

Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

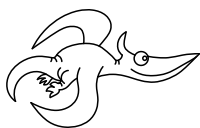
je to tu, poslední série 34. ročníku FYKOSu!

A co že jsme si to pro vás připravili? Rozebereme si pohyb krasobruslařky při piruetě, pokusíme se určit stabilní polohu matematického kyvadla, ale také prodloužení homogenní pružiny.

V experimentální úloze si zahrajeme na nešiky, kteří vylévají skleničky s vodou (někteří experti naopak upřednostňují misticčky s mlékem). Poslední díl letošního seriálu se bude zabývat zejména polarizací.

Závěrem bychom vám chtěli moc poděkovat za krásný, avšak netradiční 34. ročník FYKOSu. Věříme, že se opět shledáme příští školní rok a někteří z vás třeba rozšíří naše řady. A teď už jen pohodově ukončení školního roku a hurá na prázdniny!

Organizátoři



Zadání VI. série

Termín uploadu: 4. 5. 2021 23.59

Termín odeslání: 3. 5. 2021

Úloha VI.1 ... krasobruslařka

3 body

Uvažujme krasobruslařku s rozpaženými rukama, točící se úhlovou rychlostí ω kolem své osy. Jakou úhlovou rychlostí ω' se bude točit, pokud připaží? Jakou práci musí vykonat, aby připažila? Tvar krasobruslařky aproximujte dle svého uvážení.

Úloha VI.2 ... rotující kyvadélko

3 body

Mějme matematické kyvadlo délky l se závažím o hmotnosti m v tíhovém poli se zrychlením g . Kyvadélko uvedeme do rotačního pohybu okolo svislé osy s konstantní úhlovou rychlostí ω . Určete stabilní polohy kyvadla. Výsledek vyjádřete pomocí úhlu od svislice.

Úloha VI.3 ... třikrát a dost

5 bodů

Úsek silnice o délce $a = 2,8$ km začíná semaforem s periodou T , na kterém signál zeleného světla trvá po dobu $t_1 = 79$ s. Na konci tohoto úseku je druhý semafor se stejnou periodou, ale délka trvání téhož signálu je pro něj $t_2 = 53$ s. Na obou semaforech se zelené světlo rozsvítí vždy ve stejný okamžik. Spočítejte, za jak dlouho průměrně přejedete celý úsek silnice (včetně čekání na semaforech), pokud se při jízdě pohybujete rychlostí $v = 60$ km·h⁻¹. Čas potřebný na rozjezdy a brzdění zanedbejte.

Úloha VI.4 ... spatřil jsem kometu

8 bodů

Dlouhoperiodické a neperiodické komety začnou vyvrhovat plyn zpravidla při překročení dráhy Saturnu. Do té doby se pro pozorovatele na Zemi jeví jen jako malé kusy skal, a jsou tedy téměř

nepozorovatelné. Uvažujte kometu se vzdáleností v přísluní rovnou $q = 0,5$ au a odhadněte, za jak dlouho od okamžiku, kdy překoná dráhu Saturnu, poprvé překročí dráhu Země. Trajektorie komety má excentricitu velmi blízko jedné.

Úloha VI.5 ... těžká pružina

9 bodů

Mějme homogenní pružinu s tuhostí k a hmotností m , jejíž šířka je zanedbatelná vůči její délce. Pružinu uchytneme na jednom konci tak, aby kolem něj mohla rotovat, a následně ji roztočíme úhlovou rychlostí ω . Kolikrát se tato pružina při rotaci prodlouží? Vliv tíhového pole neuvažujte.

Úloha VI.P ... nebezpečnější korona

10 bodů

Dojde-li k výronu koronální hmoty ze Slunce, začne se tato hmota velkou rychlostí šířit prostorem. Někdy může zasáhnout Zemi a ovlivnit její magnetické pole. Odhadněte, jak velké elektrické proudy by mohl takový výron generovat na Zemi v síti elektrického vedení. Na jakých parametrech to závisí? Okomentujte, jaké by měla taková událost dopady na lidskou civilizaci.

Úloha VI.E ... rozlitá sklenička

12 bodů

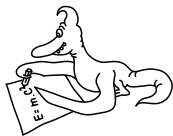
Veźmte si skleničku, plechovku či jinou válcově symetrickou nádobu a změřte závislost úhlu náklonu, při kterém se převrhne, na množství vody uvnitř. Doporučujeme použít nádobu s větším poměrem výšky ku průměru podstavu.

Úloha VI.S ... nabitá struna

10 bodů

Uvažujte napnutou strunu o délkové hustotě ρ , která je navíc rovnoměrně nabitá s délkovou nábojovou hustotou λ . Napětí ve struně je T . Struna se nachází v magnetickém poli o konstantní velikosti B , jež je ve směru struny v rovnovážné poloze. Vaším úkolem bude popsat několik aspektů kmitání této struny. Nejprve bude třeba sestavit vlnovou rovnici. Zanedbejte indukční efekty (předpokládejte, že struna je perfektně izolující, a tedy nábojová hustota zůstává konstantní) a určete Lorentzovu sílu na jednotku délky pro malé oscilace struny v obou směrech kolmých na směr jejího napnutí. Tuto sílu použijte pro sestavení vlnové rovnice (ta dále obsahuje sílu plynoucí z napětí struny). Proveďte fourierovskou substituci a určete disperzní vztah v aproximaci malého pole B ; konkrétně uvažujte členy do prvního řádu v $\beta = \frac{\lambda B}{k\sqrt{\rho T}} \ll 1$, kde k je vlnové číslo. Určete dva polarizační vektory, tentokrát pouze do nultého řádu v β .

Nyní předpokládejte, že v určitém místě struny vytvoříme vlnu, která bude oscilovat pouze v jednom směru. V jaké vzdálenosti od původního bodu bude vlna stočená o devadesát stupňů?



Řešení V. série

Úloha V.1 ... náboj Země

3 body; (chybí statistiky)

Jaký celkový náboj by musela mít Země, aby elektrony blízko jejího povrchu odlétávaly pryč?
 Jak by se tento náboj lišil pro protony? Karel má rád planetární úlohy.

Elektron blízko povrchu Země je přitahován gravitační silou

$$F_g = G \frac{m_e M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2},$$

kde $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ je gravitační konstanta, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ hmotnost elektronu, $M_{\oplus} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ hmotnost Země a $R_{\oplus} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ poloměr Země. Odstředivou sílu nemusíme uvažovat, i když Země rotuje, protože její vliv je menší než 1 % gravitační síly.

Abyste částice začala stoupat, pak je potřeba, aby elektrická síla (Coulombova) byla vyšší než gravitační, tedy

$$\begin{aligned} F_e &\geq F_g, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_e Q_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} &\geq G \frac{m_e M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}, \\ Q_{\oplus} &\leq 4\pi\epsilon G \frac{m_e M_{\oplus}}{-e} \doteq -2,5 \cdot 10^{-7} \text{ C}, \end{aligned}$$

kde $\epsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ je permitivita prostředí, která je ve vzduchu velice blízka permitivitě vakua, $q_e = -e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ náboj elektronu (jeden záporný elementární náboj) a Q_{\oplus} je hledaný náboj Země. Protože jsme dělili záporným q_e , znaménko v nerovnici se otočilo. Pro elektron nám vyšlo, že pokud by Země měla náboj $-2,5 \cdot 10^{-7} \text{ C}$, pak by se na ní elektrony neudržely a „utíkal“ by nám do vesmíru. Jde o minimální náboj, co se absolutní hodnoty týče. Pokud bude ještě větší (absolutně) záporný náboj, tak budou elektrony ulétávat ještě snadněji (rychleji).

Podívejme se na variantu úlohy pro protony. Ve výsledku stačí nahradit hmotnost elektronu hmotností protonu $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, náboj elektronu za náboj protonu $q_p = -q_e = +e$ a opět otočit nerovnost. Dostáváme výsledek

$$Q_{\oplus} \geq 4\pi\epsilon G \frac{m_p M_{\oplus}}{e} \doteq 4,6 \cdot 10^{-4} \text{ C}.$$

Náboj Země by musel být zhruba 1800krát větší a opačného znaménka, aby od ní odlétávaly protony, pokud situaci srovnáme s elektrony. Další zajímavé porovnání by mohlo být s autobaterií. Typická autobaterie má kapacitu řádově 70 Ah, což při plném nabití odpovídá 250 000 C. Nejde sice o dokonalou analogii a není to „odhalený náboj“, jako by to bylo u Země, ale jde spíše o potenciál toho, kolik náboje nám umožní baterie díky chemickým reakcím přenést elektrickým obvodem.

Vidíme, že Země musí být jako celek relativně dobře neutrální. I když k tomu bychom mohli dojít logickou úvahou. Pokud by totiž celkový náboj Země stačil na to, aby nějaký typ částic

odlétával, tak by přicházela o náboj tohoto znaménka odlétáním těchto částí, až by se její celkový náboj opět vrátil přibližně do neutrální stavu.

Karel Kolář

karel@fykos.cz@fykos.cz

Úloha V.2 ... retardovaný Jupiter

3 body; (chybí statistiky)

Siderická perioda Jupiteru činí přibližně 11,9 roku, rychlost světla je $3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, vzájemnou vzdálenost Země a Slunce předpokládejte rovnu $150 \cdot 10^9 \text{ m}$. Pomocí těchto veličin odhadněte, jak dlouho poletí světlo z Jupiteru na Zem, jestliže se Jupiter nachází na místě, na které se z opozice dostane za jednu čtvrtinu synodické periody.

Vášek si vzpomněl na observace Oleho Rømera.

Při opozici se nacházejí Slunce, Země a Jupiter na jedné přímce a po čtvrtině synodické periody budou tvořit vrcholy pravoúhlého trojúhelníku s přeponou Země-Jupiter. Vzdálenost Jupiteru od Slunce je podle třetího Keplerova zákona

$$a_J = a_Z \left(\frac{T_J}{T_Z} \right)^{\frac{2}{3}},$$

kde T jsou periody oběhu planet. Vzdálenost Jupiteru a Země pak spočítáme podle Pythagorovy věty jako

$$l = \sqrt{a_J^2 + a_Z^2}.$$

Světlo tuto vzdálenost urazí za čas

$$t = \frac{l}{c}$$

a po dosazení dostáváme

$$t = \frac{1}{c} \sqrt{a_Z^2 \left(\frac{T_J}{T_Z} \right)^{\frac{4}{3}} + a_Z^2} = \frac{a_Z}{c} \sqrt{\left(\frac{T_J}{T_Z} \right)^{\frac{4}{3}} + 1}.$$

Při počítání s hodnotami ze zadání vychází číselně $t \doteq 44 \text{ min}$.

Veronika Hendrychová

vercah@fykos.cz@fykos.cz

Úloha V.3 ... nedobrovolné breathariánství

6 bodů; (chybí statistiky)

Lukáš si chtěl uvařit večeři. Postavil hrnec na plotnu, ale zapomněl do něj dát vodu (nebo cokoliv jiného). Teplota hrnce a vzduchu uvnitř něj se ustálila na $100 \text{ }^\circ\text{C}$ (neptejte se, jak se to bez vody podařilo). Lukáš si záhy svoji chybu uvědomil a hrnec z plotny sundal, po vychladnutí na pokojovou teplotu z něj ale nedokázal sejmout poklici o ploše S a hmotnosti m . Spočítejte, jakou silou poklice na hrnci držela, pokud ji tam Lukáš dal

1. těsně před sundáním z plotny,
2. před začátkem přípravy večeře.

Předpokládejte, že vzduch se chová jako ideální plyn.

Lukáš a jeho kulinářské umění.

Poklice položená před koncem varu

Poklice drží díky rozdílu tlaků vně a uvnitř hrnce. Těsně před položením poklice má vzduch v hrnci atmosférický tlak $p_1 = p_a$ a teplotu $T_1 = 100^\circ\text{C}$. Objem ani počet částic se při chladnutí nemění, jde o izochorický děj. Po vychladnutí na pokojovou teplotu T_2 má tlak

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

Poklice tedy drží silou

$$F = S(p_a - p_2) = Sp_a \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).$$

Poklice položená před začátkem varu

V tomto případě bude tlak před začátkem chladnutí jiný, neboť poklice svojí vahou v hrnci udrží přetlak pouze

$$p_1 = p_a + \frac{mg}{S}.$$

Vzduch pak opět chladne izochorickým dějem do výsledného tlaku

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = \left(p_a + \frac{mg}{S}\right) \frac{T_2}{T_1}.$$

Poklice nyní bude držet silou

$$F = S(p_a - p_2) = Sp_a \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) - mg \frac{T_2}{T_1}.$$

Tento vztah ale platí pouze za předpokladu, že přetlak, který ohrátím vzduchu uvnitř hrnce vznikne, bude větší než hodnota, kterou udrží poklice. Potom část vzduchu unikne a tlak se ustálí na hodnotě, kterou jsme odvodili výše. Tím dostáváme podmínku

$$m \leq \frac{Sp_a}{g} \left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right).$$

Pokud nebude splněna, poklice se vůbec nepřilepí.

