Úloha V.E ... už to fičí

13 bodů; (chybí statistiky)

Změřte moment setrvačnosti válce (vůči jeho hlavní ose) a koule (vůči ose procházející jejím středem) tím, že je budete pouštět z nakloněné roviny.

Karel si říkal, že by účastníci mohli koulet.

Teória

Pri pohybe telesa v tiažovom poli prebieha premena potenciálovej tiažovej energie na iné formy energie. V našom prípade budeme sledovať dynamiku telies. Všetky telesá charakterizuje tzv. moment zotrvačnosti I, teda charakteristika rotácie telesa voči určitej ose. Pri pohybe valca, resp. gule po naklonenej rovine pri nenulových rozmeroch a hmotnosti bude prítomná kinetická a rotačná energia telesa. V prípade, že teleso pustíme pri nulovej rýchlosti a zároveň neprešmykuje, tak pre vzťah energie môžeme v tomto priblížení písať

$$mg\Delta h = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}\,,$$

kde Δh je prekonaný výškový rozdiel, v rýchlosť ťažiska telesa a ω uhlová rýchlosť otáčania okolo danej osi.

V odstavci vyššie sme vyslovili podmienku na to, aby teleso neprešmykovalo na našej naklonenej rovine, a teda aby sa celý čas pohybovalo valivým pohybom. Táto podmienka pre jedno otočenie okolo vlastnej osi dáva dokopy rýchlosť v a uhlovú rýchlosť ω. Musí tak byť splnená rovnica

$$v = \omega r\,,$$

a to v obidvoch prípadoch, kde r predstavuje polomer gule a v prípade valca je r polomer podstavy.

V domácich podmienkach však vieme rýchlosť objektu merať pomerne obtiažne. Avšak vzdialenosť (resp. dĺžku) naklonenej roviny a čas, za ktorý sa dostane teleso z jedného konca na druhý vieme merať pomerne jednoducho. V prípade homogénneho valca a gule tak popisujeme ich pohyb rovnomerne zrýchleným pohybom. Pre prejdenú dráhu, resp. dĺžku s naklonenej roviny s nulovou počiatočnou rýchlosťou máme $s = \frac{1}{2}at_\mathrm{f}^2$, kde a je zrýchlenie, ktorým teleso zrýchľuje a t_f čas, za ktorý teleso prejde po rovine. Pre maximálnu dosiahnutú rýchlosť na konci roviny platí

$$v_\mathrm{f} = at_\mathrm{f} = \frac{2s}{t_\mathrm{f}}\,.$$

S využitím podmienky valivého pohybu a dosadením vzorcov pre tento rovnomerne zrýchlený pohyb dostávame

$$2mg\Delta h = mv_\mathrm{f}^2 + \frac{Iv_\mathrm{f}^2}{r^2} = \left(\frac{2s}{t_\mathrm{f}}\right)^2\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\,,$$

odkiaľ si vyjadríme moment zotrvačnosti ako

$$I = mr^2\left(\frac{gt_\mathrm{f}^2\Delta h}{2s^2} - 1\right)\,.$$

Meranie

Ako naklonenú rovinu sme zobrali hladkú drevenú dosku. Ako prvé sme odmerali rozmery valca. Priemer valca sme odmerali pomocou posuvného meradla a odtiaľ sme určili jeho polomer ako $r_\mathrm{V} = (13{,}27 \pm 0{,}05)$ mm . Výška valca bola $H_\mathrm{V} = (75{,}25 \pm 0{,}10)$ mm. Pomocou digitálnych váh sme odmerali jeho hmotnosť ako $m_\mathrm{v} = (25{,}5 \pm 0{,}1)$ g.

Pásovým meradlom sme určili dĺžku naklonenej roviny. Výsledná hodnota bola $s_\mathrm{v} = (44{,}9 \pm 0{,}2)$ cm. Ako hodnotu tiažového zrýchlenia sme brali hodnotu $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Drevenú dosku sme podložili malými drevenými hranolmi aby sme dosiahli nenulovú hodnotu Δh. Túto hodnotu sme znova odmerali pomocou posuvného meradla. Merali sme pri každom pustení telesa čas t_f a výsledky sú v tabuľke 1. Štatistickú chybu jedného merania času sme určili ako $\sigma_t = 0{,}20\,\mathrm{s}$ podľa reakčného času človeka.

Tab. 1: Meranie času pre prejdenie valca po naklonenej rovine $\Delta h = (12{,}5 \pm 0{,}3)$ mm.

