Úloha VI.P ... přívalový déšť

10 bodů; průměr 4,19; řešilo 27 studentů

Je dobré schovávat se před deštěm v lese? Vytvořte vhodný model popisující tuto problematiku. Uvažte například hustotu olistění a intenzitu a délku deště. Popište, za jak dlouho od začátku deště začnou kapky z listů dopadat na zem, za jak dlouho po skončení deště v lese přestane pršet a podobně.

Lucka běžela lesem a totálně zmokla.

Úvod

Začněme definicí veličin, které budeme při řešení používat. Déšť můžeme popsat jako objemový tok q kapek, z nichž každá má objem V_k. Zřejmě se pohybují terminální rychlostí, kterou lze spočítat z Newtonova zákona odporu.

Tento model je velmi zjednodušený, ve skutečnosti je situace mnohem složitější. Objemy kapek nejsou stejné, místo toho podléhají nějakému rozdělení (můžeme si tipnout, že normálnímu). Stejně tak rychlosti – ty navíc nemusí být kolmé k zemi a dále mohou být ovlivněny hustotou a vlhkostí atmosféry, směrem foukání větru a podobně. Vliv těchto jevů však (vzhledem k přesnosti výsledného odhadu) zanedbáme. Všechny výše definované veličiny samozřejmě závisí i na čase. Předpokládejme však, že déšť začne v čase 0 a následně bude konstantní až do času t, ve kterém najednou skončí.

Druhou částí modelu jsou stromy. Prozkoumáme jak jehličnaté, tak listnaté, přičemž se omezíme pouze na u nás běžně se vyskytující druhy. Pro jednoduchost se budeme zabývat oběma typy zvlášť, tj. nebudeme uvažovat smíšené lesy. Představíme si nekonečnou rovinu, která je rovnoměrně pokryta podobně velkými stromy stejného druhu. Jediným důležitým parametrem takového lesa je počet stromů na jednotku plochy, který označíme n_s. Další veličiny definujeme až později podle konkrétních stromů.

Homogenní les

Základním principem, z kterého vyjdeme, je zachovávání hmotnosti, v tomto případě vody. Veškerá voda, která na les dopadne, se buď absorbuje (vzduchem, listy a podobně), nebo spadne na zem (před tím se může ještě dočasně zachytit v prostředí).

Zpočátku uvažujme, že koruny všech stromů splývají a tvoří všude stejně vysokou vrstvu s rovnoměrnou hustotou listů. Tím vznikne jakási „kapacita“, která se bude postupně naplňovat vodou. Označíme-li průměrný počet listů jednoho stromu N_l, na jednotku plochy bude připadat $n_\mathrm{l} = N_\mathrm{l} n_\mathrm{s}$ listů. Každý z nich zvládne zadržet vodu o objemu $V_\mathrm{l} = \sigma S_\mathrm{l}$, kde σ je konstanta a S_l plocha listu. Všechny listy nejsou stejně velké, nás ale zajímá celková kapacita, takže můžeme počítat s průměrnou hodnotou S_l.

Hodnota σ bude dále záviset na materiálu povrchu listu (důležitá bude velikost tření mezi listem a vodou), povrchovém napětí vody, sklonu listu a dalších parametrech. Nicméně přesný výpočet by byl minimálně na samostatnou úlohu, proto se spokojíme s tím, že σ odhadneme (resp. změříme). Listy mají různé tvary, tedy pro každý druh stromu bude hodnota σ trochu jiná. Sklony jednotlivých listů typicky nejsou stejné, ale to není důležité, protože σ neplánujeme počítat.

Můžeme říci, že V_l je konstanta pro daný druh stromu a výraz σS_l způsobem, jak ji lépe odhadnout.

Všimněme si, že tato úvaha funguje i pro jehličnany. V tomto případě však bude množství zadržené vody úměrné délce listu l_l, ne jeho ploše. Nemusí to být úplně pravda (některé jehlice jsou zploštělé), jde to ale schovat do konstanty λ (která má stejný význam jako σ, jen jinou jednotku). Jedna jehlice tak zadrží objem $V_\mathrm{l} = \lambda l_\mathrm{l}$ vody.

Celkové množství vody na jednotku plochy, které dokáže homogenní vrstva listů zadržet, bude v prvním přiblížení $Q = n_\mathrm{l} V_\mathrm{l}$. Tato kapacita se zaplní za čas

$$\tau = \frac{Q}{q} = \frac{n_\mathrm{l} V_\mathrm{l}}{q}\,. \tag{1}$$

Pokud déšť začne v čase 0, první kapky dopadnou na zem v čase τ. Padat přestanou stejně, jako kdyby tu les nebyl, neboli v t. Předpokládáme, že déšť trvá dostatečně dlouho, tj. $\tau < t$. Pokud by tomu tak nebylo, na zem nezačne pršet nikdy.

Je jasné, že tento model má mnoho zřejmých nedostatků. Nyní se ještě pokusíme odhadnout neznámé konstanty, abychom měli alespoň představu o číselném výsledku, a problémy modelu budeme řešit až v další části.

Odhadněme nejdříve parametry deště. Typicky platí, že čím je intenzivnější, tím rychleji skončí. Trvalý déšť dosahuje hodnot v řádu nižších jednotek $\mathrm{mm{\cdot}h^{-1}}$, zatímco krátké, ale intezivní přeháňky mívají až desetkrát vyšší hodnoty. Extrémní situace typu přívalových dešťů uvažovat nebudeme.

