Úloha VI.E ... rozlitá sklenička

12 bodů; (chybí statistiky)

Vezměte si skleničku, plechovku či jinou válcově symetrickou nádobu a změřte závislost úhlu náklonu, při kterém se převrhne, na množství vody uvnitř. Doporučujeme použít nádobu s větším poměrem výšky ku průměru podstavy. *Jindra zaléval stůl.*

Úvod

Už jste někdy rozlili skleničku nebo hrnek s nápojem? Asi ano, taková nešťastná situace snad potkala každého. Přemýšleli jste ale někdy nad rovnováhou skleničky? Jak moc můžete sklenici nahnout, aby se nepřevrhla? Maximální úhel zcela určitě závisí na množství tekutiny uvnitř.

Těžiště prázdné sklenice se nachází mírně pod polovinou výšky. Pokud do ní nalijeme vodu, těžiště klesne. Při dalším přilívání se však trend obrátí a těžiště začne stoupat. Plná sklenice má zase těžiště přibližně v polovině výšky. Čím níže se těžiště nalézá, tím je sklenice stabilnější.

Při analýze naklánění sklenice však musíme vzít v potaz, že kapalina mění tvar. Hladina vody je vždy vodorovná, tudíž těžiště se při naklánění přesouvá. Spočítat úhel náklonu, při kterém se sklenice převrhne, není úplně triviální, ale můžeme odhadnout, že úhel převrhnutí bude největší při nějakém středním množství vody, nikoliv při prázdné nebo plné sklenici.

Uspořádání experimentu

Kromě sklenice či plechovky potřebujeme vodu (samozřejmě), posuvné měřidlo k určení rozměrů plechovky a váhu k posouzení množství vody v plechovce. Jelikož experiment nutně zahrnuje rozlévání vody, hodí se experimentovat někde, kde rozlitá voda nevadí, a pro jistotu si připravte ručníky a ubrousky (co kdyby náhodou. . .). My jsme plechovku umístili do akvária, takže voda zůstávala lapena na dně akvária, ale zároveň jsme přes průhledné stěny mohli pozorovat, co se děje.

Jakým způsobem změřit úhel pádu? Plechovku jsme postavili na dřevěné prkno, které jsme rukou na jednom konci začali zvedat. Situaci ze vzdálenosti cca 2 m natáčela kamera. Museli jsme vybalancovat dva protichůdné požadavky – kamera musí být co nejdál, aby úhlové zkreslení obrazu bylo co nejmenší a zároveň ne příliš daleko, abychom na záznamu rozlišili detaily. Díky kameře jsme mohli přesněji zachytit okamžik, kdy plechovka začala padat, a z následné analýzy videa na počítači (použili jsme program Tracker) jsme určili úhel pádu. Tento způsob měření úhlů nám přijde jednak přesnější a jednak méně náročný pro experimentátora, na rozdíl od snahy změřit pádový úhel přímo v průběhu experimentu.

Před experimentem se vyskytl menší problém – při vyšších úhlech náklonu plechovka po dřevě klouzala. Takto bychom nemohli naměřit celou křivku. Proto jsme podstavu plechovky přilepili pásky smirkového papíru a taktéž na prkno jsme nalepili smirkový papír.

Měření jsme prováděli po několika sériích, kdy jsme postupovali od malého po velké množství vody v plechovce. Pro menší hmotnosti vody jsme udělali okolo 10 měření, pro velké hmotnosti jenom 4-5, protože voda v akváriu pak přibývala rychle.

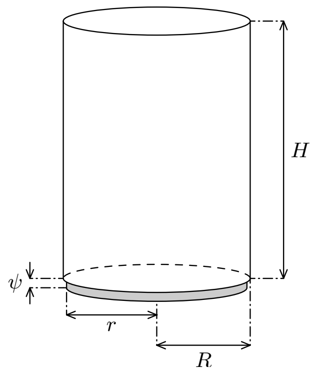
Do plechovky jsme nalili vodu, zvážili jsme plechovku s vodou a odečetli jsme předtím změřenou hmotnost plechovky. Takto jsme zjistili hmotnost vody. Nepřesnost určení hmotnosti vody vzhledem k použité váze a nepřesnosti hmotnosti plechovky odhadujeme na ±0,7 g.