Lukáš Timko

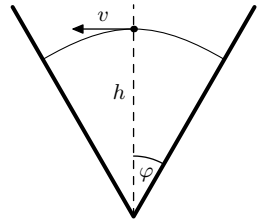
lukast@fykos.cz@fykos.cz

Úloha V.4 ... perioda velkých kmitů

Uvažujme dvě poloroviny, které svírají úhel $2\varphi < \pi$. Umístíme je tak, aby jejich společná přímka byla vodorovná a jejich rovina symetrie byla svislá, takže vytvoří jakési údolí. Následně vezmeme hmotný bod a z výšky h nad společnou přímkou jej hodíme rychlostí v ve vodorovném směru tak, aby začal konat periodický pohyb jako na obrázku. Jak velkou rychlostí ho musíme hodit? Předpokládejte dokonale pružné odrazy od polorovin.

Legolase už nudí periody malých kmitů.

7 bodů; (chybí statistiky)



Budeme hľadať symetrické riešenie – čiže hmotný bod bude behať po jednej parabole. Jej vrchol je zrejme na ose, čiže rýchlosť, ktorou ho máme hodiť bude mať nulovú zložku v smere y .

Zároveň bude treba, aby $v \equiv v_x = \text{konst}$, čiže náš hmotný bod musí na polovinu dopadnúť vždy kolmo. Splňme teda tieto podmienky.

Súradnice hmotného bodu v čase t od hodenia budú

$$\begin{aligned}x &= vt, \\y &= h - \frac{1}{2}gt^2,\end{aligned}$$

kde sme počiatok umiestnili do spoločnej priamky rovín. V tejto sústave budú súradnice polroviny ležiacej v prvom kvadrante spĺňať

$$y \operatorname{tg} \varphi = x.$$

Dosadíme a dostávame kvadratickú rovnicu pre čas dopadu

$$0 = \frac{1}{2}gt_d^2 \operatorname{tg} \varphi + vt_d - h \operatorname{tg} \varphi,$$

ktorej kladný koreň je

$$t_d = \frac{v}{g \operatorname{tg} \varphi} \left(\sqrt{1 + \frac{2gh \operatorname{tg}^2 \varphi}{v^2}} - 1 \right).$$

No a ako sme už spomínali, tak v tomto čase musí byť vektor rýchlosti kolmý na polovinu. Symbolicky

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|v_y(t_d)|}{v}.$$

Rýchlosť v smere y bude $v_y(t) = -gt$. Podosádzame

$$v \operatorname{tg} \varphi = gt_d = \frac{v}{\operatorname{tg} \varphi} \left(\sqrt{1 + \frac{2gh \operatorname{tg}^2 \varphi}{v^2}} - 1 \right)$$

a vyjadríme

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{2 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}.$$

Čo je zjavne rýchlosť, ktorou musíme náš hmotný bod hodiť (a teda odpoveď na otázku zo zadania).

Ak chceme spočítať periódu, tak to stačí dosadiť späť do vzťahu pre t_d a využiť fakt, že je to presne štvrtina periódy

$$T = 4t_d = \frac{4v}{g \operatorname{tg} \varphi} \left(\sqrt{1 + \frac{2gh \operatorname{tg}^2 \varphi}{v^2}} - 1 \right) = 4\sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}.$$

Vidíme, že pre $\varphi \rightarrow 0$ ide $T \rightarrow 0$, čo celkom dáva zmysel. Zároveň pre $\varphi \rightarrow \pi/2$ by sme čakali, že aj $v \rightarrow 0$ a pohyb bude čím ďalej, tým viac pripomínať voľný pád, odraz späť, voľný pád na opačnú polovinu a odraz späť, čiže limita $T \rightarrow 4\sqrt{2h/g}$ presne sedí.

Šimon Pajger

legolas@fykos.cz@fykos.cz

Úloha V.5 . . . rheonomní katapult

10 bodů; (chybí statistiky)

Mějme tenkou obdélníkovou desku, která se otáčí kolem své horizontálně orientované hrany konstantní úhlovou rychlostí. V okamžiku, kdy se deska nachází ve vodorovné poloze a otáčí se směrem nahoru, na ni umístíme malý kvádrík tak, aby se vzhledem k ní zpočátku nepohyboval. Jak se bude kvádrík po desce pohybovat, jestliže je tření mezi oběma tělesy nulové? Kam musíme kvádrík na začátku umístit, aby z desky vyletěl po čtvrtině otáčky desky? Diskutujte dále všechny potřebné předpoklady, které pro to musí být splněny.

Bonus Jaký výkon dodává deska kvádríku a jakou celkovou práci na něm vykoná?

Váška už omrzely příklady na skleronomní vazby, tak přišel s vazbou rheonomní.

Odvození pohybových rovnic

Jedná se o mechanickou úlohu s vazbou, neboť malý kvádrík můžeme aproximovat hmotným bodem vázaného na desku do okamžiku, kdy z ní vyletí. Deska působí na kvádrík jako vazba závislá na čase, tj. rheonomní vazba (odtud název úlohy). Vazba nezávislá na čase se nazývá skleronomní. Pohyb kvádríku nalezneme vyřešením pohybových rovnic. Nejdříve však potřebujeme zvolit souřadnice. Problém je efektivně dvourozměrný, protože se kvádrík bude pohybovat po desce ve směru kolmém k ose otáčení a také se bude otáčet společně s deskou. Stačí nám proto zvolit dvě kartézské souřadnice x , y s počátkem na ose otáčení. Dále si zavedeme druhou sadu souřadnic, a to polární souřadnice r , φ . Souřadnice r měří vzdálenost od osy otáčení a úhel φ měří orientovaný úhel sevřený spojnicí počátku a daného bodu s kladnou poloosou x , jak je vidět na obrázku 1. Transformační vztahy z polárních do kartézských souřadnic jsou

$$x = r \cos \varphi, \quad (1)$$

$$y = r \sin \varphi. \quad (2)$$

Pohyb kvádríku v závislosti na čase t je pak dán funkcemi $x = x(t)$ a $y = y(t)$, resp. funkcemi $r = r(t)$ a $\varphi = \varphi(t)$. Nachází-li se kvádrík na desce, je souřadnice φ kvádríku totožná s úhlem natočení desky, pro který ze zadání platí $\varphi(t) = \omega t$, kde $\omega > 0$ je konstantní velikost úhlové rychlosti. Kartézské souřadnice x a y generují vektorová pole \mathbf{e}_x a \mathbf{e}_y . To jsou tečné vektory k souřadnicovým čarám $y = \text{konst}$ a $x = \text{konst}$ mající jednotkovou velikost. Vektor rychlosti \mathbf{v} kvádríku pak je

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t) \mathbf{e}_x + \dot{y}(t) \mathbf{e}_y,$$

kde tečka značí (totální) časovou derivaci. Časovou závislost zdůrazněnou v kulatých závorkách budeme často pro přehlednost vynechávat. Časovou derivací vektoru rychlosti \mathbf{v} dostaneme zrychlení kvádríku

$$\mathbf{a} = \ddot{x} \mathbf{e}_x + \ddot{y} \mathbf{e}_y. \quad (3)$$

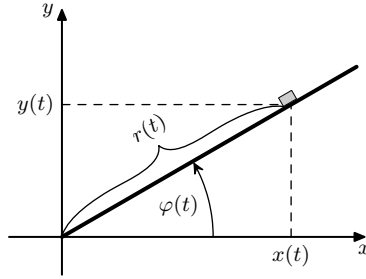
Poznamenejme, že jsme využili faktu, že se vektor \mathbf{e}_x (jeho velikost i směr) podél trajektorie kvádríku nemění (podobně i vektor \mathbf{e}_y), neboli

$$\dot{\mathbf{e}}_x \equiv \frac{d\mathbf{e}_x}{dt} = 0.$$

Nyní využijeme transformační vztahy (1) a (2), do kterých dosadíme konkrétní souřadnice kvádríku a rovnice (totálně) zderivujeme podle času t , čímž dostaneme

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi,$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi.$$



Obr. 1: Kartézské a polární souřadnice.

Další časovou derivací získáme

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi, \\ \ddot{y} &= \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi.\end{aligned}$$

Tyto rovnice dosadíme do vztahu (3), čímž dostaneme zrychlení ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (\ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \mathbf{e}_x + \\ &+ (\ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \mathbf{e}_y.\end{aligned}\quad (4)$$

Celková síla \mathbf{F} působící na kvádřík je dána součtem reakce \mathbf{N} desky na kvádřík a tíhové síly $m\mathbf{g}$, neboli

$$\mathbf{F} = \mathbf{N} + m\mathbf{g} = -(N \sin \varphi) \mathbf{e}_x + (N \cos \varphi - mg) \mathbf{e}_y, \quad (5)$$

kde N je (orientovaná) velikost reakce \mathbf{N} , m je hmotnost a g je velikost tíhového zrychlení. Druhý Newtonův pohybový zákon lze matematicky vyjádřit ve tvaru $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Z rovnic (4) a (5) potom dostáváme pohybové rovnice

$$-N \sin \varphi = m (\ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi), \quad (6)$$

$$N \cos \varphi - mg = m (\ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi). \quad (7)$$

Jedná se o soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic se třemi neznámými funkcemi $r(t)$, $\varphi(t)$ a $N(t)$. Nezapomeňme však, že ještě máme zadán pohyb desky (a tedy i jednu souřadnici kvádříku) $\varphi(t) = \omega t$. Ještě před tím, než dosadíme $\varphi(t) = \omega t$, upravíme soustavu rovnic (6) a (7) do jednodušší podoby. Rovnici (6) vynásobíme $(\sin \varphi)/m$ a rovnici (7) vynásobíme $(\cos \varphi)/m$, čímž dostaneme

$$\begin{aligned}-\frac{N}{m} \sin^2 \varphi &= \ddot{r} \sin \varphi \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin^2 \varphi - r\ddot{\varphi} \sin^2 \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi, \\ \frac{N}{m} \cos^2 \varphi - g \cos \varphi &= \ddot{r} \sin \varphi \cos \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos^2 \varphi + r\ddot{\varphi} \cos^2 \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi.\end{aligned}$$

Nyní odečteme první rovnici od druhé

$$\frac{N}{m} - g \cos \varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}. \quad (8)$$

Tuto rovnici vynásobíme $\sin \varphi$ a sečteme ji s rovnicí (6) vydělenou m . Výsledek této operace ještě vydělíme $\cos \varphi$ a dostaneme

$$-g \sin \varphi = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2. \quad (9)$$

Soustavu rovnic (6) a (7) jsme tak zjednodušili na soustavu rovnic (8) a (9). K nalezení pohybových rovnic v takto jednoduchém tvaru bylo potřeba s rovnicemi manipulovat způsobem, který nemusí být na první pohled zřejmý. Ukážeme si proto alternativní postup jejich odvození. Na místo vektorové báze $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ budeme pracovat s bází $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi)$. Bude to sice vyžadovat jisté matematické operace navíc, za to však dostaneme pohybové rovnice přímo v jednoduchém tvaru.

Alternativní odvození pohybových rovnic

Poloha kvádříku je tedy dána funkcemi $r = r(t)$ a $\varphi = \varphi(t)$. Vektor rychlosti je proto roven

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{d\varphi}{dt} \frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv \dot{r} \boldsymbol{\partial}_r + \dot{\varphi} \boldsymbol{\partial}_\varphi, \quad (10)$$

kde $\frac{\partial}{\partial r} \equiv \boldsymbol{\partial}_r$, resp. $\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv \boldsymbol{\partial}_\varphi$ jsou vektory tečné k souřadnicovým čarám $\varphi = \text{konst}$, resp. $r = \text{konst}$. Vektory $\boldsymbol{\partial}_r$ jsou normalizované na jednotku ($\boldsymbol{\partial}_r^2 \equiv \boldsymbol{\partial}_r \cdot \boldsymbol{\partial}_r = 1$) a proto jsou v každém bodě shodné s jednotkovým vektorem \mathbf{e}_r mířícím v radiálním směru, tj.

$$\boldsymbol{\partial}_r = \mathbf{e}_r.$$

Vektory $\boldsymbol{\partial}_\varphi$ mířící v tangenciálním směru však už nejsou normalizované na jednotku, neboť $\boldsymbol{\partial}_\varphi^2 \equiv \boldsymbol{\partial}_\varphi \cdot \boldsymbol{\partial}_\varphi = r^2$. Místo nich proto budeme používat normalizované vektory \mathbf{e}_φ , pro které v každém bodě platí

$$\boldsymbol{\partial}_\varphi = r \mathbf{e}_\varphi.$$

Rychlost \mathbf{v} z rovnice (10) přepíšeme do tvaru

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi, \quad (11)$$

ve kterém rozeznáváme člen odpovídající radiální rychlosti a člen odpovídající tangenciální rychlosti. Zrychlení kvádříku \mathbf{a} získáme totální časovou derivací vektoru rychlosti \mathbf{v} . Teď ovšem musíme být obezřetní. Bázové vektory na pravé straně rovnice (11) jsou závislé na čase t , protože se vyčísľují v bodech, které odpovídají poloze kvádříku v daném čase. Totální časovou derivací rovnice (11) dostaneme

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} \mathbf{e}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt}. \quad (12)$$

Časovou změnu bázových vektorů podél trajektorie vyjádříme pomocí změny bázových vektorů v souřadnicových směrech a pomocí časové změny souřadnic polohy kvádříku, neboli aplikujeme pravidlo o derivaci složené funkce na vektory