Bohužel žádná oficiální stupnice neexistuje. Proto si zavedeme vlastní, a sice

$$\mathbf{q} = (2; 5; 20)\,\mathrm{mm{\cdot}h^{-1}} \doteq (5{,}6; 14; 56) \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Vektor jsme použili čistě pro zjednodušení zápisu.

Nejčastějším stromem je u nás s více než polovičním zastoupením[1] smrk, proto bude náš zástupce jehličnanů. Z listnatých stromů mají zastoupení nejvyšší buk a dub (okolo 7 %), jako zástupce zvolíme dub.

Pro odhad V_l^s jsme vzali několik smrkových větviček a zvážili je. Poté jsme je pořádně namočili do vody a zvážili znovu. Jejich hmotnost se změnila z 13 g na 22 g, takže rozdíl byl 9 g při celkovém počtu jehlic $\sim 1\,800$, což nám dává $V_\mathrm{l}^\mathrm{s} \sim 5{,}0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m^3}$. Uvědomme si však, že tento odhad je přinejlepším řádový.

Dále jsme vzali 15 listů dubu a opakovali jsme stejný postup. Rozdíl hmotností byl 14 g (z 9 g na 23 g), takže máme $V_\mathrm{l}^\mathrm{d} \sim 9{,}3 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m^3}$. Z těchto listů jsme vybrali ten se střední velikostí a změřili jsme jeho plochu. Dostali jsme $S_\mathrm{l}^\mathrm{d} \doteq 52\,\mathrm{cm^2} = 5{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^2}$, platí tedy $\sigma^\mathrm{d} = V_\mathrm{l}^\mathrm{d}/S_\mathrm{l}^d \sim 1{,}7 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$.

Je možné, že jsme zvolili ne úplně průměrné listy, a proto bude lepší[2] počítat přímo s veličinou σ^d místo V_l^d. U smrku takový problém nehrozí (jehlice se zdály být všechny stejně velké), u něj si vystačíme s V_l^s.

Pro měření plochy listů se používá veličina LAI,[3] která udává celkovou plochu listů na plochu země. U dubu se běžně pohybuje mezi 2,5 a 4, použijeme hodnotu 3. Opět, toto je jen velmi

[1] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Les`

[2] Správně bychom vůbec neměli používat výrazy typu $V_\mathrm{l}^\mathrm{d} \sim \ldots$ a $S_\mathrm{l}^\mathrm{d} \sim \ldots$, protože neplatí obecně, ale jen pro naši konkrétní skupinu listů. Nicméně jejich podíl, σ^d, by už měl být obecný a (v rámci dostatečně velké nejistoty) platný pro všechny duby.

[3] Zkratka znamená Leaf Area Index, česky index listové plochy.

přibližný odhad, protože skutečná hodnota závisí na ohromném množství faktorů. Pro představu uvádíme článek,[4] ze kterého jsme čerpali my.

Můžeme spočítat hodnotu $Q^{\mathrm{d}} = n_{\mathrm{l}}^{\mathrm{d}} V_{\mathrm{l}}^{\mathrm{d}} = n_{\mathrm{l}}^{\mathrm{d}} S_{\mathrm{l}}^{\mathrm{d}} \sigma^{\mathrm{d}} \sim 5{,}4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. Využili jsme toho, že LAI má význam $n_{\mathrm{l}} S_{\mathrm{l}}$. Nyní nezbývá než dosadit do (1). Pro dub dostaneme

$$\mathbf{t}_1^{\mathrm{d}} = \frac{n_{\mathrm{l}}^{\mathrm{d}} V_{\mathrm{l}}^{\mathrm{d}}}{\mathbf{q}} = \frac{n_{\mathrm{l}}^{\mathrm{d}} V_{\mathrm{l}}^{\mathrm{d}}}{\mathbf{q}} = (960; 390; 96)\,\mathrm{s}\,.$$

To znamená, že při velmi mírném dešti dopadnou první kapky na zem po čtvrt hodině a pořádný slejvák pocítíme už za necelé dvě minuty.

Hodnoty LAI u smrku jsou v průměru vyšší,[5] např. kolem 7. Bohužel, v tomto případě nám tato veličina nepřijde úplně jasně definovaná, protože jehlice jsou v zásadě jednodimenzionální.

Pro přesnější odhad vyjdeme ze skutečnosti, že lesy okolo Plešného jezera mají 7,3 t jehlic na hektar.[6] Výše jsme ukázali, že 1 800 jehlic váží 13 g a zachytí 9 g vody. Pomocí jednoduché trojčlenky dostaneme $Q^{\mathrm{s}} \sim 5{,}0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$ a $n_{\mathrm{l}}^{s} \sim 10^5\,\mathrm{m}^{-2}$. Dosazením do (1) získáme

$$\mathbf{t}_1^{\mathrm{s}} = (900; 360; 90)\,\mathrm{s}\,,$$

což je vzhledem ke všem nepřesnostem, kterých jsme se při výpočtech dopustili, v podstatě stejně jako u dubu.

Homogenní les podrobněji

Nyní se zaměříme na některá zanedbání předchozího modelu. Jako první spočítejme, kolik vody se může vypařit. Pokud teplotu při dešti odhadneme na 20 °C, maximální hmotnost vody ve vzduchu bude[7] $17{,}3\,\mathrm{g{\cdot}m^{-3}}$. Jednoduchým převodem jednotek zjistíme, že v takovém případě bude $1{,}7 \cdot 10^{-5}$ objemu prostoru zabírat voda.