Základní parametry plechovky

Měření jsme prováděli s plechovkou, jelikož plechovka má válcový tvar, takže matematický popis bude snazší. Rozměry plechovky najdete v tabulce 1. Význam naměřených veličin je zřejmý z obrázku 1. Změřená výška $H + \psi$ je bez vrstvy smirkového papíru. Prostor na vodu je od výšky ψ výš. Délky jsme změřili posuvným měřidlem s dělením po 0,005 cm a hmotnost jsme zvážili na digitální váze s dílkem 1 g. Odchylky v tabulce mají statistickou významnost 2σ.

Tab. 1: Parametry plechovky.

Parametr	Hodnota
výška plechovky	$H + \psi = 10{,}19 \pm 0{,}01\,\mathrm{cm}$
vnější poloměr plechovky	$R_{\text{vně}} = 3{,}26 \pm 0{,}02\,\mathrm{cm}$
vnitřní poloměr plechovky	$R = 3{,}24 \pm 0{,}02\,\mathrm{cm}$
výška spodní části	$\psi = 0{,}30 \pm 0{,}03\,\mathrm{cm}$
poloměr spodní části	$r = 3{,}14 \pm 0{,}01\,\mathrm{cm}$
hmotnost plechovky	$M = 38{,}0 \pm 0{,}5\,\mathrm{g}$



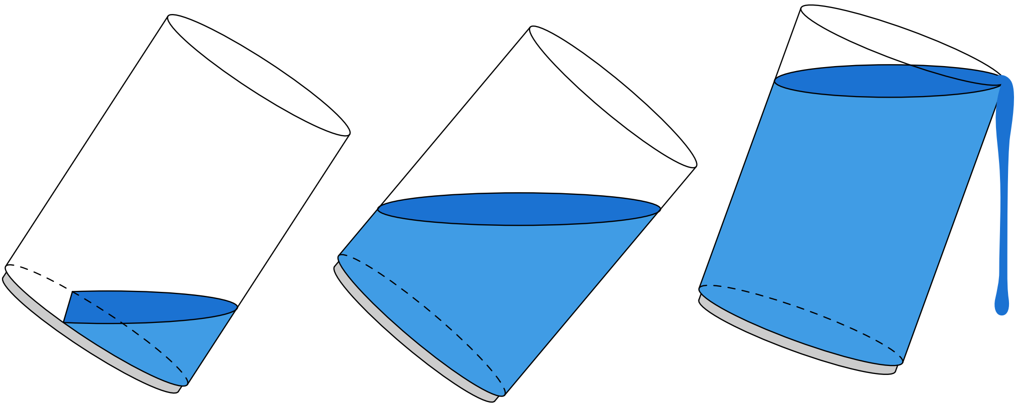
Obr. 1: Náčrt plechovky s vyznačenými rozměry. Naměřené hodnoty si můžete prohlédnout v tabulce 1.

Poloměry $R_{\text{vně}}$ a r jsme zjistili tak, že jsme provedli měření průměru plechovky a z něj spočítali poloměr. Dále jsme ze znalosti hmotnosti plechovky M, hustoty plechovky (železo s hustotou $\rho_{\mathrm{Fe}} = 7{,}85\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$) a z aproximace plochy plechovky jako $S = \pi R_{\text{vně}}^2 + 2\pi R_{\text{vně}} H$ mohli odhadnout tloušťku plechu $h = M/(\rho_{\mathrm{Fe}} S) \approx 0{,}021\,\mathrm{cm}$. To je hodnota srovnatelná s nepřesností veličiny $R_{\text{vně}}$. Vnitřní poloměr plechovky je $R = R_{\text{vně}} - h$ a k jeho chybě přispívá převážně nejistota v hodnotě $R_{\text{vně}}$. Výška spodní části plechovky nešla změřit lépe, neboť dno plechovky je vlnité, takže se ψ nedá definovat s vyšší přesností.