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial t} + \frac{dr}{dt} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} + \frac{d\varphi}{dt} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi}, \quad (13)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} = \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial t} + \frac{dr}{dt} \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} + \frac{d\varphi}{dt} \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (14)$$

Parciální derivace obou bázevých vektorů podle času jsou nulové, neboť v pevné poloze nezávisí bázevé vektory na čase. Začneme se členem $\partial \mathbf{e}_r / \partial \varphi$, neboli se změnou vektoru \mathbf{e}_r podél souřadnice φ . K nalezení výsledku nám pomůže obrázek 2. V bodě o souřadnicích (r, φ) máme vektor $\mathbf{e}_r(r, \varphi)$ a v bodě pootočeném o malý úhel $\delta\varphi$ máme vektor $\mathbf{e}_r(r, \varphi + \delta\varphi)$. Vzhledem k tomu, že směřujeme k derivaci, chceme od sebe tyto vektory odečíst. Umíme však odečítat pouze vektory v jednom bodě, a proto vektor $\mathbf{e}_r(r, \varphi + \delta\varphi)$ paralelně přeneseme z bodu $(r, \varphi + \delta\varphi)$ do bodu (r, φ) a získáme tak nový vektor $\mathbf{e}_r(r, \varphi + \delta\varphi)'$. V bodě (r, φ) už je dobře definovaný rozdíl $\mathbf{e}_r(r, \varphi + \delta\varphi)' - \mathbf{e}_r(r, \varphi)$. Jeho výsledkem je vektor, jehož velikost je $2 \sin(\delta\varphi/2)$. Budeme-li úhel $\delta\varphi$ limitně zmenšovat k nule, dostaneme vektor mířící ve směru $\mathbf{e}_\varphi(r, \varphi)$. Zároveň pro malé úhly $\delta\varphi$ platí přiblížení $2 \sin(\delta\varphi/2) \approx \delta\varphi$, proto celkově dostáváme

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r(r, \varphi)}{\partial \varphi} \equiv \lim_{\delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}_r(r, \varphi + \delta\varphi)' - \mathbf{e}_r(r, \varphi)}{\delta\varphi} = \mathbf{e}_\varphi(r, \varphi) .$$

Zjednodušeně zapsáno jsme získali

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi .$$

Se členem $\partial \mathbf{e}_\varphi / \partial \varphi$ budeme postupovat opět s pomocí obrázku 2. Postup je analogický, a proto ho ponecháme bez slovního komentáře. Výsledkem je vztah

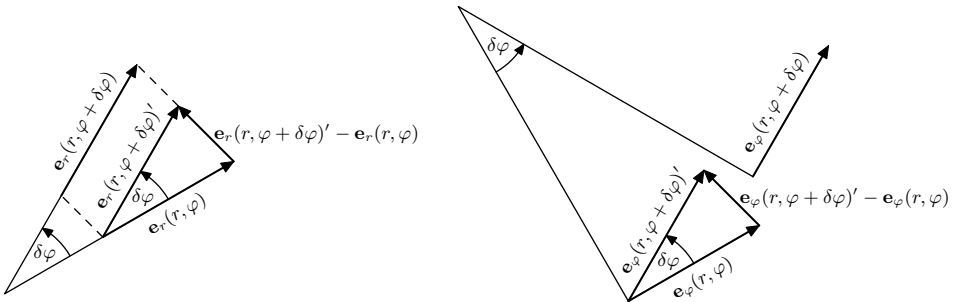
$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_r .$$

Vybaveni zkušenostmi z příkladů výše již snadno nahlédneme, že následující parciální derivace jsou nulové

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0 = \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} .$$

Pro totální časové derivace bázevých vektorů (rovnice (13) a (14)) tak dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} &= \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi , \\ \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} &= -\frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_r . \end{aligned}$$



Obr. 2: Odvození parciálních derivací bázevých vektorů v polárních souřadnicích.

Na základě předchozích výpočtů se nám rovnice (12) pro zrychlení \mathbf{a} zjednoduší na

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi.$$

Jedná se o obecný tvar zrychlení při pohybu v rovině vyjádřený v polárních souřadnicích. Jako cvičení se můžete sami pokusit interpretovat každý jednotlivý člen na pravé straně. Výslednou sílu \mathbf{F} působící na kvádřík lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{F} = -(mg \sin \varphi) \mathbf{e}_r + (N - mg \cos \varphi) \mathbf{e}_\varphi.$$

Z druhého Newtonova pohybového zákona pak dostáváme soustavu pohybových rovnic přímo v jednoduché formě – rovnice (8) a (9).

Řešení pohybových rovnic

Pokračujeme v hledání pohybu kvádříku. Ze zadání známe pohyb desky a tedy souřadnici kvádříku $\varphi = \omega t$. Dosazením do pohybových rovnic (8) a (9) dostaneme

$$\frac{N}{m} - g \cos \omega t = 2\omega \dot{r}, \quad (15)$$

$$-g \sin \omega t = \ddot{r} - \omega^2 r. \quad (16)$$

Rovnice (16) je sama o sobě nehomogenní lineární obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu pro funkci $r(t)$. Její řešení se skládá z homogenního a partikulárního řešení. Homogenní řešení hledáme ve tvaru

$$r_{\text{H}}(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t},$$

kde A, B jsou konstanty. Pomocí převodních vztahů mezi exponenciálou a hyperbolickými funkcemi jej můžeme přepsat do (pro následující výpočty) výhodnější podoby

$$r_{\text{H}}(t) = a \sinh \omega t + b \cosh \omega t,$$

kde a, b jsou konstanty. Partikulárním řešením je například

$$r_{\text{P}}(t) = \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t.$$

Tím jsme našli obecné řešení

$$r(t) = r_{\text{H}}(t) + r_{\text{P}}(t) = a \sinh \omega t + b \cosh \omega t + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t, \quad (17)$$

odkud pro první časovou derivaci získáme

$$\frac{\dot{r}(t)}{\omega} = a \cosh \omega t + b \sinh \omega t + \frac{g}{2\omega^2} \cos \omega t. \quad (18)$$

Označme počáteční vzdálenost od osy otáčení $r_0 = r(0)$. Ze zadání vyplývá, že kvádřík se po desce ze začátku nepohybuje, neboli $\dot{r}(0) = 0$. Dosazením počátečních podmínek do rovnic (17) a (18) dostaneme

$$r_0 = b, \quad 0 = a + \frac{g}{2\omega^2}. \quad (19)$$

Pohyb po desce je tedy dán rovnicí

$$r(t) = r_0 \cosh \omega t + \frac{g}{2\omega^2} (\sin \omega t - \sinh \omega t). \quad (20)$$

Podmínka pádu kvádříku z desky

Teď nás bude zajímat kam kvádřík umístít, aby z desky vyletěl po čtvrtině otáčky, kdy $\varphi = \pi/2$. To může nastat dvěma způsoby. Na kvádřík působí deska pouze tlakovou silou ($N > 0$), a proto kvádřík může odletět od desky v okamžiku, kdy tato síla v čase spojitě vymizí ($N = 0$). Jednoduše deska nebude dost rychlá na to, aby dohonila kvádřík. Druhou možností je, že kvádřík právě po čtvrtině otáčky dojede na konec desky.

Předpokládáme-li, že je deska dostatečně dlouhá, vyletí kvádřík z desky v okamžiku, kdy na něj přestane silově působit, tj. když bude platit $N = 0$. Navíc, aby kvádřík skutečně odletěl, požadujeme, aby čistě matematicky v tomto bodě přecházelo N do záporných hodnot. Fyzikálně korektněji požadujeme, aby mělo N v daném okamžiku zápornou časovou derivaci zleva. Dosazením nalezeného řešení (20) do první pohybové rovnice (15) dostaneme

$$\frac{N(t)}{m} = 2r_0\omega^2 \sinh \omega t - g \cosh \omega t + 2g \cos \omega t. \quad (21)$$

Z požadavku, aby kvádřík vyletěl po čtvrtině otáčky, máme podmínku

$$0 = 2r_0\omega^2 \sinh \frac{\pi}{2} - g \cosh \frac{\pi}{2} \Rightarrow r_0 = \frac{g}{2\omega^2} \coth \frac{\pi}{2}. \quad (22)$$

Dostáváme tak výslednou závislost vzdálenosti kvádříku od osy otáčení

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{g}{2\omega^2} \left(\coth \frac{\pi}{2} \cosh \omega t - \sinh \omega t + \sin \omega t \right), \\ \dot{r}(t) &= \frac{g}{2\omega} \left(\coth \frac{\pi}{2} \sinh \omega t - \cosh \omega t + \cos \omega t \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Všimněme si, že $\dot{r}(\varphi = \pi/2) = 0$, což znamená, že kvádřík bude vystřelen ve vodorovném směru. Stále však nemáme zaručeno, že nám v průběhu čtvrtotáčky nepřekmitne N do záporných hodnot. Pro velikost reakce \mathbf{N} desky na kvádřík podle rovnice (21) platí

$$\frac{N(t)}{mg} = \coth \frac{\pi}{2} \sinh \omega t - \cosh \omega t + 2 \cos \omega t. \quad (24)$$

Ověříme si, že na začátku ($t = 0$) je $N(0) = mg > 0$. Pro $\omega t \in (0, \pi/2)$ se o tom přesvědčíme s pomocí grafu 3. Vidíme, že funkce je pro $\omega t \in (0, \pi/2)$ kladná a že v bodě $\omega t = \pi/2$ má zápornou derivaci, což lze ukázat i výpočtem. Platí

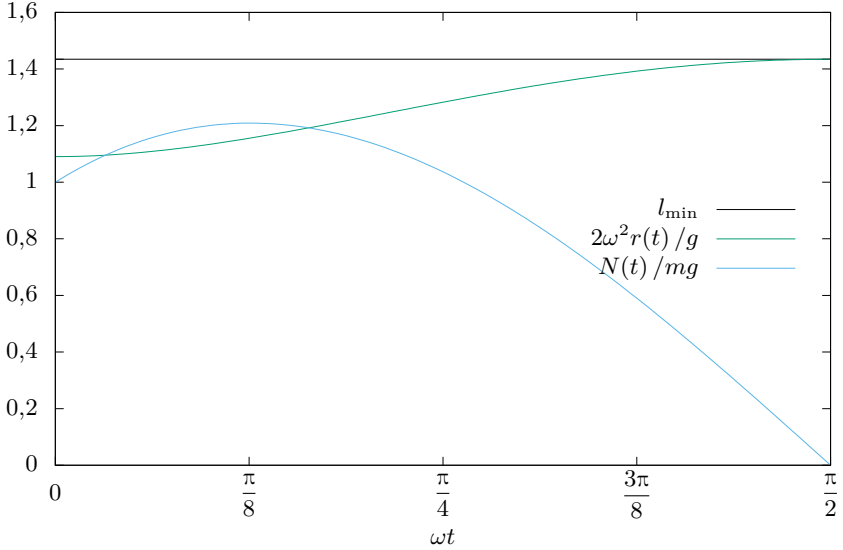
$$\begin{aligned} \frac{1}{mg} \frac{dN}{d(\omega t)} \left(\frac{\pi}{2} \right) &= \coth \frac{\pi}{2} \cosh \frac{\pi}{2} - \sinh \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} \left(\cosh^2 \frac{\pi}{2} - \sinh^2 \frac{\pi}{2} \right) - 2 = \\ &= \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} - 2 < 0, \end{aligned}$$

takže kvádřík od desky skutečně odletí.

Další nutná podmínka proto, aby kvádřík nevyletěl dříve, je dostatečná délka desky v radiálním směru. Její minimální délka l_{\min} musí být rovna vzdálenosti, do jaké se kvádřík po čtvrtině otáčky dostane. Dosadíme do vztahu (23) a vyjde nám

$$l_{\min} = r\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{g}{2\omega^2} \left(\coth \frac{\pi}{2} \cosh \frac{\pi}{2} - \sinh \frac{\pi}{2} + 1 \right) = \frac{g}{2\omega^2} \left(\frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} + 1 \right). \quad (25)$$

Délka desky l_{\min} je skutečně postačující, neboť, jak je patrné z grafu 3, v průběhu celé čtvrtotáčky je $0 < r(t) \leq l_{\min}$. Poznamenejme ještě, že kdyby byla deska příliš dlouhá, mohla by do kvádříku po vystřelení znovu narazit. Zařízení by pak úkol katapultu příliš nespĺňovalo.



Obr. 3: Funkce $N(t)$ a $r(t)$ během první čtvrtotáčky desky.