To není vůbec málo – pokud bychom předpokládali vrstvu zcela nasyceného vzduchu o výšce několika desítek metrů, blížíme se k vrstvě vody o výšce 1 mm, což odpovídá půl hodině nejslabšího deště. Nicméně v lesích je zpravidla velká vlhkost vzduchu, takže i když by se během deště zvýšila na maximální hodnotu, spotřebuje se tím jen malá část z tohoto množství vody.

Dále se zamysleme nad vypařováním. Pravděpodobně nebude mít žádný vliv to, za jak dlouho dopadnou první kapky na zem. Může krátkodobě snížit intenzitu deště, ale to je tak všechno.

Absorbce vody listy je v tomto smyslu podobná – i kdyby měla měřitelný efekt, bude probíhat velmi pomalu, takže se projeví maximálně na intenzitě. Míra této absorbce se pro různé druhy rostlin výrazně liší, každopádně lze předpokládat, že pro stromy, o které se zajímáme, bude prakticky zanedbatelná.

[4] `https://www.biorxiv.org/content/10.1101/2021.08.05.454476v3.full`
[5] `https://www.agriculturejournals.cz/web/jfs.htm?type=article&id=112_2018-JFS`
[6] `https://www.infodatasys.cz/public/Biologia_61_s523.pdf`
[7] `https://www.engineeringtoolbox.com/maximum-moisture-content-air-d_1403.html`

Model kapacity listů má zásadní nedostatek v tom, že vodní kapky se při dopadu na listy či jehlice odrazí či rozprsknou do všech stran. Důsledkem toho je, že některé dopadnou na zem už na začátku deště. Můžeme však říci, že se zajímáme o to, za jak dlouho bude intenzita deště v lese srovnatelná s původní intenzitou. Velká většina odražených či rozprsknutých kapek se zachytí na nějakém jiném listu či jehlici a dál vše pokračuje podle původních předpokladů.

Ještě jsme neodpověděli na to, za jak dlouho po skončení deště přestanou padat kapky z listů na zem. Podle odvozeného modelu by mělo platit, že k tomu dojde prakticky okamžitě. Nicméně ve skutečnosti tomu tak určitě nebude. Jednak proto, že reálný déšť neskončí najednou, ale spíš postupně slábne. Za druhé, listy s vodou jsou velmi nestabilní a i lehký poryv větru stačí k narušení rovnováhy a pádu dalších několika kapek.

Déšť v lese tedy bude ustávat zhruba stejně, jako déšť mimo les. Rozdíl bude v tom, že v lese se i po relativně dlouhé době bude moci stát, že se najednou zvedne vítr a shodí několik kapek. Pokud bychom si měli tipnout, intenzita deště bude klesat exponenciálně, stejně jako intenzita náhlých pádů zbytků vody, které se ještě drží na listech. Vzhledem k povaze jevu a množství proměnných, na kterých závisí, se bohužel nedá odhadnout konkrétní časový rámec.

Lokálně heterogenní les

Dosud jsme uvažovali, že koruny stromů splývají v jednu homogenní vrstvu. Ve skutečnosti tomu tak ale není – podíváme-li se nahoru, na některých místech spatříme mnoho listů nad sebou, zatímco na jiných bude prosvítat obloha. Pojďme to napravit a počítat s náhodným rozložením listů v prostoru.

Proč náhodným? Protože je to nejlepší možnost, jíž lze rozumně spočítat. Stromy a rostliny obecně se až podivuhodně přesně řídí jednoduchými matematickými pravidly. Například, u mnoha rostlin si můžeme všimnout, že jejich listy vyrůstají ze stonku podle Fibonacciho čísel. Větve jehličnanů jsou už na první pohled velmi pravidelné. Nejvíce náhodně vypadají listnaté stromy, ale i u nich je možné vysledovat některé základní vzory.

Bohužel k tomu, abychom s tím mohli počítat, bychom nejdříve potřebovali tato pravidla přesně matematicky popsat, což nemá být obsahem této úlohy. Náhoda je druhá nejlepší možnost. Především u listnatých stromů nebudeme s tímto přístupem moc daleko od skutečnosti.

Představme si úsek koruny s vodorovnou plochou S. Podle značení výše v ní bude $n_S = n_\mathrm{l} S$ listů. Dále uvažujme, že úsek rozdělíme podle svislé osy na vrstvy, tj. tělesa s podstavou S a nějakou (malou a pro všechny vrstvy stejnou) výškou. Očíslujeme je od nejvrchnější (s indexem 1) po nejspodnější (s indexem h).

V každé vrstvě by mělo být přibližně stejně listů, konkrétně $n_\mathrm{v} = n_S/h$. To znamená, že v každé vrstvě bude plocha o velikosti[8] $S_\mathrm{p} = n_\mathrm{v} S'_\mathrm{l}$ zcela pokryta listy, zatímco plocha $S - S_\mathrm{p}$ bude kompletně prázdná. My chceme zjistit, co vznikne překrytím mnoha vrstev.

V některých částech S nebude ani jeden list. Celkovou plochu všech těchto částí dohromady označíme S_0. V jiných bude jeden, v dalších dva nad sebou a tak dále. Jim odpovídající plochy potom označíme S_1, S_2 apod.

[8] Veličina S'_l není plocha listu (to by byla S_l). Místo toho jde o průmět plochy S_l do vodorovné roviny. Zřejmě platí $S'_\mathrm{l} = \alpha S_\mathrm{l}$, kde $\alpha < 1$ je nějaká konstanta průměrující sklon všech listů.