Teorie

V úvodu bylo naznačeno, že určit úhel pádu není triviální. Začněme tedy s fenomenologickým popisem a pokusme se předpovědět, co se bude dít. V závislosti na množství vody existují tři režimy převržení.

- Pokud je v plechovce málo vody, v okamžiku dosažení pádového úhlu bude roviny vodní hladiny protínat dno plechovky. Viz obrázek 2 vlevo.
- Při středním množství vody protíná rovina hladiny plášť plechovky. Viz obrázek 2 uprostřed.
- Zajímavý jev nastane, pokud je plechovka téměř naplněná. Při určitém úhlu menším než úhel pádu začne voda přetékat, plechovka však zůstane stabilní. Od jistého hraničního množství vody výše se plechovka převrhne vždy při stejném úhlu! Viz obrázek 2 vpravo.



Obr. 2: Tři režimy převržení plechovky podle množství vody v plechovce.

Můžeme však učinit i nějaké kvantitativní předpovědi? Díky tomu, že válec je matematicky jednoduchý tvar, tak ano. Potřebujeme znát pár vztahů týkajících se homogenní válcové výseče, kde $v = R$ (viz obrázek 3 pro definici veličin a orientaci souřadnicových os). Objem takové válcové výseče[1] je

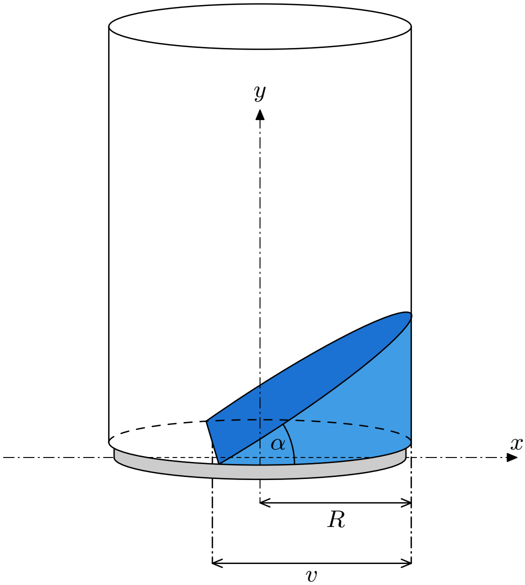
$$V_R = \frac{2}{3} R^3 \operatorname{tg} \alpha . \tag{1}$$

Souřadnice těžiště jsou

$$x_R = \frac{3\pi}{16} R ,$$
$$y_R = \frac{3\pi}{32} R \operatorname{tg} \alpha .$$

Umíme určit polohu těžiště v případě popsaném na obrázku 2 uprostřed. Podívejte se na obrázek 4. V levé části je přebytek vody (označeno jako m_+) ve tvaru válcové výseče, zatímco v pravá části je nedostatek vody (můžeme s ní v rovnicích počítat jako se zápornou hmotností $m_- = -m_+$).

[1] Následující tři vztahy najdete zde: `https://mathworld.wolfram.com/CylindricalHoof.html` nebo je můžete odvodit integrováním.



Obr. 3: Válcová výseč.

Hmotnost m_+ spočítáme ze vztahu (1)

$$m_+ = \frac{2}{3}\rho R^3 \operatorname{tg}\alpha .$$

Nechť m je hmotnost vody, pak x-ová souřadnice těžiště vody je

$$x_\mathrm{v} = \frac{\frac{3\pi}{16} R m_+ - \frac{3\pi}{16} R(-m_+)}{m} = \frac{\pi\rho R^4 \operatorname{tg}\alpha}{4m}$$

a y-ová souřadnice je

$$y_\mathrm{v} = \frac{m\left(\frac{h_\mathrm{v}}{2} + \psi\right) + m_+\left(h_\mathrm{v} + \psi + \frac{3\pi}{32} R \operatorname{tg}\alpha\right) + (-m_+)\left(h_\mathrm{v} + \psi - \frac{3\pi}{32} R \operatorname{tg}\alpha\right)}{m} .$$