Podmínka druhého způsobu pádu kvádříku z desky

Podívejme se na situaci, kdy kvádřík dojde po čtvrtině otáčky na konec desky, jejíž délku v radiálním směru označíme l . Dostáváme podmínku

$$r\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = l = r_0 \cosh \frac{\pi}{2} + \frac{g}{2\omega^2} \left(1 - \sinh \frac{\pi}{2}\right).$$

Odtud máme pro počáteční vzdálenost vztah

$$r_0 = \frac{l + \frac{g}{2\omega^2} (\sinh \frac{\pi}{2} - 1)}{\cosh \frac{\pi}{2}} > 0. \quad (26)$$

Pro úplnost uvedeme plnou závislost radiální vzdálenosti na čase

$$r(t) = \frac{l + \frac{g}{2\omega^2} (\sinh \frac{\pi}{2} - 1)}{\cosh \frac{\pi}{2}} \cosh \omega t + \frac{g}{2\omega^2} (\sin \omega t - \sinh \omega t). \quad (27)$$

Ovšem řešení (27) není vždy smysluplné. Vzhledem ke konečné délce desky musí po celou čtvrtotáčku platit $r(t) \leq l$. Pro $\varphi = \omega t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ přepíšeme tuto nerovnost do tvaru

$$\left(1 - \frac{\cosh \varphi}{\cosh \frac{\pi}{2}}\right) \tilde{l} \geq \left(\sinh \frac{\pi}{2} - 1\right) \frac{\cosh \varphi}{\cosh \frac{\pi}{2}} + (\sin \varphi - \sinh \varphi), \quad (28)$$

kde jsme zavedli bezrozměrný parametr $\tilde{l} = 2l\omega^2/g$. Hledáme tedy nejmenší hodnotu parametru \tilde{l} , pro který je nerovnost splněna pro všechna $\varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, což není zrovna jednoduché. Začneme proto nutnou, avšak ne nutně postačující, podmínkou $\dot{r}(\varphi = \pi/2) \geq 0$. Zderivováním (27) a dosazením $\varphi = \pi/2$ dostaneme

$$\left(l + \frac{g}{2\omega^2} \left(\sinh \frac{\pi}{2} - 1\right)\right) \frac{\sinh \frac{\pi}{2}}{\cosh \frac{\pi}{2}} - \frac{g}{2\omega^2} \cosh \frac{\pi}{2} \geq 0.$$

Tuto nerovnost převedeme ekvivalentními úpravami na podmínku

$$\tilde{l} \geq 1 + \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}}. \quad (29)$$

Zkusme nyní zjistit, zda je nutná podmínka (29) zároveň postačující, tj. zda \tilde{l} splňující (29) splňuje také $r(t) \leq l$. Ptáme se tedy, zda je splněna nerovnost

$$\left(1 - \frac{\cosh \varphi}{\cosh \frac{\pi}{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}}\right) \geq \left(\sinh \frac{\pi}{2} - 1\right) \frac{\cosh \varphi}{\cosh \frac{\pi}{2}} - (\sinh \varphi - \sin \varphi).$$

Roznásobením a dalšími úpravami dostaneme

$$1 + \sinh \frac{\pi}{2} - \sinh \frac{\pi}{2} \sin \varphi \geq \cosh \frac{\pi}{2} \cosh \varphi - \sinh \frac{\pi}{2} \sinh \varphi.$$

Použitím součtového vzorce $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ a přičtením $\sinh \frac{\pi}{2} \sin \varphi$ převedeme nerovnost na tvar

$$1 + \sinh \frac{\pi}{2} \geq \cosh\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sinh \frac{\pi}{2} \sin \varphi. \quad (30)$$

Definujme funkci $P(\varphi)$ jako levou stranu této nerovnosti. Její maximum na intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$ se nachází buď na krajích tohoto intervalu, nebo ve stacionárních bodech $P' = 0$. Derivací dostáváme podmínku pro stacionární body

$$P' \equiv \frac{dP}{d\varphi} = -\sinh\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sinh \frac{\pi}{2} \cos \varphi = 0.$$

Tato rovnice má na hledaném intervalu dvě řešení a sice 0 a $\pi/2$. Dosazením těchto hodnot do $P(\varphi)$ se přesvědčíme, že maximum P je rovno $P(\pi/2) = 1 + \sinh \pi/2$. Vidíme, že nerovnost (30) je tak splněna. Zjistili jsme, že pro

$$\tilde{l} \geq 1 + \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} \quad (31)$$

je řešení pohybu s počáteční vzdáleností r_0 danou rovnicí (26) smysluplné, neboli (31) je postačující podmínkou pro $r(t) \leq l$. Vypadá to tedy tak, že i v případě druhé možnosti vystřelení

kvádříku existuje pro pevné ω minimální potřebná délka desky, která je shodná s délkou potřebnou pro první možnost, viz vztah (25). Zbývá však ještě ověřit, že kvádřík neodletí od desky dříve, neboli že platí $N(\varphi) \geq 0$. Dosazení za r_0 z rovnice (26) do (21) vede na

$$\frac{N(t)}{mg} = \frac{\tilde{l} + \left(\sinh \frac{\pi}{2} - 1\right)}{\cosh \frac{\pi}{2}} \sinh \varphi - \cosh \varphi + 2 \cos \varphi. \quad (32)$$

A protože platí (31), musí také platit

$$\frac{N(t)}{mg} \geq \frac{1 + \sinh^{-1} \frac{\pi}{2} + \left(\sinh \frac{\pi}{2} - 1\right)}{\cosh \frac{\pi}{2}} \sinh \varphi - \cosh \varphi + 2 \cos \varphi.$$

Společně s požadavkem $N(\varphi) > 0$ to vede na podmínku

$$\coth \frac{\pi}{2} \sinh \varphi - \cosh \varphi + 2 \cos \varphi \geq 0.$$

Pro tuto nerovnost jsme již ověřili, že je pro všechna $\varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ splněna, viz (24).

Bonus

Dalším úkolem je zjistit mechanický výkon P dodávaný kvádříku deskou. Deska působí na kvádřík silou \mathbf{N} , a proto

$$P = \mathbf{N} \cdot \mathbf{v} = N \mathbf{e}_\varphi \cdot (\dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi) = Nr \dot{\varphi},$$

kde jsme využili rovnice (11) a ortonormality bázevých vektorů. Ke stejnému vztahu můžeme také dojít z jiného úhlu pohledu. Deska působí na kvádřík momentem síly

$$\mathbf{M} = r \mathbf{e}_r \times N \mathbf{e}_\varphi = Nr (\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi)$$

a kvádřík se otáčí s vektorem úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} (\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi)$. Výkon P je pak roven

$$P = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = Nr \dot{\varphi}. \quad (33)$$

V případě první možnosti vystřelení kvádříku dosadíme $\dot{\varphi} = \omega$, N z rovnice (24) a r z rovnice (23), čímž dostaneme výkon

$$P = \frac{mg^2}{2\omega} \left(\coth \frac{\pi}{2} \sinh \omega t - \cosh \omega t + 2 \cos \omega t \right) \left(\coth \frac{\pi}{2} \cosh \omega t - \sinh \omega t + \sin \omega t \right).$$

Celková práce W vykonaná na kvádříku je rovna přírůstku mechanické energie kvádříku, tj. součtu přírůstku kinetické energie E_k a přírůstku tíhové potenciální energie E_p , neboli

$$\begin{aligned} W &= E_k \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right) - E_k(\varphi = 0) + E_p \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right) - E_p(\varphi = 0) = \\ &= \frac{1}{2} m \left(\mathbf{v}^2(\varphi = \pi/2) - \mathbf{v}^2(\varphi = 0) \right) + mgl_{\min}. \end{aligned}$$

Za rychlost \mathbf{v} dosadíme z rovnice (11) a dostaneme

$$W = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right) + (l_{\min} \omega)^2 - (r_0 \omega)^2 \right) + mgl_{\min}.$$

Nyní za r_0 a l_{\min} dosadíme z rovnic (22) a (25) a využijeme toho, že $\dot{r}(\varphi = \pi/2) = 0$, čímž získáme hledaný vztah pro vykonanou práci

$$\begin{aligned} W &= \frac{mg^2}{8\omega^2} \left(\left(\frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} + 1 \right)^2 - \coth^2 \frac{\pi}{2} \right) + \frac{mg^2}{2\omega^2} \left(\frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} + 1 \right) = \\ &= \frac{mg^2}{2\omega^2} \left(\frac{3}{2 \sinh \frac{\pi}{2}} + 1 \right). \end{aligned}$$

Ke stejnému výsledku lze dojít i přímou integrací výkonu P . Jedná se však o delší výpočet.

V případě druhé možnosti vystřelení kvádříku dosadíme do rovnice (33) opět $\dot{\varphi} = \omega$, N z rovnice (32) a r z rovnice (27), čímž dostaneme výkon

$$\begin{aligned} P &= \frac{mg^2}{2\omega} \cdot \left(\frac{\tilde{l} + \sinh \frac{\pi}{2} - 1}{\cosh \frac{\pi}{2}} \sinh \varphi - \cosh \varphi + 2 \cos \varphi \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{\tilde{l} + \sinh \frac{\pi}{2} - 1}{\cosh \frac{\pi}{2}} \cosh \varphi + \sin \varphi - \sinh \varphi \right). \end{aligned}$$

Celková práce W vykonaná na kvádříku bude rovna

$$W = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}^2(\varphi = \pi/2) - \mathbf{v}^2(\varphi = 0)) + mgl.$$

Dosazením za rychlost \mathbf{v} z rovnice (11) dostaneme

$$W = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right) + (l\omega)^2 - (r_0\omega)^2 \right) + mgl.$$

Zbývá už jen dosadit s užitím rovnice (27) pro r a rovnice (26) pro r_0 .

Václav Mikeska

v.mikeska@fykos.cz@fykos.cz

Úloha V.P ... to nechceš

9 bodů; (chybí statistiky)

Jistě jste již někdy slyšeli, že skořápka běžného slepičího vejce dokáže vydržet i poměrně velký tlak. Vysvětlete, jak je to možné, když je přeci velmi snadné vejce rozbít. V jakém směru snese skořápka největší zatížení? Proč a jak se rozbije, když ji zatížíme příliš? Popište různé mechanismy a určete, který je nejpravděpodobnější. Nezapomeňte, že se zabýváme skutečnými, nikoli ideálními vejci. Kde to bude možné, zkuste svá tvrzení podpořit výpočty.

Napadla Jáchyma při sledování kultovního českého filmu.

Úvod

Napriek tomu, že táto úloha vyzerá jednoducho, tak plné riešenie problému tenkej vrstvy pod vonkajším tlakom je veľmi komplikované a aj výrazne zjednodušené modely sú za rozsahom typickej úlohy. Preto sa tu najskôr pokúsime použiť relatívne jednoduchý 2D model guľovej škrupiny a pozrieme sa na obmedzenia takéhoto modelu. Najmä sa však pokúsime použiť elementárne fyzikálne argumenty, keďže takýto postup je omnoho inštruktívnejší ako riešenie veľkej sústavy parciálnych diferenciálnych rovníc.

Predtým ako začneme, predstavme si pár základných konceptov aby sme všetci boli na rovnakej vlne.

Napätie

Napätie alebo stres je veličina popisujúca vnútorné sily medzi časticami v materiáli. Určite poznáte napätie v jednoduchých prípadoch, ako napríklad pri závaží visiacom na špagáte, čo spôsobí normálové napätie v špagáte $\sigma = F/A$, kde A je obsah prierezu špagátu (teda plochy kolmej na smer pôsobenia sily). Ako môžeme vidieť na tomto jednoduchom prípade, tak napätie a tlak majú rovnaké jednotky. Keďže sa snažíme špagát natiahnuť, budeme takémuto napätiu hovoriť napätie v ťahu [tension]. Ak si naopak predstavíme tyč, ktorá má na vrchu závažie, takáto tyč bude v tlaku (kompresii, [compression]). To, že sme museli vymeniť špagát za tyč ilustruje extrémny prípad dôležitého faktu: niektoré materiály zvládajú ťah inak ako tlak. Ďalšia forma napätia je napätie v strihu, ktoré nastáva ak materiál (alebo jeho časť) je „ťahaný“ v dvoch smeroch paralelne k jej povrchu (napríklad pri ťahaní zlepených papierov od seba alebo pri strihaní, kedy nožnice od seba tlačia 2 časti materiálu). Rovnako ako predtým definujeme napätie $\theta = F/A$, tu ale A značí plochu prierezu *paralelnú* so smerom sily (teda v prípade nožníc by táto plocha záležala na hrúbke papiera).

Zatiaľ čo pre väčšinu tejto diskusie je porozumenie normálového a strihového napätia postačujúce, pre 2D model budeme neskôr potrebovať kompletnejší popis pomocou tenzoru napätia.

Vajcia

Pozrime sa teraz na vlastnosti vajec. Je pomerne rozumné predpokladať, že vajcia majú valcovú symetriu. Škrupina slepačích vajec má typicky hrúbku (0,3 – 0,4) mm,¹ výšku približne 50 mm a šírku o niečo menej. Pomer priemeru k hrúbke je teda blízko 100.

Škrupina je typ bio-keramického materiálu, ktorý je v kuracích vajciach zložený z 96 % uhlíkatu vápenatého, 2 % organickej matrice a malého množstva horčíka, fosforu a ďalších stopových prvkov. Vnútorňa mikroštruktúra je netriviálna a môžeme ju rozdeliť radiálne na 5 vrstiev, v angličtine nazývaných mammillary knob, cone, palisade, vertical crystal layer a cuticle. Viac detailov a obrázky mikroštruktúry môžete nájsť v literatúre,² to čo je dôležité pre náš problém je, že keramický materiál je hlavne z kalcitu, ale so zložitou vnútornou štruktúrou.

Konkrétne vlastnosti škrupiny je ťažké nájsť, ale všeobecne vieme, že keramické materiály majú typicky vysoký Youngov modul (sú nepoddajné [stiff]) ale sú krehké (brittle) a typicky slabšie v ťahu oproti tlaku (často 10× slabšie) kvôli vnútornej štruktúre, kde sa defekty ako trhliny, ktoré koncentrujú pnutie, môžu ľahko šíriť v ťahu.

Experimentálne výsledky ukazujú, že obsah škrupiny nemá výrazný vplyv na pevnosť vajec,³ preto budeme vajce považovať za prázdnu škrupinu.

Vajcia predsa nie sú pevné!

Ako všetci vieme, je jednoduché vajcia rozbiť, ale ako hovorí zadanie, dokážu naozaj vydržať veľký tlak, ak je aplikovaný správne. Aby sme zistili prečo, pozrime sa najskôr na rozdiel medzi situáciami, keď aplikujeme tlak na vajce tým, že ho napríklad stláčame v jednej ruke a tým, že ho buchne o hranu panvice alebo hodíme na zem. Medzi týmito dvomi situáciami sú dva kľúčové rozdiely, pričom oba prispievajú k rozdielu v odolnosti vajca.

Prvým rozdielom je jednoducho plocha, na ktorú je tlak aplikovaný: ak vajce stlačíme, sila sa rozloží na pomerne veľkú plochu a výsledný tlak nie je taký veľký. V prípade vajca, no aj akéhokolvek objektu podobného tvaru, je sila rozložená a to nám pomôže aj iným spôsobom. Keď aplikujeme silu, musíme uvažovať nad smerom, v ktorom táto sila pôsobí. Ak je ten smer kolmý na tvar, tak povrch spôsobuje napätie v strihu (shear) a keďže je škrupina veľmi tenká, tak toto napätie bude veľmi vysoké, zatiaľ čo ak je sila rozložená, materiál má viac priestoru previesť toto napätie dovnútra škrupiny, kde dokáže zniesť omnoho vyššie napätie.

Keď vajce stláčame, tlak sa aplikuje pomaly a môžeme ignorovať dynamické sily a tento proces môžeme považovať za izostatický, tj. že stav materiálu môžeme riešiť v každom momente samostatne, zatiaľ čo keď vajce narazíme o hranu, tak aplikujeme silu veľmi rýchlo a materiál nemá čas aby tieto sily vyrovnal, čím sa maximálne napätie v materiáli zvyší.

Tak ako silné sú vajcia?

Zistili sme, že toto je veľmi zložitý problém, ale pozrime sa teda na nejaké experimentálne výsledky. Tiež je možné použiť simuláciu pomocou finite element analysis na odhad sily, ale takáto simulácia nezachytí detaily nedokonalého biologického materiálu. Môžeme nájsť niekoľko

¹<https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/1828051X.2017.1344935>

²https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4615-3060-2_1,
<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4118947/>,
<https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/22201802/>

³<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5310731/> (section 3.3)

článkov popisujúcich silu škrupiny online, napríklad⁴ hovorí, že slepačie vajcia dokážu pri vhodnom loadingu pozdĺž ich osi odolať veľkej sile, ale tiež našli veľkú variabilitu medzi jednotlivými vajcami. Všeobecne to vyzerá tak, že slepačie vajcia dokážu typicky odolať sile až 700 N.

Módy zlyhania

Ako sa vajcia rozbijú ak túto silu prekročíme? Existuje viacero možných mechanizmov rozbitia vajca. To, ktorý nastane závisí od vlastností vajca a spôsobu ako naň pôsobí sila.

Strihové zlyhanie

Ako sme už spomenuli pri prípade rozbitia úderom do malého miesta, keď strihové napätie prekročí medzu pevnosti materiálu, vajce sa v tomto bode rozbije. Pevnosť je tiež znížená tým, že takýto úder aplikuje silu veľmi rýchlo, čo vyžaduje veľký strain rate aby túto silu vykompenzoval.

V prípade, že je sila rozložená a pôsobí v smere osi vajca, je situácia zložitejšia a možných módov zlyhania je viac.

Buckling

Možno poznáte situáciu bucklingu („vypúlenia“) Eulerovej tyče, čo je prípad keď stláčame tyč pozdĺžne až sa stane mechanicky nestabilnou a „vypúli“ sa do jedného smeru. Asi si viete predstaviť, alebo ste možno aj videli hračky z tenkého plastu, kde táto situácia nastáva na tenkom zakrivenom materiáli. Keďže ale keramický materiál vajca nie je veľmi flexibilný, tento mód je nepravdepodobný.

Ťah na vnútornom povrchu

Keď ohýbame štruktúru konečnej hrúbky, napätie pôsobí na opačných stranách v opačnom smere (predstavte si ohnutú tyč), materiál je v ťahu na vonkajšom povrchu a v kompresii na vnútornom povrchu (vnútorný a vonkajší v smere ohybu). Na to aby materiál kompenzoval stres, aj keď má veľký Youngov modul, tak sa vždy musí mierne zdeformovať (Hookov zákon), čo v prípade vajca znamená, že sa povrch mierne prehne smerom dnu voči pôvodnému tvaru, čo vedie k ťahu na vnútornom povrchu vajca a ku kompresii na jeho vonkajšom povrchu. Keďže keramický materiál vajca je výrazne slabší v ťahu, tak na vnútornom povrchu môže dôjsť k praskline, ktorá sa bude šíriť. Toto sa zdá byť častý mód zlyhania,⁵ ale v závislosti na spôsobe aplikovania, tlak nemusí vždy viesť k úplnému zlyhaniu. Vrch vajca praskne, zdeformuje sa, čím sa bude sila efektívne prenášať na zvyšok škrupiny, ktorá potom prežije vyšší tlak (ak sa trhlina nedostane aj na túto časť škrupiny).

Hoop tension

Keď aplikujeme kompresiu pozdĺž osi, indukujeme ťah pozdĺž rovnobežiek na povrchu. Toto je pomerne intuitívny výsledok: predstavte si ako sily pôsobia pozdĺž poludníkov, keďže sa poludníky na guli aj na vajci rozchádzajú kvôli zakriveniu povrchu, vznikne sila pôsobiaca pozdĺž rovnobežiek, ťahové napätie je preto potrebné pozdĺž rovnobežiek aby sa vajce neroztrhlo. Ak toto napätie prekročí pevnosť vajca, vajce sa roztrhne. Toto napätie pôsobí na veľkom

⁴<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5310731/>

⁵<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00071666708415678>

povrchu, čo ako uvidíme neskôr hrá značnú rolu. Toto je typický mód zlyhania v niektorých experimentoch.⁶

2D model

Skúsme teraz vytvoriť zjednodušený 2D model škrupiny. Budeme hovoriť o guľovej škrupine (aj keď ako uvidíte riešenie pre ľubovlnú rotáciu škrupiny je prakticky rovnaké).

Nasledujúca sekcia je pomerne zložitá a rozhodne nebola potrebná na získanie plného počtu bodov, je tu len pre čitateľa so záujmom.

Cauchyho tenzor napätia

Všeobecne môže stres v materiáli byť v ľubovlnom smere, a teda jednoduchý popis aký sme používali vyššie nám tu nebude stačiť. Keďže sila pôsobiaca na rovinu v materiáli bude závisieť na orientácii tejto roviny, potrebujeme popis, ktorý nám dá silu pôsobiacu na ľubovlnú rovinu definovanú jej normálovým vektorom, a teda potrebujeme mapu z vektoru na vektor, čo je tenzor. Zatiaľ čo tenzory sa zo začiatku môžu zdať desivé, tu nepotrebujeme nič zložité, jednoducho ho použijeme ako maticu.

Tenzor plne popisujúci napätie v materiáli sa nazýva Cauchy stress tensor. Jeho komponenty v Kartézskych súradniciach môžeme jednoducho vypočítať z predošlej diskusie. Chceme maticu $\boldsymbol{\sigma}$ takú, aby keď ju aplikujeme na normálový vektor k rovine \mathbf{n} , dostaneme silu, ktorá pôsobí na túto rovinu ($\mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$). Vieme, že normálové napätia $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ pôsobia na roviny kolmé na x, y, z osi v smere pozdĺž týchto osí (napr. σ_x pôsobí pozdĺž x na yz rovinu). Akýkoľvek strih pôsobí v kolmých rovinách, a teda tu neprispieva. Takže hneď vidíme, že diagonálne komponenty matice budú $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. Strihové komponenty sú trochu menej intuitívne, ale vieme, že sú to nediagonálne komponenty, ktoré pôsobia pozdĺž rovín, a teda

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Tento tenzor bude závislý na polohe, teda napätie tvorí tenzorové pole.

Pozorný čitateľ si všimol že tu hovoríme o rovnováhe, teda tento tenzor musí spĺňať nejaké podmienky aby sa časti materiálu voči sebe nepohybovali.

Uvažujme ľubovlný objem V v materiáli uzavretý povrchom S . Na každý bod na povrchu pôsobí sila $\mathbf{T}(x, y, z)$ kvôli napätiu v materiáli a na každý objemový element pôsobia telesové sily (body forces) \mathbf{F} (napríklad ťažová sila) nezávislé od napätia (tieto neskôr zanedbáme). Vieme, že celková sila na každý takýto objem musí byť nulová, teda ak sčítame všetky sily na povrchu a všetky telesové sily

$$\int_V F_i dV + \int_S \sigma_{ji} n_j dS = 0,$$

kde sme použili indexovú notáciu a Einsteinovu sumačnú konvenciu (opakované indexy sa sčítajú, teda rovnosť $\mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ vieme napísať ako $T_i = \sigma_{ji} n_j$ týmto spôsobom), toto budeme

⁶<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5310731/>

používat v celej nasledujúcej sekcii, keďže to veľmi zjednoduší vyjadrenia. Teraz môžeme použiť Gaussovu vetu a nahradit integrál cez povrch objemovým integrálom a dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V F_i dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV = \int_V F_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV, \\ 0 &= F_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (34)$$

kde sme posledný riadok dostali tým, že hovoríme o ľubovoľnom objeme a jediný spôsob ako bude tento integrál 0 pre ľubovoľný objem je, ak je integrand nula. Toto nám dá 3 rovnice (všimnite si že index i sa nevysčítal), ktoré musí tenzor stresu spĺňať.

Toto ale nie je jediná podmienka. Tiež musíme dodržať zachovanie momentu hybnosti, a teda súčet všetkých momentov síl voči ľubovoľnej osi musí byť nula. Podobným spôsobom ako vyššie dostaneme, označujúc sily pôsobiace na povrch \mathbf{T} a telesové sily \mathbf{F}

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{T})_i dS + \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_i dV = \int_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{mk} n_m dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j F_k dV = \\ &= \int_V \frac{\partial \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{mk}}{\partial x_m} dV + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j F_k dV, \\ 0 &= \varepsilon_{ijk} \left(\sigma_{mk} \frac{\partial x_j}{\partial x_m} + x_j \frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} + x_j F_k \right), \end{aligned}$$

kde sme prepísali vektorový súčin pomocou Levi-Civitovho symbolu ε^7 , Gaussovu vetu a rozšírili deriváciu. Všimnime si, že člen

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_m}$$

je rovný 1 ak $i = m$ (keďže vtedy je v tvare $\partial x/\partial x$) a 0 inak. Tenzor, ktorý sa takto správa je známy ako Kroneckerovo delta δ_{ij} a jeho efekt v sumácii je, že efektívne „premenuje“ index $j \rightarrow i$ (alebo naopak). S touto vedomosťou dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \varepsilon_{ijk} \left(\sigma_{jk} + x_j \left(\frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} + F_k \right) \right) dV = \int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV, \\ 0 &= \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk}, \end{aligned}$$

kde sme dostali druhý riadok tým, že sme si všimli, že výraz násobený x_j je rovnaký ako podmienka, ktorú sme videli vyššie (34). Rozšírením posledného výrazu a použitím vlastností ε dostaneme $\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{23} = \sigma_{32}, \sigma_{13} = \sigma_{31}$, teda $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ a tenzor stresu je symetrický.

Spherical coordinates

Doteraz sme sa zapodievali Kartézskymi súradnicami, ale tie pre náš problém nie sú veľmi užitočné. Mohli by sme vaje aproximovať ako niečo s valcovou symetriou, ale pre ešte jednoduchší

⁷Toto je totálne antisymetrický tenzor, dávajúci 1 keď ijk je párna (sudá) permutácia 123 (napr. 123), -1 keď je to nepárna (lichá) permutácia 123 (napr. 132) a 0 inak.

model sa pozrieme na prípad sférickej symetrie. Na to budeme potrebovať iba transformáciu rovnice (34) do sférických súradníc. Toto urobíme tak, že transformujeme tenzor stresu a aplikujeme derivácie⁸ a dostaneme tri rovnice (zanedbávajúc telesové sily (teda hmotnosť škrupiny))

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \frac{\tau_{r\theta}}{\operatorname{tg} \theta} \right), \\ 0 &= \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_\varphi}{\operatorname{tg} \theta} + 3\tau_{r\theta} \right), \\ 0 &= \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(3\tau_{r\varphi} + \frac{2\tau_{\theta\varphi}}{\operatorname{tg} \theta} \right). \end{aligned}$$

Ah, super. Teraz máme 3 parciálne diferenciálne rovnice so 6 neznámymi funkciami. Spravme krok späť a pozrieme sa na situáciu, ktorú riešime. Najskôr problém zjednoduším použitím valcovej symetrie, teda že všetky funkcie sú nezávislé na φ . Môžeme teda hneď odstrániť všetky členy s $\partial/\partial\varphi$, to ale nie je všetko. Táto symetria tiež znamená $\tau_{\varphi\theta} = \tau_{r\varphi} = 0$ (keďže tieto by museli byť nezávislé na φ , integrovanie pozdĺž celého rozsahu φ (teda po obručiach) nemôže viesť k nenulovej sile, inak by sa obruče hýbali). Toto veľmi zjednoduší rovnice ale bohužiaľ to tiež úplne odstráni poslednú z rovníc a zostane nám

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \frac{\tau_{r\theta}}{\operatorname{tg} \theta} \right), \\ 0 &= \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_\varphi}{\operatorname{tg} \theta} + 3\tau_{r\theta} \right). \end{aligned}$$

To už vyzerá o dosť lepšie. Ak sa pozrieme na okrajové podmienky, tak vidíme, že chceme problém rozdeliť na dve časti: jedna bude popisovať dva guľové vrchlíky, na ktoré pôsobí sila zvonku a druhá bude popisovať zvyšok škrupiny, kde je povrch voľný (keď zanedbáme tlak vzduchu, ktorý pôsobí z oboch strán).