Z této definice je vidět, že součet všech dílčích ploch se rovná původní ploše S, neboli

$$\sum_{i=0}^{h} S_i = S\,,$$

kde předpokládáme, že nad sebou může být maximálně tolik listů, kolik vrstev uvažujeme (spoiler – nakonec to zobecníme pro $h \to \infty$). Pro lepší popis situace definujeme funkci

$$f(i) = \frac{S_i}{S}\,,$$

která vyjadřuje, jaký podíl z S má nad sebou právě i listů. Z předchozích dvou rovnic vyplývá

$$\sum_{i=0}^{h} f(i) = \frac{1}{S}\sum_{i=0}^{h} S_i = 1\,,$$

takže $f(i)$ má i jiný význam – vyjadřuje pravděpodnost, že přesně nad námi je právě i listů. My však půjdeme ještě dál a tento fakt označíme za definici funkce f. Díky tomu můžeme použít pravidla pro skládání pravděpodobností. Nyní označme k jako část plochy S, která by byla zakryta listem, pokud bychom započítali pouze první vrstvu, neboli $k = S_\mathrm{p}/S$. Pro každou vrstvu potom platí, že s pravděpodobností k je v ní v bodě nad námi list (a s pravděpodobností $1-k$ je v ní ten stejný bod prázdný). Pro všechny vrstvy najednou to bude

$$f(i) = \binom{h}{i} k^i \left(1-k\right)^{h-i}\,.$$

Na tomto výrazu není nic překvapivého, jedná se o klasické binomické rozdělení. Všimněme si, že takto definovaná funkce f splňuje

$$\sum_{i=0}^{h} f(i) = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} k^i \left(1-k\right)^{h-i} = \left(k + (1-k)\right)^h = 1\,.$$

To už by samo o sobě mohlo stačit, ale není to úplně fyzikální výsledek. Navíc, jak uvidíme dále, budeme potřebovat sečíst hodnoty f pro více různých i, což teď nedokážeme. Pojďme proto zkusit najít nějaké lepší vyjádření.

Vyjdeme ze Stirlingovy aproximace faktoriálu

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\,,$$

kterou dosadíme do vzorce pro binomický koeficient

$$\binom{h}{i} = \frac{h!}{i!\,(h-i)!} \approx \frac{\sqrt{2\pi h}\left(\frac{h}{\mathrm{e}}\right)^h}{\sqrt{2\pi i}\left(\frac{i}{\mathrm{e}}\right)^i \cdot \sqrt{2\pi\,(h-i)}\left(\frac{h-i}{\mathrm{e}}\right)^{h-i}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{h^h}{i^i\,(h-i)^{h-i}}\sqrt{\frac{h}{i\,(h-i)}}\,.$$

Nyní provedeme limitu $h \to \infty$, čímž pošleme tlouštky jednotlivých vrstev k nule. Listy se přeci mohou nacházet v libovolných výškách, ne jen v nějakých diskrétních vrstvách. Teoreticky by mohlo dávat smysl omezit minimální tloušťku vrstvy na tloušťku listu, aby se nemohlo stát, že se listy překryjí. Nicméně, jak uvidíme dále, v podstatě na tom nezáleží, protože použité aproximace budou přibližně platné už pro $h \gg K$.

Veličinu K můžeme chápat jako k, které nezávisí na počtu vrstev. Pro k totiž platí

$$k = \frac{S_\mathrm{p}}{S} = \frac{n_\mathrm{v} S'_\mathrm{l}}{S} = \frac{n_S S'_\mathrm{l}}{hS} = \frac{n_\mathrm{l} S S'_\mathrm{l}}{hS} = \frac{n_\mathrm{l} S'_\mathrm{l}}{h}\,,$$

takže s $h \to \infty$ půjde k k nule. Definujme proto $K = kh = n_\mathrm{l} S'_\mathrm{l}$. Potom můžeme hodnotu K chápat jako „průměrný počet listů nacházejících se nad plochou, kterou zabírá jeden list“. Pokud se nad tímto tvrzením trochu zamyslíme, zjistíme, že K vlastně neříká nic jiného, než kolik listů průměrně uvidíme, podíváme-li se přímo nad sebe.[9] K je vlastně jen hodnota LAI vynásobená parametrem sklonu listů α.

Vraťme se ale k limitě $h \to \infty$. Nejdříve upravíme výraz pro f výše odvozenou aproximací binomického koeficientu a dosazením za k

$$\begin{aligned} f(i) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{h^h}{i^i (h-i)^{h-i}} \sqrt{\frac{h}{i(h-i)}} \left(\frac{K}{h}\right)^i \left(1 - \frac{K}{h}\right)^{h-i} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{h^{h-i}}{i^i (h-i)^{h-i}} \sqrt{\frac{h}{i(h-i)}} K^i \left(1 - \frac{K}{h}\right)^{h-i} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \sqrt{\frac{h}{h-i}} \left(\frac{K}{i}\right)^i \left(\frac{1-\frac{K}{h}}{1-\frac{i}{h}}\right)^{h-i}. \end{aligned}$$

Pro $h \gg i$ bude druhá odmocnina rovna jedné. Poslední člen je trochu trikový

$$\lim_{h\to\infty} \left(\frac{1-\frac{K}{h}}{1-\frac{i}{h}}\right)^{h-i} = \lim_{h\to\infty} \frac{\left(1-\frac{K}{h}\right)^h}{\left(1-\frac{i}{h}\right)^h} \frac{\left(1-\frac{i}{h}\right)^i}{\left(1-\frac{K}{h}\right)^i} = \lim_{h\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-K}}{\mathrm{e}^{-i}} \frac{1-\frac{i^2}{h}}{1-\frac{Ki}{h}} = \mathrm{e}^{i-K}\,.$$

Přitom jsme využili následujících dvou limit

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a\,, \quad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^b = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{ab}{x} = 1\,.$$

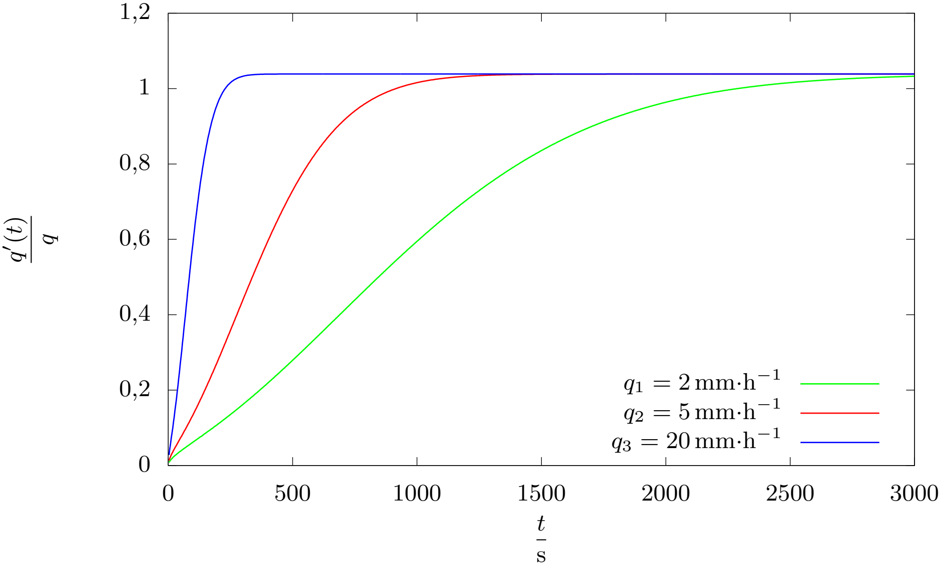
Celkově máme

$$f(i) \approx \frac{1}{\mathrm{e}^K \sqrt{2\pi i}} \left(\frac{\mathrm{e}K}{i}\right)^i\,.$$

Fyzikální význam tohoto výsledku je jasný – můžeme spočítat, jaká část kapacity koruny bude v určitém čase zaplněna. Uvažujme plochu S_j definovanou tak, že v každém jejím bodě je nad sebou právě j listů. To znamená, že v dané ploše se nachází $n_{S_j} = jS_j/S'_\mathrm{l}$ listů. Kapacita těchto listů se zaplní za čas

$$t_j = \frac{n_{S_j} V_\mathrm{l}}{q S_j} = \frac{j V_\mathrm{l}}{q S'_\mathrm{l}}\,.$$

[9] Přesněji řečeno kolik listů průměrně protne každá svislá přímka.



Obr. 1: Poměr intenzity deště v dubovém lese ku počáteční intenzitě deště v závislosti na čase. Poměr samotný závisí na počáteční intenzitě podle funkce (2).

V čase t_j budou zaplněny všechny plochy S_i pro $i \leq j$, takže jimi bude moci protékat déšť v původní intenzitě q. Ostatní plochy, tj. ty s $i > j$, se ještě budou zaplňovat a žádná voda jimi protékat nebude. Celkovou intenzitu deště, který projde korunou a dopadne na zem, tak můžeme v čase t_j vyjádřit jako

$$q'(t_j) = \sum_{i=0}^{j} \frac{qS_i}{S}\,,$$

kde velikost plochy S_i je právě $S_i = f(i)\,S$. Obecný výpočet sumy ale není tak snadný, navíc bychom se museli potýkat s tím, že t_j je definován pouze pro diskrétní hodnoty j, takže by se intenzita skokově měnila. Přejděme tedy ke spojitému času a sumu aproximujme integrálem

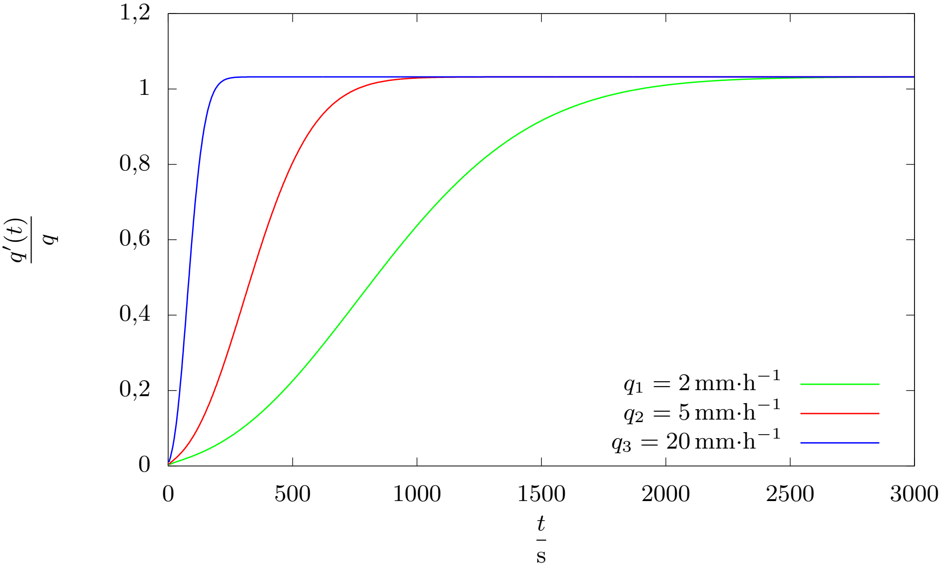
$$q'(t) \approx q \int_0^{t\eta} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{q}{\mathrm{e}^K\sqrt{2\pi}} \int_0^{t\eta} \left(\frac{\mathrm{e}K}{x}\right)^x x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\,, \tag{2}$$