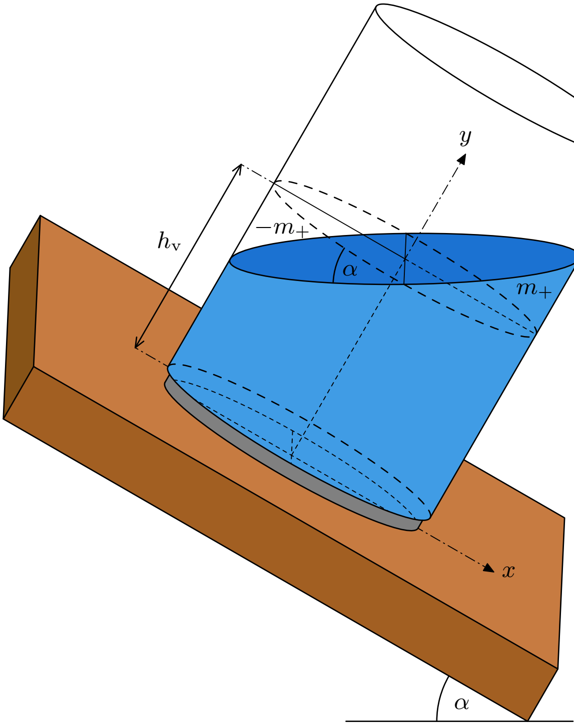
Po dosazení za m_+ a za $h_\mathrm{v} = m/(\pi\rho R^2)$, kde ρ je hustota vody, dostaneme

$$y_\mathrm{v} = \frac{m}{2\pi\rho R^2} + \psi + \frac{\pi}{8}\frac{\rho R^4 \operatorname{tg}^2\alpha}{m} .$$

Prázdná plechovka má těžiště ve výšce h_p, kterou můžeme buď odhadnout (je přibližně v polovině) nebo určit z experimentu. Těžiště soustavy voda+plechovka má souřadnice

$$x_\mathrm{t} = \frac{\pi\rho R^4 \operatorname{tg}\alpha}{4(M+m)} ,$$

$$y_\mathrm{t} = \frac{\frac{m^2}{2\pi\rho R^2} + m\psi + \frac{\pi}{8}\rho R^4 \operatorname{tg}^2\alpha + M h_\mathrm{p}}{M+m} .$$



Obr. 4: Plechovka na nakloněném dřevěném prkně. Dokážeme zjistit polohu těžiště.

Obrázek 5 popisuje hraniční situaci, kdy je plechovka těsně před převrhnutím. Těžiště T se nachází nad bodem O. Důležité úhly a vzdálenosti jsou: $|\angle SPT| = 90°$, $|\angle SOT| = 90° - \alpha$, $|SP| = y_\mathrm{t}$, $|PT| = x_\mathrm{t}$, $|SO| = r$. Platí

$$r = x_\mathrm{t} + y_\mathrm{t} \operatorname{tg} \alpha .$$

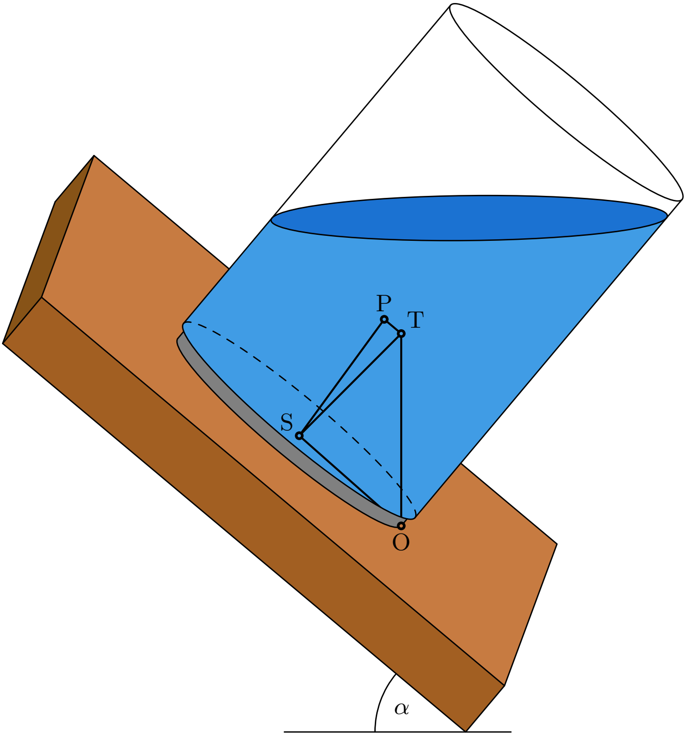
Po dosazení za x_t a y_t dostaneme kubickou rovnici pro $\operatorname{tg} \alpha$

