38.-40. <i>Pavel Kučera</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	6	4	1	6	-	-	-	-	17	<i>63</i>	<i>19</i>	35
41. <i>Jozef Smolár</i>	G Antona Bernoláka, SK	6	6	-	-	-	-	-	-	12	<i>72</i>	<i>19</i>	34
42. <i>Miroslav Pajger</i>	Bilingválne G, Sučany	6	-	-	-	-	-	-	-	6	<i>103</i>	<i>18</i>	33
43. <i>Petr Kozák</i>	G, Pisek	4	-	-	-	-	-	-	-	4	<i>43</i>	<i>18</i>	32

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ
		3	3	5	7	10	9	13	10	60	100	100	180
1. Jan Klír	G B. Hrabala	4	3	5	3	10	9	-	12	46	95	88	159
2. Radovan Lev	G F. Palackého, Val. Mez.	5	2	5	3	10	12	-	12	49	94	87	157
3. Patrik Hercz	G Poštová, Košice	5	3	5	4	10	8	-	14	49	97	85	153
4. Adam Harmanský	G Poštová, Košice	1	3	5	5	10	9	-	12	45	96	84	151
5.-6. Matej Kundřík	G Poštová, Košice	4	3	5	3	10	7	-	13	45	85	76	137
5.-6. Martin Mičuch	G Šrobárova, Košice	3	2	5	3	10	7	-	10	40	82	76	137
7. Jan Strnad	G, Postupická, Praha	4	3	5	3	10	6	-	12	43	79	73	132
8. Jiří Sýkora	G, Trhové Sviny	3	3	5	2	9	9	-	12	43	79	69	125
9. Jana Mária Žeňuchová	G, P. Horova, Michalovce	5	3	5	7	10	4	-	13	47	73	68	122
10. Monika Drezlerová	G, Rožnov pod Radhoštěm	3	3	5	5	9	5	-	11	41	69	64	116
11. Maroš Jankovič	G V. Nedožerského, SR	4	3	1	1	3	6	-	12	30	70	61	110
12. Michael Ruman	G V. P. Tótha, Martin	5	3	5	3	10	4	-	12	42	84	59	107
13. Lukáš Jarábek	G Grösslingová, Bratislava	1	3	2	3	3	7	-	13	32	63	59	106
14. Vladimíra Jiříčková	G J. Vrchlického, Klatovy	-	-	-	-	-	-	-	-	-	87	53	96
15. Veronika Plevná	G, Cheb	5	2	5	3	8	3	-	-	26	77	51	92
16. David Ševčík	G, Uherské Hradiště	2	3	5	3	3	6	-	13	35	64	50	90
17. Tadija Jelesijević	Gimnazija Kruševac	3	3	5	-	10	7	-	-	28	81	44	80
18. Veronika Bartáková	Slovanské G, Olomouc	3	2	2	-	-	-	-	-	7	84	38	68
19. Tomáš Vysoký	G Poštová, Košice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	65	37	67
20. Martin Marcínčák	G Šrobárova, Košice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	86	37	66
21. Filip Hošek	Masarykovo klasické G, Říčany	1	2	-	4	5	-	-	-	12	70	34	62
22. Daniel Čtvrtečka	G Christiana Dopplera, Praha	3	3	5	4	-	8	-	-	23	85	34	61
23. Kamila Cidlinská	G Botičská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	62	33	59
24. Jakub Savula	G Jírovцова, České Budějovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	97	32	58
25.-26. Lachyn Hydyrova	86th specialized school, TM	4	2	2	1	1	3	-	-	13	36	31	56
25.-26. Lukáš Lihart	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	4	3	-	-	-	-	-	-	7	63	31	56
27. Ondřej Kopeček	G, Lesní čtvrť, Zlín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	68	30	54
28. Cristina Mihaela Rău	CNI Tudor Vianu, Romania	3	3	2	-	3	3	-	10	24	55	28	51
29. Barbora Klusáková	BG B. Balbína, Hradec Králové	3	3	5	-	-	-	-	-	11	94	28	50
30. Richard Materna	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	3	2	3	-	4	-	-	14	61	26	47
31. Anežka Čechová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	3	2	-	-	4	-	-	11	58	26	46
32. Matej Bryja	G D. Tataruku, Poprad	2	3	-	-	-	-	-	-	5	63	25	45
33. Ondřej Kadlec	G, Moravský Krumlov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	84	23	42
34. Jan Šimáček	Gymnázium Brno-Bystrc	4	-	5	7	-	-	-	13	29	93	23	41
35. Terézia Hanáková	Gymnázium Janka Matušku Galanta	1	3	2	2	3	7	-	7	25	35	21	37
36. Martin Kubánek	G, Roudnice nad Labem	-	-	-	-	-	-	-	-	-	84	20	36
37. Klaudia Sýkorová	G Poštová, Košice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	61	17	31
38. Kateřina Šmídová	Gymnázium Brno-Bystrc	0	3	-	-	-	-	-	-	3	47	16	28
39. Jan Strmiska	Mensa G, Praha 6	1	3	-	3	-	5	-	-	12	65	14	26
40. Julie Křížková	Wichterlovo G, Ostrava	-	2	2	-	-	-	-	-	4	60	14	25
41. Tímotej Vida	G V. Nedožerského, SR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	73	13	24
42.-43. Šimon Kala	G, Roudnice nad Labem	-	-	-	-	-	-	-	-	-	70	13	23

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ
<i>Pilný</i>		3	3	5	7	10	9	13	10	60	100	100	180
1. <i>Martin Švanda</i>	Arcibiskupské G, Praha	3	3	5	4	3	12	-	13	43	89	82	148
2. <i>Jiří Vestfál</i>	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	5	3	5	4	9	-	-	14	40	96	74	134
3. <i>Jakub Hadač</i>	G V. Hlavatého, Louny	1	3	2	3	10	8	-	12	39	78	68	122
4. <i>Tereza Voltrová</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	3	3	2	3	2	11	-	10	34	71	66	119
5. <i>Tereza Hochmanová</i>	G Chotěboř	3	3	2	2	5	9	-	12	36	72	57	102
6. <i>Nikola Kadlecková</i>	G, nám. TGM, Zlín	5	3	5	3	11	7	-	12	46	72	56	100
7. <i>Lukáš Létal</i>	G J. Škody, Přerov	1	3	5	-	5	6	-	10	30	65	55	99
8. <i>Katarína Horská</i>	G Jana Keplera, Praha	1	3	-	3	-	5	-	13	25	73	53	95
9. <i>David Bálek</i>	G Legionářů, Příbram	3	3	2	7	10	-	-	-	25	97	51	91
10. <i>Daniela Karpíšková</i>	Masarykovo G, Plzeň	3	2	4	3	3	6	-	-	21	56	46	83
11. <i>Jakub Vyskočil</i>	G P. Bezruč, Frýdek- Místek	5	3	5	3	3	6	-	-	25	56	36	65
12. <i>Dzenan Midzic</i>	JU Gimnazija Bihać, BiH	-	3	5	-	-	-	-	-	8	89	34	62
13. <i>Vladimíra Brabcová</i>	SPŠ Ostrov n. Ohří	4	3	5	-	-	-	-	-	12	81	33	60
14.-15. <i>Pavel Horský</i>	G, Brno-Řečkovice	3	2	2	-	-	-	-	-	7	70	32	57
14.-15. <i>Jakub Ježek</i>	G B. Němcové, HK	-	2	-	-	-	-	-	-	-	95	32	57
16. <i>Jaromír Potůček</i>	G Jana Keplera, Praha	3	3	5	5	6	-	-	4	26	58	31	56
17.-18. <i>Radek Košinár</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	-	-	-	-	-	-	-	-	-	68	29	52
17.-18. <i>Rudolf Žižka</i>	G, Brno-Řečkovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	58	29	52
19.-21. <i>Jonáš Dej</i>	Wichterlovo G, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	15	15	110	26	46
19.-21. <i>Filip Liška</i>	1. súkromné G v Bratisla- ve	4	3	2	3	2	5	-	-	19	41	26	46
19.-21. <i>David Škrob</i>	SPŠ a VOŠT Brno	-	-	-	-	-	8	-	3	11	48	26	46
22.-23. <i>Jan Lepič</i>	G, Strakonice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	79	23	41
22.-23. <i>Juraj Pavolko</i>	G, P. Horova, Michalovce	3	1	2	2	-	-	-	8	16	57	23	41
24.-25. <i>Patrik Jendele</i>	SPŠ stavební Plzeň	1	3	2	-	-	-	-	-	6	83	22	39
24.-25. <i>Barbora Růžičková</i>	G, Moravská Třebová	-	-	-	-	-	-	-	-	-	80	22	39
26. <i>Adam Juttner</i>	G, Nový Jičín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	52	17	31
27. <i>Emília Zdravkovič</i>	Gimnazija Kruševac	3	2	5	2	1	-	-	-	13	50	16	28



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
18000 Praha 8

www: <https://fykos.cz>

e-mail: fykos@fykos.cz

/FYKOS @fykosak

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
 Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.