kde jsme pro zjednodušení definovali konstantu $\eta = qS'_\mathrm{l}/V_\mathrm{l}$. Tento integrál nemá analytické řešení, to však nevadí, můžeme jej spočítat numericky. Pro dub odhadněme $\alpha^\mathrm{d} \sim 0{,}7$, potom z výše uvedené hodnoty $\mathrm{LAI}^\mathrm{d} = 3$ vyplývá $K^\mathrm{d} \sim 2{,}1$. Dále spočtěme hodnoty η pro různé intenzity deště

$$\eta = \frac{qS'_\mathrm{l}}{V_\mathrm{l}} = \frac{qK}{n_\mathrm{l}V_\mathrm{l}} = \frac{qK}{Q} = \frac{K}{\tau}\,,$$

$$\boldsymbol{\eta}^\mathrm{d} = \frac{K^\mathrm{d}}{\boldsymbol{\tau}^\mathrm{d}} \sim (2{,}2; 5{,}4; 22)\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Do grafu 1 jsme vynesli poměr q'/q v závislosti na čase pro dub pro všechny tři uvažované hodnoty q. Vidíme, že při velmi mírném dešti bude plné intenzity dosaženo až po přibližně hodině a půl, zatímco v případě silného deště již po necelých deseti minutách.



Obr. 2: Poměr intenzity deště ve smrkovém lese ku počáteční intenzitě deště v závislosti na čase. Poměr samotný závisí na počáteční intenzitě podle funkce (2).

Podíl intenzit se asymptoticky blíží hodnotě o něco málo větší než 1. To je samozřejmě špatně, ve skutečnosti by se měl blížit právě jedničce. Problém je v tom, že vzorec pro integrál je pouze aproximací přesné sumy. To by se dalo řešit normalizací q'. Znamenalo by to numericky spočítat její hodnotu v nekonečnu a celou funkci jí vydělit.

Odhad pro smrk bude opět trochu složitější. Výše jsme zmínili, že LAI bude vyšší než u dubu, realistická hodnota je kolem 7. Sklon jehlic bude pravděpodobně větší než u listů, jelikož na rozdíl od nich směřují všemi směry. Zvolme $\alpha^{\mathrm{s}} \sim 0{,}5$, potom máme $K^{\mathrm{s}} \sim 3{,}5$.

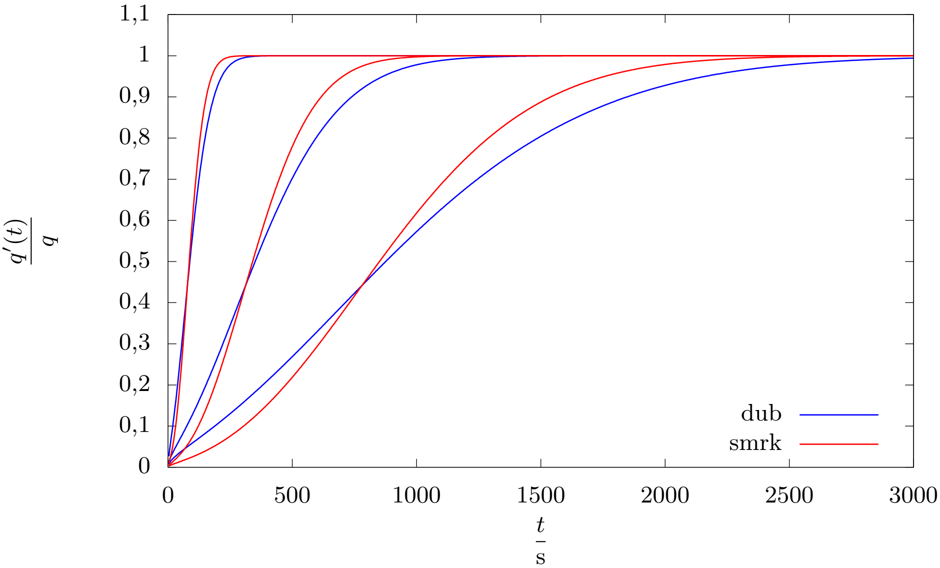
Dále upravíme vzorec pro η tak, že do něj dosadíme z definice $K = n_1 S_1'$, a dostaneme

$$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{s}} = \frac{K^{\mathrm{s}}}{\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{s}}} \sim (3{,}9; 9{,}7; 39) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Výsledky numerického integrálu jsme vynesli do grafu 2. Můžeme si všimnout, že vypadá v podstatě stejně jako graf pro dub. Pro lepší porovnání jsme vytvořili ještě graf 3, kde jsme vykreslili závislosti pro oba druhy stromů. Rovnou jsme je také nanormovali, aby byly lépe porovnatelné.

Funkce $q'/q(t)$ závisí na parametrech K a τ. Druhý jmenovaný vlastně jen lineárně škáluje čas. Lze očekávat, že při dvakrát větším τ se ke stejné intenzitě dostaneme za dvakrát delší dobu.

Parametr K popisuje strmost rozdělení – při velkém K bude na většině plochy (relativně) stejně tlustá vrstva listů. Potom bude chvíli trvat, než se tato kapacita zaplní, ale až k tomu dojde, intenzita se začne prudce zvyšovat. Limitně velká hodnota K by vedla k téměř uniformnímu rozdělení počtu listů. Naopak pro malé K nastanou velké rozdíly mezi jednotlivými oblastmi – nástup intezity bude rychlejší, ale bude trvat déle, než se zaplní nejvíce extrémní oblasti. Podrobněji to můžeme vidět v grafu 4.