⁸Alebo nájdeme vyjadrenie pre tenzorovú divergenciu v sférických súradniciach online.

Tento 2D model nedokáže dobre popísať guľové vrchlíky, keďže tu hrá výraznú rolu strihové napätie, takže sa pozrieme len na riešenie druhej časti. Pre túto časť máme z voľného povrchu okrajové podmienky

$$\sigma_r(R, \theta) = \tau_{r\theta}(R, \theta) = \sigma_r(R + t, \theta) = \tau_{r\theta}(R + t, \theta) = 0,$$

kde t je hrúbka škrupiny a R je jej vnútorný priemer.

Aby sme sa dostali k prvému skutočnému výsledku, uvažujme limitu $t \rightarrow 0$, teda skutočne 2D škrupinu. Toto prakticky odstráni závislosť na r , keďže $r = R$ sa stane konštantou vnútri škrupiny, ale tiež to znamená, že škrupina nedokáže udržať strihové $\tau_{r\theta}$ ani normálové napätie σ_r , keďže okrajové podmienky znamenajú $\tau_{r\theta}(R, \theta) = \sigma_r(R, \theta) = 0$ a jediné r je $r = R$. Ak toto vložíme do našich rovníc, dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= -\sigma_\theta - \sigma_\varphi, \\ 0 &= \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\theta - \sigma_\varphi}{\operatorname{tg} \theta}. \end{aligned}$$

Kombináciou týchto dvoch obyčajných diferenciálnych rovníc dostaneme σ_θ

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\sigma_\theta}{d\theta} + 2\frac{\sigma_\theta}{\operatorname{tg} \theta}, \\ \int \frac{d\sigma_\theta}{\sigma_\theta} &= -2 \int \frac{d\theta}{\operatorname{tg} \theta}. \end{aligned}$$

Riešenie je

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{C}{\sin^2 \theta}, \\ \sigma_\varphi &= -\frac{C}{\sin^2 \theta}, \end{aligned}$$

kde C je konštanta závislá na vonkajšej sile. Pre jednoduchosť predpokladajme, že sila je aplikovaná na kruhovú oblasť okolo osi, koľko na povrch vajca (teda prispievajú do $\sigma_r = p$ pre $\theta < \theta_0$ alebo $\theta > \pi - \theta_0$, kde θ_0 určuje veľkosť oblasti, kde sila pôsobí). Z našich riešení vidíme, že ak aplikujeme silu na veľmi malú oblasť, tak dostaneme veľké napätia kvôli $1/\sin^2 \theta$ členu.

Ako vidíme, kompresia pozdĺž poludníkov vedie k ťahu na rovnobežkách. Tiež vidíme, že toto 2D riešenie je nekompletné: v 3D realite je strih $\tau_{r\theta}$ nenulový. Mohli by sme uvažovať zložitejšiu verziu tejto teórie, kde by sme považovali napätie za konštantné vo vnútri tenkej škrupiny s napätím daným iba ako funkciou θ a integrovaním rovníc cez tenkú škrupinu. Toto ale vedie iba na 2 rovnice pre 3 neznáme funkcie, čo je zjavne nedostatočné. Chýbajúci kúsok puzzle sú rovnice pre mechanickú deformáciu a tie by ale model extrémne skomplikovali.

Aby sme určili konštantu C , stačí nám určiť celkovú silu, ktorá sa z guľového vrchlíka pod vonkajším tlakom musí preniesť na zvyšok škrupiny. Ako sme spomenuli, naše riešenie v guľovom vrchlíku nefunguje, ale stále platí, že tento vrchlík musí preniesť všetku vonkajšiu silu na zvyšok škrupiny, keďže reakcia na túto silu je to, čo kompenzuje vonkajšiu silu a drží túto časť škrupiny na mieste. Táto sila sa môže preniesť iba cez kruhové rozhranie na θ_0 . Porovnaním celkovej sily

pôsobiacej na vrchlík s projekciou sily z napätia na tomto rozhraní (reakcia na silu, ktorá drží vrchlík na mieste) do vertikálneho smeru dostaneme,

$$\begin{aligned} 2\pi \sin^2 \theta_0 R \sigma_\theta(\theta_0) t &= -F, \\ C &= -\frac{F}{2\pi R t}, \\ \sigma_\theta(\theta) &= -\frac{F}{2\pi R t \sin^2 \theta}, \quad \theta \in (\theta_0, \pi - \theta_0), \end{aligned}$$

kde F je celková sila pôsobiaca na vajce, t je hrúbka škrupiny.

Ako sme spomenuli vyššie, keramické materiály majú nižšiu pevnosť v ťahu ako v kompresii, a preto sa vajce v tomto modeli rozbije kvôli ťahu pozdĺž rovnobežiek.

Fakt, že kompresia na poludníkoch vedie na ťah na rovnobežkách je zjavný len z geometrie, nečakali by sme ale, že bude napätie maximálne v θ_0 . Toto je dôsledok 2D modelu, ktorý nedokáže udržať nevyhnutné strihové napätie v θ_0 . Závislosť F/R je zaujímavá, ak uvažujeme nad tlakom namiesto síl $F \propto pR^2$, dostaneme napätie $\sigma_\theta \propto pR$, teda malé gule (alebo tvary s malým lokálnym polomerom krivosti) odolávajú tlaku lepšie.

Ďalšia možnosť zlyhania gule, ktorú sme spomenuli vyššie je, že sa stane mechanicky nestabilnou a vypúli sa dnu (buckle). Toto sa stane v oblasti, kde pôsobí vonkajšia sila a naše riešenie tu neplatí, ale fakt, že dostaneme ťah po rovnobežkách stále platí a tu pomôže spevniť povrch voči takémuto prevaleniu. Pokračujúc v tejto myšlienke ako sme zistili vyššie, tak útvary s menším polomerom krivosti dokážu rýchlejšie previesť tlak na rovnobežkový ťah, a teda sú odolnejšie voči takémuto prevaleniu. Ak dáme všetko toto dokopy, tak vidíme, že vajce je naozaj najsilnejšie pozdĺž jeho osi.

Membránová teória

Čo sme získali vyššie je známy model z membránovej teórie škrupín a ak sa vrátim o kúsok späť, videli sme, že strihové a normálové napätie je nevyhnutne nulové. Toto dáva zmysel, keďže škrupina má nulovú hrúbku, ale tiež to znamená, že všetky sily musia pôsobiť tangenciálne voči povrchu, čo je výrazné obmedzenie, keďže v tomto prípade sily zjavne nie sú tangenciálne.

Toto tiež vysvetľuje prečo sme dostali maximálne napätie v ťahu v θ_0 : ak je tu sila aplikovaná tangenciálne, potrebujeme veľké napätie pozdĺž θ_0 rovnobežky, aby sme škrupinu udržali pokope (predstavte si sily pôsobiace na valec so stlačeným plynom).

Úplné sférické riešenie

Keďže náš 2D model nám nedal uspokojivé riešenie, mohli by sa pokúsiť nájsť úplné riešenie pomocou rovníc pre elastickú deformáciu a použiť elastické vlastnosti škrupiny dostupné online. Myšlienka je použiť 3 rovnice kontinuity, ktoré sme použili vyššie, napísať 6 stress-strain rovníc (v podstate Hookov zákon vo všetkých smeroch) a 3 rovnice pre deformácie v zvolených súradniciach, z čoho dostaneme sústavu 15 parciálnych diferenciálnych rovníc. Valcová symetria znamená $\tau_{\theta\varphi} = \tau_{r\varphi} = 0$ a rovnice sa o niečo zjednodušia. Plné analytické riešenie tohto prípadu existuje a dá sa vyjadriť pomocou nekonečných rád Legendreových polynómov.⁹

⁹<https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00419-015-0993-8>

Zakrivenie povrchu a sila

Ako vieme intuitívne a ako sme videli v 2D modeli, vajcia sú najsilnejšie pozdĺž ich osí. Toto je dané tým ako sa napätie rozkladá v materiáli. Čím vyššie zakrivenie, tým rýchlejšie sa strihovú napätie dokáže previesť do tangenciálneho ťahu a kompresie, kde je škrupina omnoho silnejšia. To znamená, že ostrejšie vajcia budú silnejšie v tomto smere. Väčšie existujúce zakrivenie tiež pomôže s ťahom na vnútornom povrchu indukovanom zakrivením.

Skutočné vajcia

Ako každý biologický materiál, ani škrupina nie je všade rovnaká. Jej hrúbka a zloženie má nejakú premenlivosť a škrupina obsahuje mnoho mikroprasklín a ďalších materiálových defektov, ktoré prerušujú *tok* napätia v materiáli (sila sa nedokáže preniesť cez prasklinu), čo vytvorí lokálne koncentrácie napätia vedúce k zlyhaniu. Ako dôsledok tohto je, že nedokážeme presne predpovedať medzu pevnosti ani mód zlyhania, keďže skutočné vajce pravdepodobne praskne v mieste, kde existujúci defekt vytvoril vysokú koncentráciu napätia alebo už prítomná mikrotrhlina narastie tak, že vajce sa rozbije.

Zatiaľ čo tieto materiálové nedokonalosti vyzerajú ako jednoduchá vec, ich dôsledok je veľmi hlboký. Ich náhodná prítomnosť znamená, že prasknutie vajca je efektívne stochastický proces, s pravdepodobnosťou prasknutia v nejakom danom bode (teda v nejakom objemovom elemente) závislom na napätí v tomto bode, tým ako dlho je tento bod pod týmto napätím a aj ako rýchlo sa pod toto napätie dostal. To znamená, že pravdepodobnosť, že vajce praskne kdekoľvek závisí na tom ako veľký objem je vystavený takmer-kritickému napätiu. Ak predpokladáme, že škrupina má približne konštantnú hrúbku a ďalšie parametre, tak tento objem bude úmerný povrchu a teda tvar, ktorý dokáže rýchlo rozložiť napätie bude mať menší povrch pod takmer-kritickým napätím a nižšiu pravdepodobnosť zlyhania. Toto prispieva k tomu, prečo rovnobežkový ťah môže mať väčší vplyv ako vyššie napätie na vrchu vajca, keďže tento ťah pôsobí na veľmi veľkom povrchu.

Záver

Uvažujúc všetko, čo sme tu spomínali aj citované experimentálne výsledky, môžeme teraz odpovedať na otázky v zadaní

- Vajcia sa ľahko rozbijú ak je rýchlo aplikovaná veľká sila na malý povrch, ale ich tvar dokáže rozložiť strihovú a normálovú silu do tangenciálnych napätí, kde je škrupina omnoho silnejšia.
- Vajcia sú najsilnejšie pozdĺž ich osí a väčšie zakrivenie efektívnejšie rozloží aplikované napätie.
- Väčšina vajec pravdepodobne zlyhá kvôli indukovanému rovnobežkovému ťahu, keďže keramický materiál je omnoho slabší v ťahu ako v kompresii, ale predpovedať mód zlyhania pre konkrétne vajce je takmer nemožné kvôli variabilite vajec a materiálovým defektom.

Filip Ayazi

filip@fykos.cz@fykos.cz

Úloha V.E ... neklamou nás?

12 bodů; (chybí statistiky)

Změřte kapacitu libovolné baterie (například tužkové AA) a porovnejte ji s deklarovanou hodnotou. *Matěj nevěří hodnotám od výrobců.*

Teorie

Kapacita baterie či akumulátoru je množství elektrického náboje, které může tento článek dodat při vybíjení. Běžně se rozlišuje kapacita *jmenovitá* (nominální) a *skutečná* (aktuální). První je hodnotou udávanou výrobcem a představuje náboj, jež článek může dodat za stanovených podmínek (typicky za pokojové teploty při vybíjení během pěti hodin), a to za předpokladu udržení stanoveného rozsahu napětí (běžně v rozmezí $\pm 10\%$ od napětí při plném nabití). Druhá je hodnotou náboje, který baterie vydá za daných konkrétních podmínek. Skutečná kapacita závisí na mnoha faktorech; například na stáří akumulátoru, podmínkách nabíjení, velikosti vybíjecího proudu, konečném vybíjecím napětí nebo teplotě!¹⁰

Známe-li časovou závislost proudu $I(t)$ procházejícího určitým obvodem, můžeme celkový průchozí náboj určit integrací jako

$$Q = \int_t I(t) dt.$$

Pro zpracování chyb využíváme především zákona přenosu chyb pro nezávislé proměnné¹¹

$$\sigma_V = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial P_i} \sigma_{P_i} \right)^2}, \quad (35)$$

kde hledáme chybu proměnné V , jež závisí na N proměnných P_i , které jsou naměřené s chybami σ_{P_i} .