$$r(M + m) = \frac{1}{4}\pi\rho R^4 \operatorname{tg} \alpha + \frac{m^2}{2\pi\rho R^2} \operatorname{tg} \alpha + m\psi \operatorname{tg} \alpha + \frac{\pi}{8}\rho R^4 \operatorname{tg}^3 \alpha + M h_\mathrm{p} \operatorname{tg} \alpha ,$$

$$0 = \operatorname{tg}^3 \alpha + \left(2 + \frac{8Mh_\mathrm{p}}{\pi\rho R^4} + \frac{8m\psi}{\pi\rho R^4} + \frac{4m^2}{\pi^2\rho^2 R^6}\right) \operatorname{tg} \alpha - \frac{8r(M + m)}{\pi\rho R^4} . \tag{2}$$

Kubickou rovnici dokážeme vyřešit analyticky. Ještě musíme zjistit limity platnosti této rovnice. Na hranici mezi režimem vlevo na obrázku 2 a režimem uprostřed bude platit

$$\operatorname{tg} \alpha_\mathrm{min} = \frac{h_\mathrm{v}}{R} = \frac{m_\mathrm{min}}{\pi\rho R^3} , \tag{3}$$



Obr. 5: Situace těsně před převrhnutím.

to je minimální úhel platnosti našeho modelu. Naopak na hranici mezi režimem vpravo a režimem uprostřed platí

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{H - h_{\mathrm{v}}}{R} = \frac{\pi \rho R^2 H - m_{\max}}{\pi \rho R^3} . \tag{4}$$

Hraniční hmotnosti vody $m_{\min}$, resp. $m_{\max}$ můžeme najít numericky tak, že porovnáme řešení kubické rovnice pro danou hmotnost vody s úhlem vypočteným podle vztahu (3), resp. (4). Pokud řešení kubické rovnice souhlasí s jedním z těch dvou úhlů, našli jsme hraniční úhel a tím pádem i hraniční hmotnost. Pro přechod mezi prvním a druhým režimem vyšla hmotnost vody 93,0 g při úhlu pádu 41,0°, zatímco přechod mezi druhým a třetím režimem by měl nastat při hmotnosti vody 253,9 g a úhlu 34,1°. Pro hmotnosti vody vyšší než 253,9 g pak očekáváme, že před převrhnutím plechovky bude voda přetékat přes okraj a plechovka spadne vždy při stejném úhlu 34,1°.

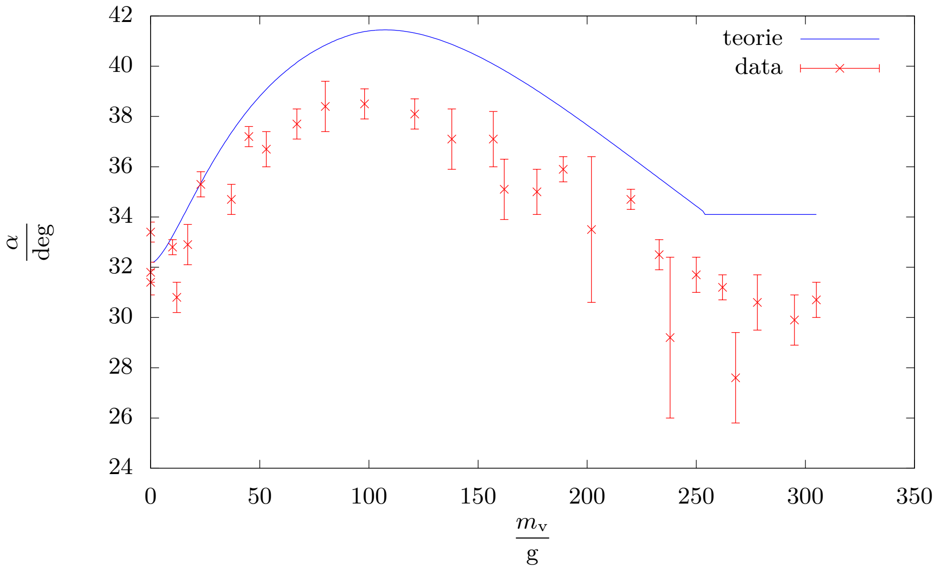
Pádové úhly v režimu 1 jsme museli najít numericky na počítači.[2]