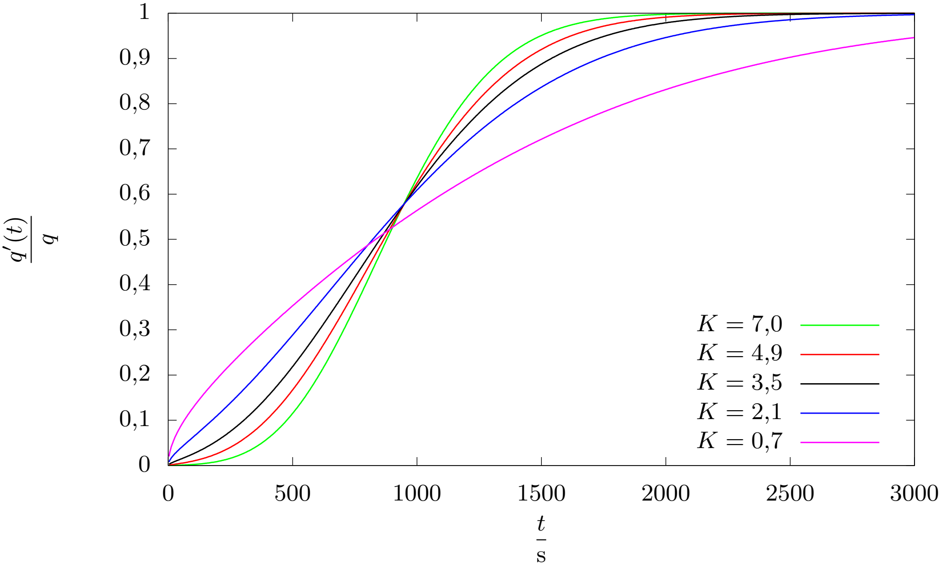
Obr. 3: Hodnoty z grafů 1 a 2, které byly nanormovány a zobrazeny přes sebe.

Výsledkem této kapitoly je, že v některých místech lesa začne pršet prakticky už na začátku deště, zatímco v jiných až později. Průměrnou intenzitu deště v lese v čase t pak vyjadřuje funkce $q'(t)$. Trochu nepříjemný je fakt, že $q'(t)$ dříve či později dosáhne původní hodnoty q, a to v libovolně hustém lese. Tento problém se pokusíme vyřešit v dalších kapitolách.

Heterogenní les

V předchozí části jsme při odvozování funkce q' vyšli z předpokladu, že hustota listů je sice náhodná, ale v celém lese se řídí tím stejným rozdělením. Ve skutečnosti tomu tak není – hustota listů typicky klesá s rostoucí vzdáleností od středů stromů.

Řešení tohoto problému je principiálně jednoduché. Na některých místech hustotu zvýšíme, na jiných ji zase stejným způsobem snížíme. To provedeme tak, že jak K, tak Q vynásobíme nějakým koeficientem, např. ρ. Tím pádem K přejde na ρK a Q resp. τ na ρQ resp. $\rho\tau$. Všimeme si, že $\eta = K/\tau$ zůstane konstantní.



Obr. 4: Poměr intenzity deště ve smrkovém lese ku počáteční intenzitě deště v závislosti na čase pro různé hodnoty parametru K při intenzitě $q_1 = 2\,\mathrm{mm{\cdot}h^{-1}}$.

V grafu 5 jsme zobrazili poměr intenzit pro různé hodnoty ρ při fixních hodnotách ostatních parametrů. Je vidět, že průběh je vždy stejný, pro vyšší hodnoty ρ jen vše trvá delší dobu.

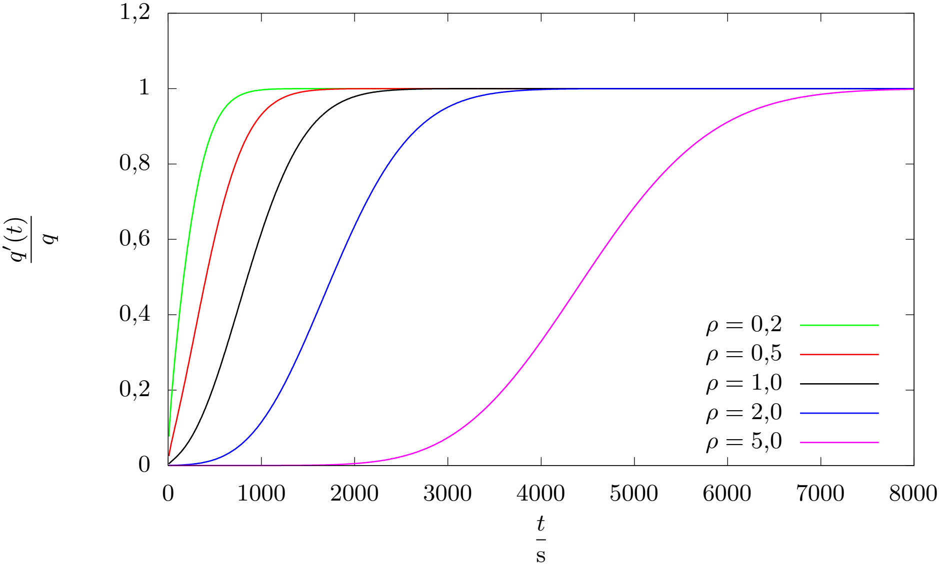
Zajímavé je, že pro ρ můžeme vidět, že intenzita se viditelně změní až za přibližně půl hodiny od začátku deště. To je způsobeno tím, že listů je již tolik, že na každém místě jich je více než nějaký minimální počet. Přesněji řečeno, místa s menším než tímto počtem jsou statisticky velmi nepravděpodobná. Tato základní vrstva způsobí, že všude, kde je takto vysoká vrstva ρ, bude alespoň první půl hodinu sucho.

