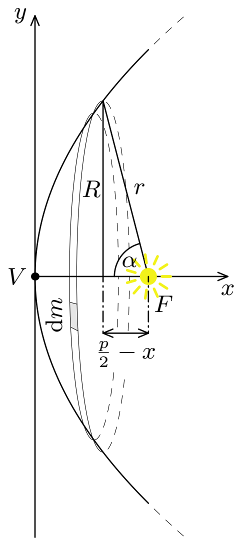
Úloha II.5 ... Shkadov thruster

8 bodů; průměr 3,44; řešilo 34 studentů

Před dávnými časy v předaleké galaxii se jedna civilizace rozhodla přestěhovat celou svou sluneční soustavu. Jednou z možností bylo postavit „poloviční Dysonovu sféru". Tedy konstrukci, která by zachycovala zhruba polovinu záření z hvězdy a odrážela jej všechno jedním směrem. Ideálním tvarem by tak byl rotační paraboloid. Jaký by musel být vztah mezi zářivým výkonem hvězdy, plošnou hustotou takového zrcadla a jeho vzdáleností od hvězdy, aby se mezi nimi udržovala konstantní vzdálenost? *Karel sleduje Kurzgesagt.*



Obr. 1: Schéma „poloviční Dysonovy sféry" tvaru rotačního paraboloidu.

Má-li konstrukce tvaru rotačního paraboloidu odrážet všechno zachycené záření jedním směrem, měla by se hvězda, jakožto zdroj záření, nacházet v jeho ohnisku. Zároveň ze zadání víme, že má být zachycena pouze polovina záření, paraboloid je tedy useknutý tak, že se nachází pouze v jednom poloprostoru od hvězdy. Uspořádání je znázorněno na obrázku 1. Pro udržení konstantní vzdálenosti mezi hvězdou a zrcadlem je třeba, aby výslednice sil mezi těmito objekty byla nulová. V systému působí dvě síly – přitažlivá gravitační síla mezi hvězdou a zrcadlem a proti ní síla způsobená tlakem záření. Ta má za následek odtlačování zrcadla od hvězdy a v ideálním případě přesně kompenzuje zmíněné gravitační přitahování.

Můžeme tedy najít vztah spojující parametry systému tak, aby výslednice sil působící na paraboloid byla nulová. Ale co výslednice sil působících na hvězdu? Ta bude přitahována stejnou gravitační silou, jakou je k hvězdě přitahován paraboloid. Ale hvězda září na všechny strany stejně, tudíž zde nepůsobí žádná síla způsobená zářením. Hvězda se tak bude přibližovat k paraboloidu. Na konci řešení ovšem ukážeme, že pro hvězdu velikosti našeho Slunce by její zrychlení bylo relativně malé.

Začněme výpočtem gravitační síly. Paraboloid si rozřežeme na tenké kroužky se společnou osou rovnoběžnou s osou paraboloidu. Nejprve spočítáme složku gravitační síly ve směru osy paraboloidu způsobenou infinitezimálně malým kouskem jednoho takového kroužku. Ta je podle Newtonova gravitačního zákona

$$\mathrm{d}F_1 = \frac{GM\,\mathrm{d}m}{r^2}\cos\alpha\,,$$

kde G je gravitační konstanta, dm je hmotnost našeho nekonečně malého úseku kroužku, M je hmotnost hvězdy, r je vzdálenost úseku kroužku od hvězdy a α je velikost úhlu mezi osou paraboloidu a spojnicí hvězdy s úsekem kroužku. Z obrázku zjistíme, že

$$\cos\alpha = \frac{\frac{p}{2} - x}{r}\,,$$

kde p je parametr paraboloidu, tzn. dvojnásobek vzdálenosti vrcholu a ohniska, a x je vzdálenost vrcholu a středu kroužku.