[2] Vztahy pro objem a těžiště obecné válcové výseče zase buď můžete sami odvodit integrováním, nebo je najdete například zde `https://mathworld.wolfram.com/CylindricalWedge.html`

Výsledky

Výšku těžiště prázdné plechovky jsme určili experimentálně. V třech sériích měření jsme změřili pádový úhel prázdné plechovky jako $\alpha_0 = 32{,}2 \pm 0{,}4^\circ$. Podle vztahu $\operatorname{tg} \alpha_0 = r/h_\mathrm{p}$ jsme spočítali výšku těžiště plechovky jako $h_\mathrm{p} = 4{,}99 \pm 0{,}08\,\mathrm{cm}$. Tuto hodnotu můžeme dosadit do rovnic odvozených v odstavci o teorii a učinit nějaké předpovědi.

Výsledky experimentu i porovnání s teoretickou předpovědí vidíme na obrázku 6. Maximum pádového úhlu nastane ve druhém režimu (viz modrou křivku), takže jej můžeme určit nalezením největšího řešení rovnice (2). Teoretická předpověď maximálního pádového úhlu je $41{,}2^\circ$ při 105 g vody v plechovce.



Obr. 6: Závislost pádového úhlu na množství vody v plechovce. Chybové úsečky mají významnost 2σ. Ve vodorovném směru jsme chybové úsečky nekreslili, nepřesnost měření je všude $\pm 0{,}7$ g. Modrá křivka je teoretická předpověď pádového úhlu.

Měření závislosti pádového úhlu na množství vody v plechovce potvrdilo naši kvalitativní předpověď, že maximum pádového úhlu nastane při středním množství vody v plechovce. Z grafu můžeme vyčíst, že maximální pádový úhel je $38{,}5 \pm 0{,}5^\circ$ při hmotnosti vody 98 ± 6 g.

Naměřená data jsou taktéž konzistentní s předpovědí, že ve třetím režimu nad určitou kritickou hmotností je úhel pádu konstantní. Kritická hmotnost vody, přechod mezi druhým a třetím režimem, byla určena z grafu jako 278 ± 6 g a kritický pádový úhel jako $\alpha_\mathrm{max} = 30{,}4 \pm 0{,}7^\circ$. Na fotografii 7 vidíte situaci předpovězenou na obrázku 2 vpravo – voda přetéká okraj plechovky, avšak plechovka stojí v klidu.

Diskuze

V datech není vidět ani náznak přechodu (např. nespojitá změna první derivace křivky) mezi prvním a druhým režimem. Na to jsou jednotlivá měření příliš zatížena chybami. Žádný takový náznak však nepozorujeme ani v teoretické křivce, takže je možné, že žádný výrazný přechod mezi režimem 1 a 2 neexistuje. Experimentátor bohužel během experimentu nesledoval, kdy vodní hladina protíná dno a kdy už protíná plášť plechovky, takže nemůžeme nic říct o tom, kdy nastal přechod mezi režimy 1 a 2 v experimentu.

