

Úloha III.1 ... Kde těžiště moje?

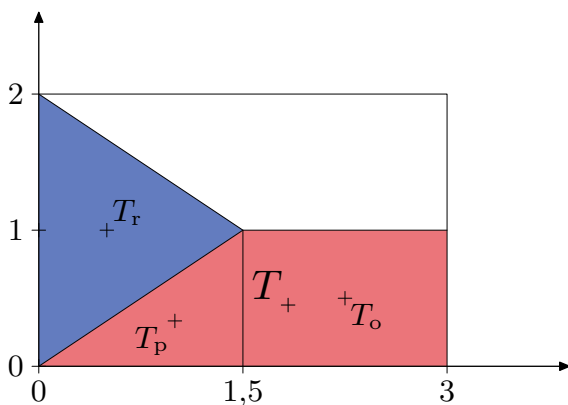
3 body; průměr 2,60; řešilo 91 studentů

Můžeme se setkat s neoficiálním výkladem, že červená, modrá a bílá barva na české vlajce symbolizují krev, oblohu (tedy vzduch) a čistotu. Najděte polohu těžiště takto doslovně interpretované vlajky, přičemž uvažujte, že čistota je nehmotná. Poměr stran je 3 : 2 a rozhraní všech tří částí se nachází přesně ve středu. Hustoty krve a vzduchu si vyhledejte.

Bonus Pokúste sa čo najpresnejšie spočítat polohu ťažiska slovenskej vlajky. Môžete použiť rôzne aproximácie. *Matěj má rád zábavu s vlajkami.*

Celý problém si zredukujeme na 2D úlohu, protože poloha těžiště nezávisí na tloušťce vlajky. Zavedeme kartézské souřadnice, které mají střed v levém spodním rohu vlajky. Její délku a výšku označíme 3 a 2 – pro jednoduchost počítáme bezrozměrně.

Vlajku si rozdělíme na tři části podle obrázku. Snadno rozpoznáme polohy těžišť jednotlivých útvarů (využijeme faktu, že těžiště trojúhelníka leží ve třetině jeho výšky).



Obr. 1: Rozdělení české vlajky na tři části.

Tab. 1: Parametry částí české vlajky.

	objekt	poloha těžiště	obsah
	červený obdélník	$T_o = (2,25; 0,5)$	1,5
	červený pravoúhlý trojúhelník	$T_p = (1; \frac{1}{3})$	0,75
	modrý rovnoramenný trojúhelník	$T_r = (0,5; 1)$	1,5

Poloha společného těžiště je vážený průměr jednotlivých těžišť podle jejich hmotnosti, přičemž pro zkrácení zápisu počítáme s polohami těžišť jako s vektory

$$T = (T_1; T_2) = \frac{(2,25; 0,5) \cdot 1,5 + (1; \frac{1}{3}) \cdot 0,75 + (0,5; 1) \cdot 1,5k}{1,5 + 0,75 + 1,5k} = \frac{(4,125 + 0,75k; 1 + 1,5k)}{2,25 + 1,5k},$$

kde k je poměr hustoty vzduchu a krve.

Průměrná hustota lidské krve je $1\,060\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, hustota vzduchu je pouhých $1,3\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, proto

$$k = \frac{1,3\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}}{1\,060\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}} \doteq 0,0012.$$

Po dosazení do vztahu pro těžiště dostáváme

$$T = \frac{(4,126; 1,002)}{2,252} = (1,832; 0,450).$$

Všimněme si, že hmotnost vzduchu jsme mohli zanedbat a vyšlo by nám téměř to samé. Zanedbání vzduchu znamená $k = 0$ čili bychom hledali jenom těžiště červené části

$$T_{\text{krv}} = \frac{(4,125; 1)}{2,25} = \left(\frac{11}{6}; \frac{4}{9}\right) = (1,833; 0,444).$$

Výsledky by se lišily o necelé 1%.

Bonus

Podstatou této části úlohy je najít rovnováhu mezi tím, co dokážeme spočítat v reálném čase, a tím, jak přesný výsledek chceme. Úplné přesnosti stejně nemůžeme dosáhnout, protože státní znak, vyobrazený na slovenské vlajce, není slovenskými zákony přesně geometricky definovaný. Můžeme se proto setkat se znaky, které se mírně liší.

Přesně je definováno pouze umístění a velikost státního znaku. Jeho výška je polovina výšky vlajky, takže 1 v našich bezrozměrných jednotkách. Šířka je $2/5$ výšky vlajky neboli $4/5$. A jeho vzdálenost od horního, spodního a levého okraje vlajky je stejná, tedy $1/2$. Dále je určeno, že kolem znaku je bílý lem, jehož tloušťka je setina výšky vlajky, což je $1/50$.