Celkovou gravitační sílu dF_2 od jednoho kroužku získáme sečtením všech infinitezimálně malých příspěvků po jeho obvodu. Hmotnost dm můžeme vyjádřit pomocí plošné hustoty σ jako

$$\mathrm{d}m = \sigma\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}x\,,$$

kde dl je element délky po obvodu kroužku a R je poloměr kroužku jako funkce souřadnice x. Dosazením do vztahu pro dF_1 a následnou integrací podle l dostaneme

$$\mathrm{d}F_2 = 2\pi R\sigma\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\right)^2}\frac{GM\,\mathrm{d}x}{r^2}\cos\alpha\,.$$

Veličiny r a R lze vyjádřit pomocí p a x. Rovnice paraboly s vodorovnou osou a s vrcholem v počátku je

$$y^2 = 2px\,,$$

v případě paraboloidu

$$R^2 = 2px\,.$$

Vzdálenost r pak snadno dopočteme z Pythagorovy věty. Pro gravitační sílu jednoho kroužku dostaneme

$$\mathrm{d}F_2 = \frac{2\pi\sigma\sqrt{2px + p^2}}{\left(\frac{p}{2} + x\right)^3}\left(\frac{p}{2} - x\right)GM\,\mathrm{d}x\,.$$

Gravitační síla všech kroužků je rovna určitému integrálu tohoto výrazu podle x od 0 do $p/2$. Označme konstantu $2\pi\sigma GM$ jako c_1. Příslušný určitý integrál vyjde

$$F_\mathrm{g} = c_1\frac{\sqrt{2^5} - 4}{3} = 8\pi\sigma GM\frac{\sqrt{2} - 1}{3}\,.$$

Nyní podobným způsobem vypočteme sílu způsobenou tlakem záření. Paraboloid opět rozřežeme na úzké kroužky a tentokrát začneme výpočtem síly na element prostorového úhlu po obvodu kroužku dΩ. Jemu příslušná síla je

$$\mathrm{d}F_\mathrm{z} = \frac{L\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}\left(1 + \cos\alpha\right)}{c}\,,$$

kde c značí rychlost světla a L je zářivý výkon hvězdy. Faktor $1+\cos\alpha$ odpovídá změně hybnosti světla ve směru osy x a $\mathrm{d}\Omega$ odpovídá ploše, jakou by tento prostorový úhel vytínal na jednotkové kouli. Platí pro něj

$$\mathrm{d}\Omega = 2\pi \sin\alpha \, \mathrm{d}\alpha \,.$$

Celková síla způsobená tlakem záření bude rovna integrálu podle α od 0 do $\pi/2$. Příslušný neurčitý integrál vyjde $\frac{-(1+\cos\alpha)^2}{4} + C$ a celková síla bude rovna

$$F_\mathrm{z} = \frac{3L}{4c} \,.$$

Z rovnosti F_g a F_z vyplývá vztah mezi zářivým výkonem hvězdy, plošnou hustotou zrcadla a jeho vzdáleností od hvězdy

$$8\pi\sigma GM \frac{\sqrt{2}-1}{3} = \frac{3L}{4c} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{32\pi\sigma GMc\left(\sqrt{2}-1\right)}{9} \,.$$

Všimněme si, že ve vztahu nevystupuje vzdálenost hvězdy od vrcholu zrcadla. Ta může být libovolná, je-li splněna podmínka vyplývající ze zadání, která říká, že hvězda se nachází v ohnisku paraboloidu. Jediným volným parametrem pro danou hvězdu je plošná hustota zrcadla.

Velikost gravitační síly, která působí na hvězdu, musí být stejně velká jako F_z. Naše Slunce má zářivý výkon přibližně $4 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$. Velikost gravitační síly by tak byla $F_\mathrm{g} = 10^{18}\,\mathrm{N}$. Pro gravitační zrychlení hvězdy potom vychází $a_\mathrm{g} = \frac{F_\mathrm{g}}{M} = 5 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. S tímto zrychlením by se Slunce za tisíc let neposunulo ani o jeden svůj poloměr.

Radka Křížová
radka.krizova@fykos.cz