Pomůcky a přístroje

AAA baterie typu *SHO 750 Orion* (Ni-MH), multimetr *UNI-T M840D* s třímístným displayem, nepřesností¹² $\pm (0,5\% + 3)$ pro napětí a $\pm (0,8\% + 3)$ pro proud, nabíječka *Volcraft IPC-1L*, motůrek, žárovka, tablet s aplikací *Skyflow* (coby kamera).

Výsledky měření

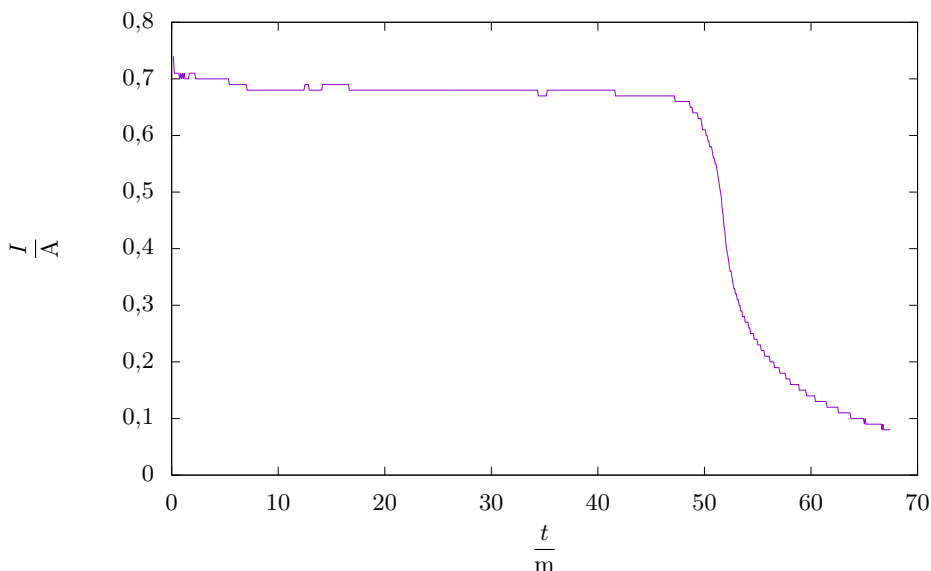
Měření probíhalo přibližně za normální pokojové teploty. Sestavili jsme sériový obvod složený ze zdroje (jedna či dvě baterie *SHO 750 Orion*), odporu (žárovky nebo žárovky a motoru v sérii) a ampérmetru.

Obvodem jsme nechali procházet proud, přičemž v pravidelných časových intervalech jsme zaznamenávali hodnotu proudu, resp. natáčeli jsme display ampérmetru tabletem s aplikací *Skyflow* v režimu timelapse (po pěti či šedesáti sekundách v závislosti na měření) a hodnoty následně odečetli. Kompletní časovou závislost jednoho měření znázorňuje obr. 4, časovou závislost prošlého náboje pak obr. 5.

¹⁰Battex: abeceda baterií a akumulátorů, kapacita [online][cit. 10.4.2021]. Dostupné z <http://www.battex.info/slovnicek-a-pojmy/kapacita%28článků+nebo+baterií%29>.

¹¹Wikipedia: Propagation of uncertainty [online][cit. 2.3.2021]. Dostupné z https://en.wikipedia.org/wiki/Propagation_of_uncertainty.

¹²Nepřesnost přístroje se nám bohužel nepodařilo dohledat, použili jsme tedy nepřesnost podobného přístroje jiné vývojové řady.



Obr. 4: Závislost proudu na čase.

Jak je z grafů zřejmé, obvodem prochází po většinu času přibližně konstantní proud. Pro srovnání s nominální kapacitou budeme část měření, ve které začne rychle docházet k poklesu proudu, zanedbávat.

Pro získání celkového náboje jsme proud numericky časově zintegrovali dle vztahu

$$Q = \int_{t_0}^{t_n} I(t) dt \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{I(t_i) + I(t_{i+1})}{2} (t_{i+1} - t_i) .$$

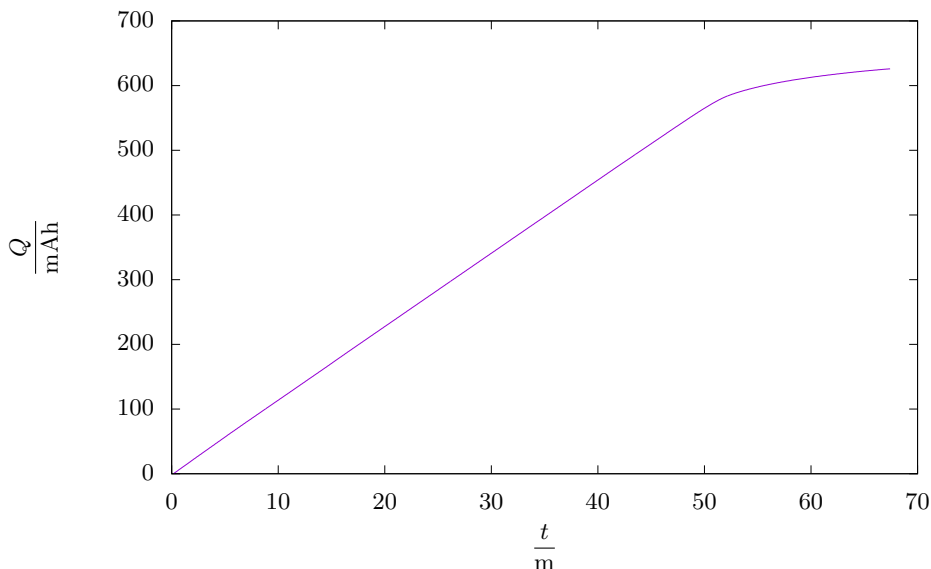
Jelikož obvodem procházel přibližně konstantní proud, pro jednoduchost přejdeme pro počítání chyb ke konstantní (střední) hodnotě proudu \bar{I} . Tu si definujeme právě tak, aby platilo $Q = \bar{I}t$ (tedy náboj získaný integrací jednoduše vydělíme celkovým časem). Ze zákona přenosu chyb pro násobení pak máme

$$\sigma_{Q_i, \text{sys}} = Q_i \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{I}}}{\bar{I}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2} ,$$

kde σ_X je chyba v určení veličiny X a Q_i je náboj získaný z i -tého měření. Odchylky proudu způsobené nepřesností ampérmetru činí přibližně 0,04 A pro naměřené proudy nad 0,6 A a 0,03 A pro proudy nižší.

Hodnoty pro jednotlivá měření jsou uvedeny v tabulkách 1 a 2, přičemž jsme oddělili měření se žárovkou od měření se žárovkou i motůrkem. Konkrétně jsou zde zaznamenány zátěž (z – pouze žárovka, zm – žárovka a motor v sérii), celkový náboj získaný numerickou integrací a střední hodnota proudu. Výslednou hodnotu kapacity Q získáme jednoduše aritmetickým průměrem.

Chyby u jednotlivých měření jsou pouze systematické, pro celkový náboj pak stanovíme chybu kombinovanou z chyby statistické i systematické¹³



Obr. 5: Závislost prošlého náboje na čase.

Pro měření se žárovkou byla stanovena (aktuální) kapacita

$$Q_z = (540 \pm 20) \text{ mAh},$$

pro měření se žárovkou i motůrkem pak

$$Q_{zm} = (650 \pm 180) \text{ mAh}.$$

¹³ Statistickou chybu aritmetického průměru určíme jako

$$\sigma_{Q,\text{stat}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (Q_i - Q)^2}.$$

Systematická chyba aritmetického průměru se spočte z chyb dílčích měření jako

$$\sigma_{Q,\text{sys}} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma_{Q_i}^2}.$$

Jelikož jsou si pro měření v rámci každé metody (vybití s nižším proudem, vybití s vyšším proudem...) systematické chyby velmi blízké, odhadneme celkovou systematickou chybu jako aritmetický průměr systematických chyb. Celkovou chybu pak stanovíme jako

$$\sigma_Q = \sqrt{\sigma_{Q,\text{sys}}^2 + \sigma_{Q,\text{stat}}^2}.$$

Tab. 1: Vybíjení se žárovkou. Chyby měření jsou $\sigma_t = 5$ s, $\sigma_{\bar{I}} = 0,04$ A a $\sigma_Q = 30$ mAh.

$\frac{t}{\text{s}}$	\bar{I} A	Q mAh
2 700	0,70	560
2 935	0,68	520
2 825	0,69	560
2 765	0,69	530

Tab. 2: Vybíjení se žárovkou a motůrkem. Chyby měření jsou $\sigma_t = 1$ s a $\sigma_{\bar{I}} = 0,03$ A.

$\frac{t}{\text{m}}$	\bar{I} A	Q mAh	σ_Q mAh
366	0,11	670	190
347	0,11	630	180

Mezi všemi měřeními jsme použítý zdroj (akumulátor) nabíjeli (přibližně) konstantním proudem I , který jsme zaznamenávali opět pomocí timelapse, tentokrát jsme však snímali display nabíječky, jenž hodnotu proudu ukazoval. Díky konstantnímu proudu se vztah pro celkový náboj redukuje na násobení $Q = It$. Hodnotu proudu budeme považovat za přesnou (více v diskuzi), v důsledku toho považujeme i celou systematickou chybu určení náboje za zanedbatelnou. V tabulkách pak chyby neudáváme a výsledná chyba aritmetického průměru je pouze statistická.

Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulkách 3 a 4.

Tab. 3: Nabíjení proudem 0,7 A. Chyba měření času je $\sigma_t = 5$ s.

$\frac{t}{\text{s}}$	Q mAh
4 000	777
3 925	763
3 815	741
3 840	746

Tab. 4: Nabíjení proudem 0,5 A. Chyba měření času je $\sigma_t = 5$ s.

$\frac{t}{\text{s}}$	Q mAh
5 770	801
5 395	749

Výsledné hodnoty činí

$$Q_{700} = (757 \pm 8) \text{ mAh}$$

pro proud 0,7 A a

$$Q_{500} = (780 \pm 30) \text{ mAh}.$$

pro proud 0,5 A.

Diskuze

Z naměřených hodnot je patrné, že baterie vydala vyšší náboj při pomalejším vybíjení, což je plně v souladu s předpovědí (docházelo k menším ztrátám energie). Systematické chyby u měření s nižším proudem jsou bohužel značné, což je způsobeno nevhodnou volbou rozsahu ampérmetru. Měřili jsme na rozsahu do 20 A, řád nejnižšího digitu byl 0,01 A – plná jedna desetina hodnoty proudu. Tento rozsah jsme však zvolili z toho důvodu, že použitý ampérmetr na nižším rozsahu nefungoval. Pro přesnější výsledky by bylo vhodné pokus opakovat s menším

rozsahem. Vzhledem k délce vybíjení odpovídají nominálnímu napětí spíše výsledky z delšího měření.

Hodnota kapacity při nabíjení byla konzistentně vyšší než hodnota při vybíjení. Vliv mohlo mít několik faktorů. Nabíjení je endotermický jev – pro uchování energie v chemickém článku je potřeba vyvolat endotermickou chemickou reakci. Projevem toho se například baterie během nabíjení ztelně zahřívala, což znamená nižší energetickou efektivitu. Přebytečný náboj při nabíjení se pak ztrácí v nevratných chemických reakcích v materiálu akumulátoru, které následně způsobují snížení kapacity, tedy opotřebování. V našem případě byl použitý akumulátor aktivně používán po několik let, lze tedy předpokládat poměrně velkou míru opotřebování.

Použité nabíjecí proudy byly poměrně vysoké, což mohlo dále snížit efektivitu nabíjení. To však naše měření nepotvrdilo (ani nevyvrátilo), jelikož se kapacity pro oba proudy v rámci chyby shodují; měření s nižším proudem pak dává dokonce vyšší průměrnou hodnotu, ale s mnohem větší chybou.

Výrobce udává nominální kapacitu $Q_v = 750$ mAh. Té jsou blíže měření z nabíjení, při kterých baterie pojala ztelně vyšší náboj, než jaký vydala při vybíjení. Nominální kapacita se však udává jako náboj, který je akumulátor schopný vydat, nikoliv přijmout.

Z výše uvedených důvodů usuzujeme, že ideálnímu způsobu určení nominálního napětí nejvíce odpovídalo měření při vybíjení nižším proudem. To v našem případě dalo výsledek $Q_{zm} = (650 \pm 180)$ mAh.

Do měření mohly vnést další chyby změny elektrických vlastností odporu v průběhu měření; experiment mohlo ovlivnit například zmíněné zahřívání baterie. Dále se také mohl měnit odpor obvodu (žárovky), to však na naše měření nemá velký vliv, neboť jsme měřili pouze procházející proud.