Problém, že materiál plechovky nemá rovnoměrnou tloušťku, ale například okraje dole a nahoře jsou zesílené, se podařilo obejít tím, že polohu těžiště h_p vystupující v rovnicích jsme určili experimentálně, nikoliv teoretickým výpočtem. Změřená hodnota se výrazně neliší od rozumného předpokladu $h_\mathrm{p} \approx H/2$. Na druhou stranu, změření h_p ze stejných dat zase způsobilo jistou provázanost mezi teorií a experimentálními výsledky, takže v levé části grafu pro malé hmotnosti vody se teoretická předpověď bude vždy shodovat s daty, ale to je jen umělá shoda právě kvůli určení h_p stejnou metodou.

Tvar modré křivky je velice podobný tvaru experimentálně naměřené závislosti pod ní. Největší rozpor mezi naměřenými daty a předpovědí je, že modrá křivka je posunutá o pár stupňů nahoru. To by naznačovalo systematickou chybu v provedení experimentu. Nabízí se vysvětlení, že jsme při zpracování obrazu špatně nakalibrovali rovinu, vůči které měříme úhel náklonu. To by vedlo k tomu, že teoretická křivka by byla o pár stupňů posunutá vůči naměřeným datům, jak skutečně pozorujeme. Musíme ale zdůraznit, že výška těžiště prázdné plechovky byla určená stejnou metodou, takže v každém případě se pro hmotnost vody 0 g budou teoretická i naměřená křivka shodovat.

Hraní si s počítačovým modelem plechovky s vodou také ukázalo, že i malé variace ve výšce podstavy ψ vedou k signifikantním změná ve tvaru a poloze teoretické křivky. Na to bychom měli dávat pozor, neboť ψ je veličina, která je nejednoznačně určená (zvlněné dno plechovky, nenulová tloušťka dna, smirkový papír připepený k podstavě) a změřili jsme ji s největší nejistotou. Například, pokud ponecháme všechny parametry modelu a změníme jen výšku podstavy na $\psi = 0{,}70\,\mathrm{cm}$, teoretická křivka bude dobře kopírovat data pro všechny hmotnosti vody. Ačkoliv jsme se při měření ψ (doufejme) o tolik nespletli, nepřesnost v ψ určitě mohla významnou měrou přispět k rozdílu mezi teoretickou předpovědí a daty.

Další oblastí, jež potřebuje nutně vylepšit, je přesnost měření. Pokud chceme v datech najít přechod mezi prvním a druhým režimem, pádové úhly musí být změřeny přesněji. Pomohlo by zdvihání prkna rovnoměrnou rychlostí (např. pomocí stroje), přesnější váhy, abychom přesněji změřili hmotnost vody, atd.

Závěr

Výsledky experimentu můžete vidět na obrázku 6. Podařilo se potvrdit původní předpoklad, že maximální pádový úhel nastane při středním množství vody v plechovce, nikoliv při prázdné plechovce ani plné plechovce. Tento maximální úhel byl změřen jako $38{,}5 \pm 0{,}5^\circ$ při hmotnosti vody $98 \pm 6\,\mathrm{g}$. Naměřená hmotnost je konzistentní s předpovězenou hmotností $105\,\mathrm{g}$ v intervalu 2σ, avšak předpovězený úhel $42{,}1^\circ$ se příliš liší od naměřené hodnoty.

Data taktéž podporují předpoklad, že pro velké hmotnosti vody v plechovce je úhel pádu konstantní. Tento úhel byl určen jako $30{,}4 \pm 0{,}7^\circ$ a kritická hmotnost vody, nad kterou je pádový úhel konstantní, je $278 \pm 6\,\mathrm{g}$. Ani úhel ani hmotnost nejsou konzistentní s předpovězenými hodnotami $34{,}1^\circ$, resp. 253,9 g. Je vysoce pravděpodobné, že měření bylo zatíženo systematickou chybou.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Obr. 7: Třetí režim převržení plechovky na záznamu z videa. Voda vytéká z plechovky, avšak úhel náklonu je menší než $\alpha_{\max}$, a tak se plechovka nepřevrátí. Kdybychom dále neměnili úhel náklonu, po odtečení přebytečné vody by se situace stabilizovala.