

Úloha II.4 ... čepování čaje

7 bodů; průměr 2,94; řešilo 63 studentů

Matěj si chce z várnice natočit čaj do sklenice o hmotnosti M . Jednou rukou drží sklenici a druhou rukou ovládá kohoutek, čímž mění objemový průtok čaje. Rychlost výtoku v je konstantní (můžete uvažovat, že rychlost při dopadu do sklenice je stejná). Protože se Matěj nechce moc nadřít, rád by držel sklenici od začátku až do konce čepování konstantní silou.

Jaká musí být závislost výtoku na čase, aby se mu to podařilo? Jak dlouho bude trvat, než se sklenice naplní? Matěj si rád čepuje čaj.

Matěj musí působit jednak proti tíze skleničky o hmotnosti M , jednak proti hmotnosti napuštěné vody

$$m(t) = \int_0^t \rho Q(t') dt'$$

a jednak proti hybnosti dopadajícího proudu vody $F_h(t) = \rho Q(t)v$. Požadujeme, aby celková síla F byla konstantní v čase, což znamená

$$F = Mg + \rho g \int_0^t Q(t') dt' + \rho v Q(t) .$$

Dostáváme

$$Q(t) = K - \frac{g}{v} \int_0^t Q(t') dt' , \quad (1)$$

kde $K = \frac{F - Mg}{\rho v}$. Celou rovnici zderivujeme

$$\dot{Q}(t) = -\frac{g}{v} Q(t) ,$$

což je velmi známá rovnice pro exponenciální rozpad, jejímž řešením je

$$Q(t) = K e^{-\frac{g}{v}t} ,$$

kde K je integrační konstanta, kterou jsme rovnou určili z nezderivované rovnice (1) dosazením $t = 0$. Hmotnost čaje v plném hrnečku označíme m_0 a vyjádříme závislost hmotnosti načepovaného čaje na čase

$$m(t) = \rho K \int_0^t e^{-\frac{g}{v}t'} dt' = \rho K \frac{v}{g} \left(1 - e^{-\frac{g}{v}t} \right) = \left(\frac{F}{g} - M \right) \left(1 - e^{-\frac{g}{v}t} \right) .$$

V dalším kroku zjistíme dobu t_0 , kterou bude trvat, než Matěj načepuje hmotnost $m_0 = m(t_0)$

$$m_0 = \left(\frac{F}{g} - M \right) \left(1 - e^{-\frac{g}{v}t_0} \right) \Rightarrow t_0 = \frac{v}{g} \ln \left(\frac{F - Mg}{F - Mg - m_0 g} \right) .$$

Všimněme si zajímavého faktu – pokud chceme konstantní silou F držet i plně načepovanou sklenici (tj. aby nám ruka se sklenicí nevystřelila nahoru, až zavřeme kohoutek), potřebujeme, aby platilo $F = (M + m_0)g$. Potom nám čepování čaje zabere nekonečný čas.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.