Úloha II.4 ... vytahování ledu teplem

7 bodů; průměr 4,33; řešilo 55 studentů

Ve sklepě v hloubce $h = 4{,}2\,\mathrm{m}$ je uskladněný led, který potřebujeme vytáhnout nahoru. Máme tepelný stroj, který pracuje s teplotou okolí a ledu s $\eta = 12\,\%$ účinností vůči jeho maximální možné účinnosti (dané Carnotovým cyklem). Teplota vzduchu je $T_\mathrm{v} = 24\,^\circ\mathrm{C}$, vytažený led potřebujeme mít na teplotě $T_\mathrm{max} = -9{,}0\,^\circ\mathrm{C}$. Jakou teplotu musí mít led ve sklepě, aby jej bylo možné vytáhnout pomocí tohoto stroje? Proč to půjde, i když přitom zahřejeme led, který současně vytahujeme?

Karel má zálibu v podivných strojích.

Carnotov cyklus je teoretický model stroja, ktorý pracuje čisto tým, že presúva teplo z teplejšieho objektu (v našom prípade vzduch) do chladnejšieho (v našom prípade ten vyťahovaný ľad). Dá sa spočítať, že maximálna dosiahnuteľná účinnosť je v takom prípade

$$\eta_\mathrm{C} = 1 - \frac{T}{T_\mathrm{v}}\,,$$

pričom zadanie hovorí, že náš stroj má celkovú účinnosť $\eta_\mathrm{c} = \eta\,\eta_\mathrm{C}$.

Takže už vieme s akou účinnosťou daný ľad vyťahujeme. Čo z nej vieme ešte zistiť? Vieme, že účinnosť udáva podiel medzi vykonanou prácou a dodaným teplom. Teplo dodáva okolitý vzduch, čiže to nás až tak nezaujíma. To, čo nás zaujíma je teplo dodané ľadu. Teplo, ktoré nám dodal vzduch sa môže premeniť jedine na prácu a na teplo, ktoré dodáme ľadu. Symbolicky $Q_\mathrm{in} = W + Q_\mathrm{out}$. Z toho môžeme (s použitím definície účinnosti $\eta_\mathrm{c} = W/Q_\mathrm{in}$) vyjadriť teplo dodané ľadu v závislosti na vykonanej práci

$$Q_\mathrm{out} = \frac{W}{\eta_\mathrm{c}} - W = \frac{1-\eta_\mathrm{c}}{\eta_\mathrm{c}} W\,.$$

Pričom netreba zabúdať, že η_c závisí od teploty ľadu, ktorá sa bude v priebehu vyťahovania meniť.

Predpokladajme, že vyťahovaný kus ľadu má hmotnosť m a počiatočnú teplotu T_0 (naša neznáma). Potom na to, aby sme ho zdvihli o malú zmenu výšky $\mathrm{d}h$ je potrebná práca $\mathrm{d}W = mg\,\mathrm{d}h$. Ľad teda príjme teplo $\mathrm{d}Q = mg\,\mathrm{d}h\,(1-\eta_\mathrm{c})\,/\eta_\mathrm{c}$. Keď si mernú tepelnú kapacitu ľadu označíme c a dosadíme za η_c dostávame diferenciálnu rovnicu

$$\mathrm{d}T = \frac{g}{c}\frac{1-\eta\left(1-\frac{T}{T_\mathrm{v}}\right)}{\eta\left(1-\frac{T}{T_\mathrm{v}}\right)}\,\mathrm{d}h\,,$$

kde aktuálnu teplotu ľadu značíme pre jednoduchosť T.

Teploty sú samozrejme udávané v Kelvinoch a tým pádom môžeme očakávať, že podiel T/T_v bude približne 1. Taktiež sa dá predpokladať, že $1 \gg \eta\,(1 - T/T_\mathrm{v})$, čo nám výraz napravo značne zjednoduší a diferenciálnu rovnicu môžeme prepísať do separovaného tvaru

$$(T_\mathrm{v} - T)\,\mathrm{d}T = \frac{gT_\mathrm{v}}{c\,\eta}\,\mathrm{d}h\,,$$

Tak nám stačí už len obe strany zintegrovať.

Na pravej strane sa integruje konštanta, takže výsledok bude jednoducho

$$\frac{gT_\mathrm{v}}{c\eta}h\,,$$

kde zo zadania $h = 4{,}2\,\mathrm{m}$ je výška, o ktorú sme ľad vytiahli.

Ľavá strana je polynóm, takže primitívna funkcia k nej je jednoducho $T_\mathrm{v}T - T^2/2$. Integrujeme od T_0 po T_max, a tak integrál bude

$$T_\mathrm{v}(T_\mathrm{max} - T_0) - \frac{T_\mathrm{max}^2 - T_0^2}{2}\,,$$

takže dostávame kvadratickú rovnicu

$$\frac{1}{2}T_0^2 - T_\mathrm{v}T_0 - \frac{1}{2}T_\mathrm{max}^2 + T_\mathrm{v}T_\mathrm{max} - \frac{gT_\mathrm{v}}{c\eta}h = 0\,.$$

Rovnica nevyzerá najkrajšie, ale všetko (okrem neznámej) sú konkrétne zadané čísla. Stačí nám teda numericky dopočítať, pričom je dôležité nezabudnúť, že teploty treba dosádzať v Kelvinoch.

Dostaneme, že $T_0 \doteq -10{,}5\,^\circ\mathrm{C}$ (druhý koreň vychádza okolo $58\,^\circ\mathrm{C}$, čo nedáva zmysel nielen preto, že by sa už nejednalo o ľad, ale hlavne preto, že by tento ľad bol teplejší než vzduch, pričom všetky naše úvahy pracovali s tým, že ľad je chladič). Môžeme si rovno overiť, že výraz $\eta\,(1 - T/T_\mathrm{v})$ dosahuje hodnoty maximálne rádu 0,01, čiže to, že sme ho zanedbali voči 1, bolo úplne v poriadku.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz