Úloha III.3 ... bum-bác, bum-bác

6 bodů; průměr 4,03; řešilo 38 studentů

Představme si, že na geosynchronní oběžnou dráhu umístíme velké množství satelitů. Shodou okolností dojde ke srážce, která se vymkne kontrole a vytvoří tenkou sférickou vrstvu homogenně posetou deseti miliony úlomků o průměrné velikosti $x = 10\,\mathrm{cm}$. Předpokládejte, že směry rychlostí jednotlivých úlomků jsou v tečné rovině ke sféře orientované náhodně. Kolik času průměrně uplyne mezi dvěma srážkami?

Dodo se učil na státnice o transportních jevech v plynu.

Podľa zadania predpokladáme, že sa všetky úlomky nachádzajú v tenkej vrstve. Geosynchrónna dráha je charakterizovaná dobou obehu okolo Zeme a je rovná jednému siderickému dňu $T = 23^{\mathrm{h}}\,56^{\mathrm{m}}\,4^{\mathrm{s}}$. Polomer tejto sférickej vrstvy určíme z rovnováhy dostredivej a odstredivej sily

$$\frac{GM}{R^2} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R\,,$$

$$R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 42\,164\,\mathrm{km}\,.$$

Ďalej potrebujeme určiť rýchlosť pohybu objektov. Tú máme jednoducho ako dráhu za čas

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 3{,}075\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Pristúpme k jadru úlohy. Stredný čas medzi zrážkou jedného konkrétneho telesa s iným určíme ako čas, za ktorý je pravdepodobnosť výskytu iného telesa v potenciálne kolíznom objeme nášho telesa jednotková. Vzhľadom na náhodné rozdelenie smerov rýchlosti je vzájomná rýchlosť stretu objektov v priemere[1] $u = \sqrt{2}v$. Náš kolízny objem konštruujeme pozdĺž trajektórie nášho telesa ako „trubicu“, v ktorej ak sa nachádza stred iného telesa, dôjde k zrážke. Na rozdiel od rovnakých úvah v prípade strednej voľnej dráhy častice v ideálnom plyne, vzhľadom na rovnakú výšku všetkých objektov riešime len 2D problém. Trubicu nahradí pás šírky x na každú stranu od trajektórie telesa.[2] Za čas t má teda kolízna plocha veľkosť $A(t) = 2x\sqrt{2}vt$.

Určíme ďalej plošnú hustotu častíc na sfére ρ. Na ploche povrchu gule s polomerom R sa nachádza desať miliónov úlomkov

$$\rho = \frac{N}{S} = \frac{N}{4\pi R^2}\,.$$

Ak položíme očakávaný počet častíc v kolíznej ploche rovný jednej

$$1 = \rho A = \frac{Nx\sqrt{2}vt}{2\pi R^2}\,,$$

dostávame stredný čas medzi zrážkami jedného konkrétneho telesa s iným telesom

$$t = \frac{\pi R^2}{Nx\sqrt{2}v} = \frac{RT}{\sqrt{2}Nx}$$

[1]
$$u = \left\langle |v\mathbf{n}_1 + v\mathbf{n}_2| \right\rangle = v\left\langle \sqrt{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_1 + 2\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_2\mathbf{n}_2} \right\rangle = v\left\langle \sqrt{1 + 2\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 + 1} \right\rangle = v\sqrt{1 + 2\cdot 0 + 1} = \sqrt{2}v$$

[2] Na to, aby sa telesá zrazili, stačí, aby sa ich stredy nachádzali vo vzdialenosti x od seba, pričom na smere spojnice stredov nezáleží.

Zadanie úlohy sa však pýta na strednú dobu medzi zrážkami ľubovoľných telies. Tieto zrážky budú logicky N-krát častejšie, čiže čas ešte musíme predeliť počtom objektov. Ale ešte je tu jeden veľmi dôležitý detail – takto sme zarátali každú zrážku dvakrát, musíme teda ešte čas prenásobiť dvomi.

$$t = \frac{2RT}{\sqrt{2}xN^2} \doteq 0{,}5\,\mathrm{s}\,.$$

Zrážky medzi týmito objektami by boli teda veľmi časté. Z počtu úlomkov môžeme za predpokladu strednej hustoty približne $500\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ (veľká časť uvažovanej veľkosti úlomkov je prázdny priestor) odhadnúť ich celkovú hmotnosť, ktorá sa pohybuje len okolo $5000\,\mathrm{t}$. V skutočnom prípade budú mať úlomky rôzne veľkosti a samozrejme, že sa nebudú nachádzať len v tenkej vrstve. No už aj náš idealizovaný prípad jasne ukazuje, aké ničivé dôsledky môže mať nekontrolovaný pohyb satelitov.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`