Úloha III.5 ... pašování ve vesmíru

9 bodů; průměr 2,97; řešilo 37 studentů

Dvě vesmírné lodě letí v jedné přímce proti sobě. Jejich počáteční vzdálenost je d. První se pohybuje rychlostí v_1, druhá v_2 (ve stejné vztažné soustavě). První dokáže vyvinout maximální zrychlení a_1, druhá a_2 (obě v libovolném směru). Posádky lodí si chtějí předat nějaké „zboží", ale k tomu potřebují, aby se lodě potkaly ve stejný čas na stejném místě a přitom měly stejnou rychlost. Za jaký nejmenší čas je toho možné dosáhnout? Relativistické jevy neuvažujte.

Jáchym drze ukradl původní Štěpánův nápad.

Přejdeme do souřadnic s počátkem v jedné z vesmírných lodí. Potom můžeme označit jejich vzdálenost x, vzájemnou rychlost v a maximální vzájemné zrychlení, které jsou schopné vyvinout, $a = a_1 + a_2$. Na začátku máme obecné $x = x_0 = x_1 - x_2$ a $v = v_0 = v_1 - v_2$ a chceme co nejrychleji docílit stavu, kdy bude platit $x = 0$ a $v = 0$.

Situaci si můžeme představit jako graf, kde na vodorovnou osu vynášíme x a na svislou osu vynášíme v, viz obrázek 1. Jsme-li v bodě (x, v), znamená to, že lodě jsou od sebe vzdálené x a mají vzájemnou rychlost v. Tento graf je znázorněním fázového prostoru, neboli prostoru všech možných fyzikálních stavů systému. Nás zajímá, jakou trajektorii v grafu máme zvolit, abychom se co nejrychleji dostali do počátku.

Při pohybu v grafu platí, že nad osou x je $v > 0$, tedy se pohybujeme doprava (ve směru rostoucího x), pod osou x se pohybujeme doleva.

Do levého horního kvadrantu grafu si můžeme nakreslit parabolu danou rovnicí

$$v = \sqrt{-2ax}\,.$$

Ta odpovídá pohybu s maximálním možným zpomalením $-a$. Tato parabola nám horní polovinu rozděluje na dvě části – ze všech bodů nalevo od paraboly se dokážeme dostat do počátku, aniž bychom přitom opustili levý horní kvadrant. Pokud se však nacházíme napravo od paraboly (například v bodě A na obrázku), nedokážeme zabrzdit včas, takže osu x protneme v nějakém bodě $x_1 > 0$, odkud se pak už přes pravý spodní kvadrant dostaneme do počátku.

Rozmysleme si, že to vždy půjde, protože v dolní polovině grafu je situace bodově obrácená vzhledem k počátku. Rovnice dělící paraboly tam má tvar

$$v = -\sqrt{2ax}\,.$$

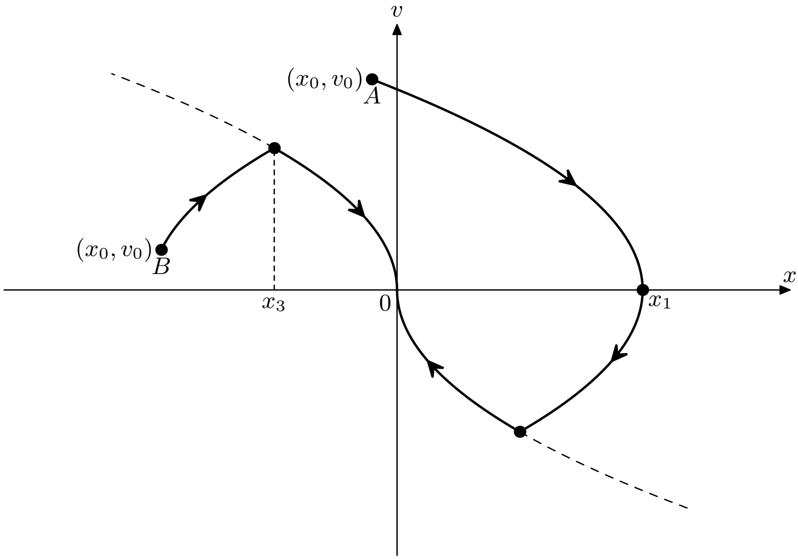
Platí dvě tvrzení. Zaprvé, čím více budeme zpomalovat, tím dříve dosáhneme vzdálenosti x_1 (a tím bude i menší). Zadruhé, čím bude x_1 menší, tím rychleji se poté přesuneme z bodu x_1 do středu (protože potom se jedná jen o pohyb po dráze dlouhé x_1 s nulovou počáteční i konečnou rychlostí).