Vlajku si rozdělíme na několik částí, jejichž těžiště spočítáme samostatně. Jelikož výpočet těžiště je lineární záležitost, můžeme si pro zjednodušení zavést i útvary se zápornou hmotností.

Těžiště spodní červené oblasti můžeme spočítat jako vážený průměr těžiště neporušeného červeného pruhu a těžiště odříznutého trojúhelníku, které ale bereme se zápornou hmotností. Vrcholový úhel trojúhelníku odhadneme na 110° . Jeho výška je

$$v = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{50} = \frac{14}{75},$$

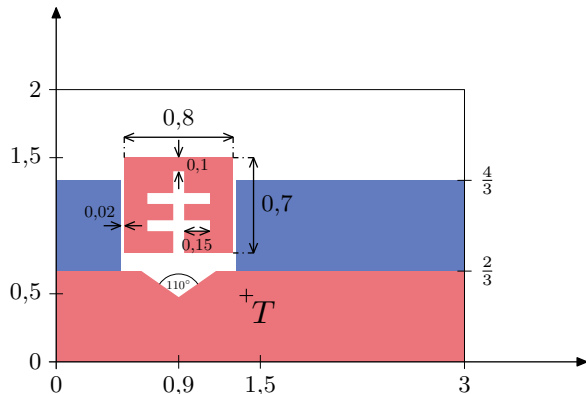
obsah vychází jako $v^2 \text{tg}(55^\circ) \doteq 0,04976$.

Červené pozadí ve státním znaku aproximujeme obdélníkem, jehož šířka je dána jako 0,8 a výšku odhadneme na 0,7. Obsah spočítáme snadno a výška těžiště bude $2 - 0,5 - \frac{0,7}{2} = 1,15$. Tato aproximace vnáší do našich výpočtu největší chybu.

Kříž na státním znaku není moc přesně definovaný. Proto budeme muset jeho rozměry odhadnout. Ačkoliv by konce kříže měly být rozšířené, budeme pro jednoduchost počítat s tím, že kříž je složen z čar, které mají konstantní šířku, kterou odhadneme na 0,08.

Pro jednoduchost uvažujme, že oba dva páry ramen kříže jsou stejně dlouhé a dohromady s páteří kříže tvoří středově symetrický objekt, takže jeho těžiště je ve středu. Rozměry zvolíme tak, jak je naznačeno na obrázku. Obsah potom bude $0,08 \cdot (0,6 + 4 \cdot 0,15) = 0,096$.

Jelikož hustota vzduchu je o tři řády menší než hustota krve, můžeme si dovolit zanedbat modré kopečky na státním znaku. Spolu s nimi zanedbáme i dva modré laloky pod červeným čtvercem, abychom mohli modrou část brát pouze jako dva obdélníky. Opět to započítáme jako kladný modrý pruh a záporný obdélník v místě státního znaku. Hmotnost vyříznutého obdélníku je $-2/3 \cdot (0,8 + 0,04)k = 0,56k$. Polohy těžišť jsou dobře vidět z obrázku.



Obr. 2: Aproximace slovenské vlajky.

Tab. 2: Parametry částí slovenské vlajky. Modrý trojúhelník (hory) zanedbáváme.

objekt	poloha těžiště	obsah	relativní hmotnost
červený pruh (celý)	$T_r = (1,5; \frac{1}{3})$	2	2
trojúhelníkový odřezek z pruhu	$T_t = (0,9; \frac{136}{225})$	0,050	-0,050
červený obdélník (celý)	$T_c = (0,9; 1,15)$	0,56	0,56
křížový výřez z obdélníku	$T_k = (0,9; 1,1)$	0,096	-0,096
modrý pruh	$T_b = (1,5; 1)$	2	$2k$
prostřední odřezek modrého pruhu	$T_p = (0,9; 1)$	0,56	$-0,56k$

Shrnutí

Nyní už máme vše potřebné, zbývá jen dosadit hodnoty z druhého a posledního sloupce tabulky do vzorce pro vážený průměr. Dostáváme

$$T = (1,397; 0,487) .$$

Samozřejmě bychom mohli postupně přidávat další geometrická tělesa aproximující útvary na vlajce, čímž bychom zpřesňovali výpočet.

Druhou možností je napsat program, který by načel obrázek vlajky a polohu těžiště by spočítal za nás. Při použití tohoto postupu a obrázku slovenské vlajky z Wikipedie dostaneme její přesný střed v bodě

$$T_{PC} = (1,411; 0,473) ,$$

což je o 0,019 jednotky vedle ručně spočítaného těžiště T .

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.