V oblastech s vysoce podprůměrným počtem listů bude situace přesně opačná – intenzita deště tam bude už od začátku nenulová, navíc bude velmi rychle stoupat. Nicméně v tomto případě není jasné, zda je zvolený model dostatečně přesný. Vzhledem k tomu, že jsme jej odvodili pomocí pravděpodobností s celkem netriviálními předpoklady o rozumném rozložení listů, je možné, že pro takto malé hustoty již nebude fungovat.

Rozložení hodnot parametru ρ v prostoru bude samozřejmě náhodné. Můžeme se ale pokusit najít závislost ρ na podílu plochy s danou hodnotou ρ ku celkové ploše lesa. Přesný výpočet nedává příliš smysl, proto se pokusíme jen o kvalitativní odhad.

Pro smrk očekáváme relativně málo izolovaných míst s velmi velkými hodnotami ρ (středy stromů), obklopených velkými plochami s průměrnými až lehce podprůměrnými hodnotami. Směrem od středů stromů bude ρ klesat, bohužel nedokážeme odhadnout jak přesně. Někde se také mohou objevit oblasti s prakticky nulovým ρ, ty jsou ale spíše výjimečné.

U dubu a listnatých stromů obecně naopak očekáváme daleko menší rozdíly. Tyto stromy nemají tak pravidelnou strukturu jako smrky, lze tedy předpokládat, že hodnoty ρ nebudou



Obr. 5: Poměr intenzity deště ve smrkovém lese ku počáteční intenzitě deště v závislosti na čase pro různé hodnoty parametru ρ při intenzitě $q_1 = 2\,\mathrm{mm{\cdot}h^{-1}}$. Na rozdíl od předchozích grafů jsou zde ve funkci q' hodnoty K a Q nahrazeny za ρK a ρQ. Pro $\rho = 1{,}0$ platí $K = 3{,}5$ a $Q = Q^{\mathrm{s}} = 5{,}0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$.

výrazně kolísat.

Reálný les

V předchozí kapitole jsme dále zpřesnili model, čímž jsme na některých místech výrazně prodloužili dobu, po kterou si můžeme užívat sucha. Ještě ale zbývá vyřešit jeden zásadní problém – voda (někdy) teče horizontálně.

Dosud jsme počítali s tím, že tam, kde se kapky deště poprvé dotknou listů, také spadnou. Někde to bude hned, jinde až později, ale jednou k tomu přeci jen dojde. Kapka ale samozřejmě nikdy nemůže spadnout z listu tam, kde na něj původně dopadla. Místo toho steče k okraji a až odtud pokračuje dál. Nicméně předpokládali jsme, že v průměru zůstává na přibližně (plus minus jeden list) stále stejném místě v průmětu do vodorovné roviny.

V úvahu připadají dva efekty způsobující horizontální proudění vody. Zaprvé, listy nemusí být uspořádány úplně náhodně. Jak již bylo zmíněno, smrky mají jasně viditelnou pravidelnou strukturu. U listnatých stromů by zase stačilo, kdyby se většina listů skláněla směrem od kmenu. Vliv takového uspořádání se odhaduje jen velmi těžko. V krajním případě (například kdyby všechny listy mířily od středu stromu) by na zem pod stromem teoreticky nedopadla ani jedna kapka, takže by někde pršelo hodně a jinde zase vůbec.

Druhý jev funguje i pro zcela náhodně směřující listy, vychází totiž z nerovnoměrné distribuce listů. Uvažujme dvě oblasti, jednu s velmi vysokým ρ, druhou s výrazně nižším. Dále předpokládejme, že oblasti spolu těsně sousedí a ρ se tak mění prakticky skokově. Každý list na rozhraní pošle veškerou vodu buď do své oblasti, nebo do té vedlejší. Celkové množství vody v oblasti, ze které list pochází, se v prvním případě zachová, ve druhém však klesne. Každý list na rozhraní je příležitostí, jak se z oblasti může dostat voda. Více listů v oblasti znamená více listů na rozhraní, tedy i větší pravděpodobnost odtoku vody.

Výsledkem bude nenulový horizontální tok vody ve směru záporného gradientu ρ. Jelikož ρ téměř vždy klesá s rostoucí vzdáleností od středu stromu, voda poteče tímto směrem. Přesný výpočet není nemožný, nicméně je mimo rámec této úlohy, jejíž vzorové řešení je už tak minimálně dvakrát delší, než by mělo být.

Dodejme ještě, že vliv obou jevů bude výrazně záviset na hustotě lesa. Ve velmi řídkém lese budou mezi stromy velké prostory neboli oblasti s nulovým ρ. Stromy navíc budou mít listy i na stranách, což povede ke specifickému uspořádání, které bude dále směřovat vodu pryč ze středu stromů. Naopak v hustém lese budou koruny jednotlivých stromů splývat, což vytvoří téměř homogenní vrstvu, kterou jsme definovali v druhé kapitole. Celkový vliv obou efektů tu bude výrazně slabší.

Pro schovávání se před deštěm se tak mnohem více hodí diskrétní stromy než spojitý les.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`