Kombinací obou tvrzení dostaneme, že pokud se na začátku nacházíme napravo od horní paraboly, nejkratšího času dosáhneme tehdy, když se budeme celou dobu pohybovat s maximální velikostí zrychlení. Přesněji řečeno, do bodu x_1 a pak dál do poloviny vzdálenosti mezi nulou a x_1 to bude $-a$ a potom to bude a. Pohybu do x_1 odpovídají rovnice

$$t_1 = \frac{v_0}{a}\,,$$

$$x_1 - x_0 = v_0 t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{v_0^2}{2a}\,,$$

$$x_1 = x_0 + \frac{v_0^2}{2a}\,.$$



Obr. 1: Nákres situace. Všechny paraboly mají vrchol na ose x a jsou stejně zakřivené. Dělící paraboly jsou čárkovaně, čáry se šipkami odpovídají nejrychlejším trajektoriím do počátku.

Druhá část už je jen pohyb s nulovou počáteční i koncovou rychlostí přes vzdálenost x_1, zřejmě platí

$$\frac{x_1}{2} = \frac{1}{2} a \left(\frac{t_2}{2}\right)^2 ,$$
$$t_2^2 = \frac{4x_1}{a} .$$

Máme výsledek

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{2v_0^2 + 4ax_0}}{a} .$$

To bylo samozřejmě řešení jen pro první část příkladu, ve které jsme na začátku v horní části napravo od dělící paraboly. Jak jsme zmínili výše, pokud bychom zpočátku byli nalevo (například v bodě B na obrázku), dokážeme se do počátku souřadnicové soustavy dostat přímo (bez změny znaménka rychlosti). Přitom se samozřejmě chceme celou dobu pohybovat s co největší rychlostí, aby byl výsledný čas co nejmenší.

Řešením je opět pohyb s extremálním zrychlením – nejdříve to bude a, a to až do bodu, ve kterém protneme dělící parabolu. Poté změníme zrychlení na $-a$ a po parabole se dostaneme až do počátku. Označme vzdálenost, ve které protneme dělící parabolu, jako x_3. Dostáváme

$$x_3 = -\frac{v_3^2}{2a}\,,$$
$$v_3 = v_0 + at_3\,,$$
$$x_3 - x_0 = v_0 t_3 + \frac{1}{2}at_3^2\,,$$

což vede na

$$-\frac{(v_0 + at_3)^2}{2a} - x_0 = v_0 t_3 + \frac{1}{2}at_3^2\,,$$
$$2a^2 t_3^2 + 4v_0 a t_3 + 2ax_0 + v_0^2 = 0\,,$$
$$t_3 = \frac{-2v_0 \pm \sqrt{2v_0^2 - 4ax_0}}{2a}\,,$$

kde smysl má samozřejmě kladný čas, tedy kořen s +. Dále se už jen pohybujeme po známé parabole, takže hledaný čas, za který z v_3 zpomalíme na nulu, je

$$t_4 = \frac{v_3}{a} = \frac{v_0}{a} + t_3\,,$$

řešením druhé části tedy je

$$t = t_3 + t_4 = \frac{v_0}{a} + 2t_3 = \frac{-v_0 + \sqrt{2v_0^2 - 4ax_0}}{a}\,.$$

Shodou okolností jsme dostali vizuálně podobný výsledek jako předtím, čímž máme vše vyřešeno. Pro pořádek dodejme, že jsme celou dobu mlčky předpokládali, že se na začátku nacházíme v horní polovině grafu. Pokud by tomu tak nebylo, stačí využít středové symetrie grafu a provést záměnu souřadnic $(x_0,\, v_0) \to (x_0', v_0')$, kde $x_0' = -x_0$ a $v_0' = -v_0$. V nových proměnných už budeme v horní části grafu a budou pro ně platit výše odvozené rovnice.

Zbývá jen dosadit hodnoty ze zadání. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x_1 < x_2$ (v opačném případě bychom pouze prohodili rychlosti). Potom platí $x_0 = -d$ a počáteční poloha leží v levé polovině grafu. Rozmyslíme si, že mohou nastat dva případy

$$v_1 - v_2 \geq \sqrt{2\,(a_1 + a_2)\,d} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{(v_1 - v_2) + \sqrt{2\,(v_1 - v_2)^2 - 4\,(a_1 + a_2)\,d}}{a}\,,$$
$$v_1 - v_2 \leq \sqrt{2\,(a_1 + a_2)\,d} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-\,(v_1 - v_2) + \sqrt{2\,(v_1 - v_2)^2 + 4\,(a_1 + a_2)\,d}}{a}\,.$$

Na závěr dodejme, že existuje i mnohem jednodušší řešení. Konkrétně stačilo vzít výsledek úlohy III.5 z 32. ročníku a vyjádřit z něj minimální čas. Z toho plyne, že ptáme-li se na to, jak nejrychleji překonáme danou vzdálenost, možná jen chceme zjistit, kam nejdál se můžeme za daný čas dostat. Na tom, že se jedná o vzdálenost ve fázovém prostoru souřadnic a rychlostí, vlastně vůbec nezáleží.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.