Meranie	$\frac{t_\mathrm{f}}{\mathrm{s}}$	Meranie	$\frac{t_\mathrm{f}}{\mathrm{s}}$
1	2,31	11	2,26
2	2,15	12	2,17
3	2,37	13	2,44
4	2,18	14	2,25
5	2,43	15	2,13
6	2,18	16	2,21
7	2,40	17	2,30
8	2,34	18	2,37
9	2,16	19	2,17
10	2,27	20	2,13

Priemerný čas tak bol $t_\mathrm{v} = (2{,}26 \pm 0{,}10)$ s, kde sme ako chybu uviedli štatistickú odchýlku súboru, ktorá bola mierne menšia ako reakčná doba pozorovateľa, čo je jedným zo zdrojov štatistickej chyby.

$$\sigma_I = I\sqrt{\frac{\left(\frac{2\sigma_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta h}}{\Delta h}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_s}{s}\right)^2}{\left(\frac{g t_\mathrm{f}^2 \Delta h}{2s^2} - 1\right)^2} + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_r}{r}\right)^2}$$

Pre valec tak máme hodnotu momentu zotrvačnosti

$$I_\mathrm{v} = (2{,}5 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,.$$

Pre idelizovaný valec s hmotnosťou M a polomerom R je moment zotrvačnosti popísaný rovnicou

$$I_\mathrm{vId} = \frac{1}{2} M R^2\,,$$

kde po dosadení našich nameraných hodnôt dostaneme $I_\mathrm{vId} = (2{,}25 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$. Odchýlku sme vypočítali ako $\sigma_\mathrm{Id} = \frac{1}{2} M R^2 \sqrt{\left(\frac{2\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2}$.

V druhom prípade sme použili guľu z tvrdej gumy. Počiatok sme mali mierne posunutý a teda pre dĺžku dráhy máme $s_\mathrm{g} = (44{,}1 \pm 0{,}2)$ cm. Polomer sme odmerali pomocou posuvného meradla a jeho hodnota bola $r_\mathrm{g} = (21{,}32 \pm 0{,}05)$ mm. Hmotnosť sme zmerali opäť pomocou digitálnych váh a táto hodnota bola $m_\mathrm{g} = (37{,}4 \pm 0{,}1)$ g. Postupovali sme rovnako ako v predchádzajúcom prípade a púšťali sme guľu po naklonenej rovine a merali sme čas, za ktorý sa dostane na spodný koniec. Použili sme tú istú konfiguráciu. Namerané časy sú v tabuľke 2.

Tab. 2: Meranie času pre prejdenie gule po naklonenej rovine $\Delta h = (12{,}5 \pm 0{,}3)$ mm.

Meranie	$\frac{t_\mathrm{f}}{\mathrm{s}}$	Meranie	$\frac{t_\mathrm{f}}{\mathrm{s}}$
1	2,19	11	2,21
2	2,03	12	2,31
3	2,12	13	2,14
4	2,01	14	2,15
5	2,04	15	2,07
6	2,35	16	2,04
7	2,31	17	1,97
8	2,10	18	2,02
9	2,18	19	2,22
10	2,15	20	2,23

Priemerný čas tak bol $t_\mathrm{g} = (2{,}14 \pm 0{,}11)$ s, kde sme ako chybu uviedli štatistickú odchýlku súboru dát, ktorá bola iba mierne menšia ako reakčná doba pozorovateľa. Pre guľu tak máme hodnotu momentu zotrvačnosti

$$I_\mathrm{g} = (7{,}5 \pm 1{,}8) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,.$$

Pre idelizovanú guľu s hmotnosťou M a polomerom R je moment zotrvačnosti popísaný rovnicou

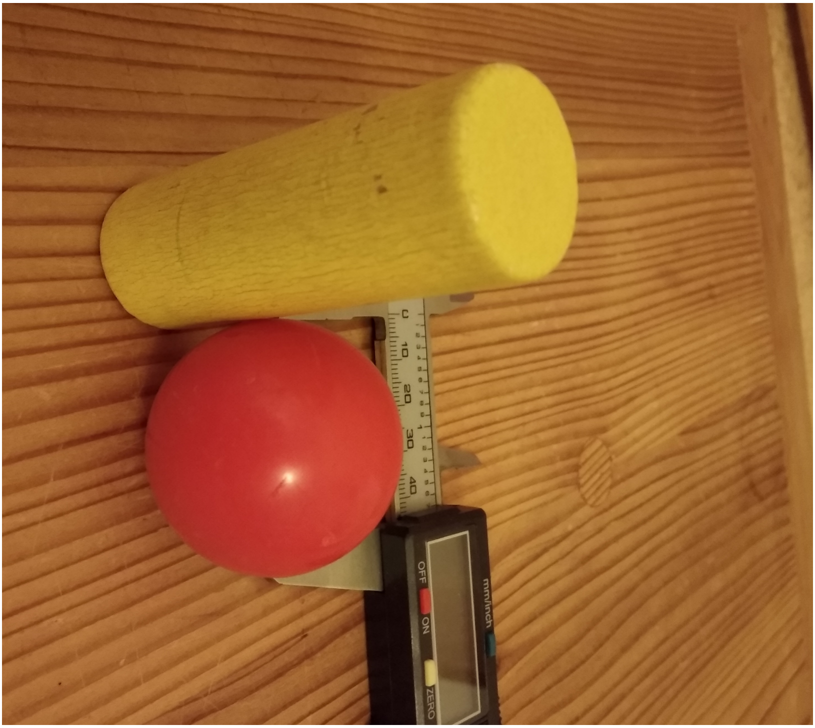
$$I_\mathrm{gId} = \frac{2}{5} M R^2\,.$$

kde po dosadení našich nameraných hodnôt dostaneme $I_\mathrm{gId} = (6{,}80 \pm 0{,}04) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$. Odchýlku sme vypočítali ako $\sigma_\mathrm{Id} = \frac{2}{5} M R^2 \sqrt{\left(\frac{4\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2}$.

Diskusia

V rámci merania sme počítali s vicerými idealizáciami a bolo prítomných viacero faktorov ovplyvňujúcich presnosť merania. Vychádzali sme zo ZZE, ktorý neobsahoval počítanie s energetickými stratami. Zanedbávali sme odporovú silu vzduchu a rovnako sme zanedbali aj valivý odpor. Povrchy neboli dokonale hladké, čo malo za následok absorpciu energie a mohlo to tak systematicky posunúť počítanú hodnotu momentu zotrvačnosti smerom nahor. Taktiež objekty boli vyrobené z dreva a gumy, čo nie sú ideálne materiály pre minimalizáciu odporu.

V obidvoch prípadoch sme predpokladali rovnomerné zrýchľovanie telies. To však môže platiť iba v prípade dokonalo hladkého povrchu a homogénneho rozloženia hmoty v telese. Taktiež povrchy telies mali takmer určite isté nerovnosti. V prípade valčeka bola na jeho povrchu istá



Obr. 1: Použité pomôcky: Valec a guľa.

vrstva farby, ktorá je z iného materiálu než samotný drevený valček. Taktiež hrany podstáv neboli dokonale ostré ale skôr zaoblené, čo môže znamenať menšiu skutočnú hodnotu momentu zotrvačnosti. V prípade gule je možné že nemusela byť dokonale tvarom symetrická. Systematickú chybu stopiek sme zanedbávali oproti schopnosti registrovať bod dosiahnutia konca roviny. Meranie by sa vedelo spresniť detailnejšou analýzou pomocou spracovania videom alebo väčším množstvom pokusov.

Pre porovnanie nameraných hodnôt sme použili model, dokonalého valca a gule. V oboch prípadoch sú namerané hodnoty od nami odhadnutých posunuté smerom nahor ale zároveň v rámci nami vypočítanej odchýlky. Posunutie tejto hodnoty smerom nahor nie je prekvapivé a taktiež mierne očakávané kvôli stratám energie pri pohybe. Naše odhady majú odchýlku v oboch prípadoch menšiu ako 1 %. Taktiež sme zanedbávali ich neideálny tvar avšak odhadujeme, že nám to dáva dobrý odhad pre skutočnú hodnotu momentov zotrvačnosti, ktoré ale nepoznáme.

Pre určenie parametru naklonenej roviny Δh sme predpokladali, že všade v miestnosti je dokonale rovná podlaha. Preto sme mierne nadhodnotili jej chybu $\sigma_{\Delta h}$ oproti presnosti posuvného meradla, aby zodpovedala prípadným nerovnostiam na vyššie uvedenú hodnotu. Jej relatívna chyba je ale dosť malá oproti ostatným veličinám, čo nám ospravedlňuje tento krok a celkovo nám príliš nezmení finálnu hodnotu odchýlky. Prípadné naindukovanie náboja na povrchu sme zanedbávali.

Záver

Namerali sme momenty zotrvačnosti valca a gule, ktoré sme mali k dispozícií a porovnali ich s odhadom podľa jednotlivých tvarov. Merali sme časy, za ktoré telesá prejdú po naklonenej rovine a zaznamenali ich do tabuľky 1 a 2. Pre valec sme namerali hodnotu

$$I_\mathrm{v} = (2{,}5 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,.$$

Porovnali sme to s odhadovanou hodnotou

$$I_\mathrm{vId} = (2{,}25 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,.$$

Pre guľu sme namerali

$$I_\mathrm{g} = (7{,}5 \pm 1{,}8) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,.$$

Ďalej sme tiež porovnali s odhadovanou hodnotou

$$I_\mathrm{gId} = (6{,}80 \pm 0{,}04) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,.$$

Diskutovali sme faktory, ktoré vstupovali do modelu a výpočtov.

Ivan Hudák
hudakivan@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.