Hodnotu proudu při měření jsme považovali za přesnou, neboť se nám nepodařilo dohledat konkrétní přesnost displeje nabíječky. Konkrétní naměřené hodnoty pak nemají velkou váhu, nicméně i kdyby systematická chyba byla několikanásobně vyšší než při měření vybíjení s vyšším proudem, hodnoty naměřeného prošlého náboje by stále vycházely konzistentně vyšší než při vybíjení.

Závěr

Čtyřmi způsoby jsme změřili náboj vydaný či přijatý baterií (*SHO 750 Orion*) během vybíjení a nabíjení. Hodnoty jsou shrnuty v tabulce 5.

Tab. 5: Shrnutí výsledků.

způsob měření	$\frac{Q}{\text{mAh}}$	$\frac{\sigma_Q}{\text{mAh}}$
vybíjení, 0,7 A	540	20
vybíjení, 0,1 A	650	180
nabíjení, 0,7 A	760	8
nabíjení, 0,5 A	740	30

Fyzikální podstatou nejvíce měření nominální kapacity odpovídalo vybíjení s nižším proudem. Stanovená kapacita je tedy

$$Q = (650 \pm 180) \text{ mAh},$$

přičemž výrobce udává nominální kapacitu $Q_v = 750 \text{ mAh}$.

Vzhledem k opotřebovanosti baterie je pravděpodobné, že výrobce nám nijak zásadně nelhal.

Martin Vaněk

`martin@fykos.cz@fykos.cz`

Úloha V.S ... rezonance a tlumení

10 bodů; (chybí statistiky)

1. Na napnutém laně mohou existovat vlny ve výchylce $u(x, t)$ z rovnovážné polohy, které splňují vlnovou rovnici s tlumením

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Gamma \frac{\partial u}{\partial x},$$

kde v je fázová rychlost a Γ je tlumící koeficient. Proveďte fourierovskou substituci a určete disperzní vztah. Vyřešte jej pro vlnové číslo k . Jakou podmínku, vyjádřenou pomocí frekvence ω , fázové rychlosti v a koeficientu Γ , musí vlny splňovat, aby byly na laně pozorovány uzly (body, ve kterých lano zůstává v rovnovážné poloze, ale v jejichž okolí se pohybuje)?

2. Uvažujte švihadlo, přichycené na jednom konci k nehybné stěně. Ve vzdálenosti L od stěny jej chytíme do ruky a začneme s ním pohybovat nahoru a dolů, čímž v něm vytvoříme vlnění. Švihadlo s délkovou hustotou λ udržujeme v napětí T ve směru od stěny, výchylka tedy splňuje rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Pro výchylku konce švihadla, se kterým pohybuje, platí $u_0(t) = A \cos(\omega_0 t)$. Předpokládejte, že řešení lze zapsat ve formě dvou rovinných vln, pohybujících se v opačných směrech. Naleznete takové řešení pouze s využitím zadaných parametrů, tj. T , λ , L , A a ω_0 . Výsledné řešení má amplitudu rostoucí nade všechny meze pro určité frekvence. Určete jejich hodnoty a jim odpovídající vlnové délky.

Štěpán si hrál se švihadlem.

Lano

Fourierovská substituce nahrazuje časové derivace mocninami $-i\omega$ a prostorové derivace mocninami ik , kde k je vlnové číslo a ω je frekvence vlnění. Rovnici ze zadání přejde na

$$-\omega^2 \hat{u} = -v^2 k^2 \hat{u} + i\Gamma k \hat{u},$$

kde $\hat{u} = u_0 e^{i(kx - \omega t)}$ je komplexní výchylka. Rovnici vydělíme výrazem $-v^2 \hat{u}$ a dostaneme

$$\frac{\omega^2}{v^2} = k^2 - i \frac{\Gamma}{v^2} k.$$

Pravou stranu doplníme na čtverec

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\Gamma^2}{4v^4} &= k^2 - i \frac{\Gamma}{v^2} k - \frac{\Gamma^2}{4v^4}, \\ \frac{1}{4v^4} (4\omega^2 v^2 - \Gamma^2) &= \left(k - i \frac{\Gamma}{2v^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Nyní máme dvě možnosti. Buď platí $4\omega^2 v^2 > \Gamma^2$, potom

$$k - i\frac{\Gamma}{2v^2} = \pm \frac{1}{2v^2} \sqrt{4\omega^2 v^2 - \Gamma^2},$$

$$k = \frac{i\Gamma \pm \sqrt{4\omega^2 v^2 - \Gamma^2}}{2v^2}$$

a vlnové číslo k je komplexní. Pro výchylku dostaneme

$$\hat{u} = u_0 e^{ikx - i\omega t} = u_0 e^{-i\omega t} e^{\pm i\frac{x}{2v^2} \sqrt{4\omega^2 v^2 - \Gamma^2}} e^{-\Gamma\frac{x}{2v^2}}.$$

Výchylka má uzly v bodech

$$\frac{x}{2v^2} \sqrt{4\omega^2 v^2 - \Gamma^2} = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

kde n je celé číslo.

Druhou možností je $4\omega^2 v^2 \leq \Gamma^2$, potom

$$k - i\frac{\Gamma}{2v^2} = \pm \frac{i}{2v^2} \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega^2 v^2},$$

$$k = \frac{i}{2v^2} \left(\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega^2 v^2} \right)$$

a vlnové číslo k je čistě imaginární. Pro závislost komplexní výchylky v tomto případě platí

$$\hat{u} = u_0 e^{ikx - i\omega t} = u_0 e^{-i\omega t} e^{-\frac{x}{2v^2} \left(\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega^2 v^2} \right)}.$$

To znamená, že závislost amplitudy na souřadnici x je čistě exponenciální a neobsahuje tedy žádné uzly. Po provedení odmocniny za předpokladu, že Γ , ω a v jsou kladné, dostáváme hledanou podmínku pro existenci uzlů

$$\Gamma < 2\omega v.$$

Švihadlo

Druhá část úlohy používá vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Můžeme rovnou určit disperzní vztah pomocí fourierovské substituce

$$-\omega^2 = \frac{T}{\lambda} (-k^2),$$

$$\omega = |k| \sqrt{\frac{T}{\lambda}}.$$

Obecná rovinná vlna šířící se podél osy x je popsána rovnicí

$$\hat{u}_1(x, t) = B_1 e^{i(k_1 x - \omega_1 t - \varphi_1)},$$

ve které jsou amplituda B_1 , vlnové číslo k_1 , úhlová frekvence ω_1 a počáteční fáze φ_1 reálná čísla. Podle zadání hledáme řešení ve tvaru dvou proti sobě se pohybuujících vln neboli

$$\hat{u} = \hat{u}_1 + \hat{u}_2,$$

kde je bez újmy na obecnosti k_1 kladné a k_2 záporné. Předpokládáme kartézskou soustavu souřadnic, v níž je osa x shodná s klidovým stavem švihadla. Bod, kde se švihadlem pohybujeme, se nachází v $x = 0$. Okrajové podmínky jsou následující. Nejprve musíme zajistit, že začátek švihadla se pohybuje společně s naší rukou

$$\operatorname{Re} \hat{u}(0, t) = A \cos(\omega_0 t).$$

Dále, konec švihadla u stěny zůstává nehybný

$$\hat{u}(L, t) = 0.$$

Začneme první podmínkou, do které dosadíme $\operatorname{Re} e^{ix} = \cos(x)$. Následně využijeme sudosti cosinu a nakonec použijeme součtový vzorec

$$\begin{aligned} A \cos(\omega_0 t) &= B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = \\ &= B_1 (\cos(\omega_1 t) \cos \varphi_1 - \sin(\omega_1 t) \sin \varphi_1) + \\ &+ B_2 (\cos(\omega_2 t) \cos \varphi_2 - \sin(\omega_2 t) \sin \varphi_2). \end{aligned} \quad (36)$$

Funkce na levé straně rovnice je sudá, to samé musí platit i pro pravou stranu. Ta se skládá z lineární kombinace sinů a cosinů čili všechny siny se musí sečíst na nulu

$$B_1 \sin(\omega_1 t) \sin \varphi_1 + B_2 \sin(\omega_2 t) \sin \varphi_2 = 0.$$

Aby tato rovnice platila pro všechny časy, obě frekvence musí být stejné neboli $\omega_1 = \omega_2$. Potom jí můžeme vydělit $\sin(\omega_1 t)$ a dostaneme

$$0 = B_1 \sin \varphi_1 + B_2 \sin \varphi_2. \quad (37)$$

Ve vztahu (36) se tedy můžeme zbavit všech sinů. Výsledkem je

$$A \cos(\omega_0 t) = (B_1 \cos \varphi_1 + B_2 \cos \varphi_2) \cos(\omega_1 t).$$

Opět využijeme toho, že dva cosiny se mohou rovnat jen tehdy, pokud mají stejnou frekvenci $\omega_0 = \omega_1$. Rovnici vydělíme $\cos(\omega_0 t)$, čímž získáme

$$A = B_1 \cos \varphi_1 + B_2 \cos \varphi_2. \quad (38)$$

Tím jsme vyčerpali první podmínku a pokračujeme druhou. Předtím ještě připomeňme, že z rovnosti úhlových frekvencí $\omega_1 = \omega_2$, disperzního vztahu $\omega_0 \propto |k|$ a předpokladu o znaménkách vlnových čísel nutně vyplývá $k_1 = -k_2$. Označme pro jednoduchost $k_1 = k$. Funkci u vyjádříme v obecném bodě x , přičemž se pokusíme oddělit časovou a prostorovou závislost

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \operatorname{Re} (B_1 e^{i(kx - \omega_0 t - \varphi_1)} + B_2 e^{i(-kx - \omega_0 t - \varphi_2)}) = \\ &= B_1 \cos(kx - \omega_0 t - \varphi_1) + B_2 \cos(-kx - \omega_0 t - \varphi_2) = \\ &= (B_1 \cos(kx - \varphi_1) + B_2 \cos(kx + \varphi_2)) \cos(\omega_0 t) + \\ &+ (B_1 \sin(kx - \varphi_1) - B_2 \sin(kx + \varphi_2)) \sin(\omega_0 t) = \\ &= f(x) \cos(\omega_0 t) + g(x) \sin(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (39)$$

Funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsme zavedli pro zjednodušení zápisu. Druhou podmínku tak můžeme vyjádřit jako

$$0 = f(L) \cos(\omega_0 t) + g(L) \sin(\omega_0 t) .$$

V čase $t = 0$ bude sinus nulový, takže pro splnění rovnice bude muset platit $f(L) = 0$. Podobnou úvahou dostaneme $g(L) = 0$. Tyto dvě podmínky jsou zřejmě postačující pro to, aby byl celý výraz nulový ve všech časech.

Začneme například s $f(L) = 0$. Pomocí součtových vzorců se pokusíme oddělit proměnné $B_{1,2}$ a $\varphi_{1,2}$, pro které už máme rovnice výše, od kL . Dostáváme

$$\begin{aligned} 0 = f(L) &= B_1 \cos(kL - \varphi_1) + B_2 \cos(kL + \varphi_2) = \\ &= (B_1 \sin \varphi_1 - B_2 \sin \varphi_2) \sin(kL) + (B_1 \cos \varphi_1 + B_2 \cos \varphi_2) \cos(kL) . \end{aligned} \quad (40)$$

Výraz před $\cos(kL)$ je podle (38) roven A . Zároveň vidíme, že $\sin(kL) \neq 0$, protože jinak by platilo $0 = A \cos(kL)$, což by nebylo možné současně splnit. Podmínku tedy můžeme upravit do tvaru

$$-A \frac{\cos(kL)}{\sin(kL)} = B_1 \sin \varphi_1 - B_2 \sin \varphi_2 . \quad (41)$$

Druhá rovnice bude

$$\begin{aligned} 0 = g(L) &= B_1 \sin(kL - \varphi_1) - B_2 \sin(kL + \varphi_2) = \\ &= (B_1 \cos \varphi_1 - B_2 \cos \varphi_2) \sin(kL) - (B_1 \sin \varphi_1 + B_2 \sin \varphi_2) \cos(kL) . \end{aligned} \quad (42)$$

V tomto případě je člen před $\cos(kL)$ díky (37) nulový. Jelikož nemůže být nulový $\sin(kL)$, musí být nulový výraz před ním neboli

$$0 = B_1 \cos \varphi_1 - B_2 \cos \varphi_2 . \quad (43)$$

Rovnice (37), (38), (41) a (43) tvoří soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých, které můžeme v principu vyřešit. My ale potřebujeme vyjádřit pouze $u(x, t)$. Ukazuje se, že explicitní výrazy pro úhly a amplitudy vln tvořících u hledat nemusíme. Vyjdeme z rovnice (39) a dosadíme za $f(x)$ a $g(x)$. Druhou zmiňovanou funkci máme vyjádřenou ve vztahu (42), akorát jen místo konkrétního bodu L napíšeme obecné x . Dosazením z (37) a (43) snadno zjistíme, že g musí být identicky nulové, píšeme $g(x) \equiv 0$. Funkci $f(x)$ najdeme obdobným způsobem v rovnici (40). Dosadíme pro změnu z (38) a (41) a dostaneme

$$f(x) = -A \frac{\cos(kL)}{\sin(kL)} \sin(kx) + A \cos(kx) = A \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)} .$$

Nakonec ještě pomocí disperzního vztahu nahradíme konstanty. Výsledná funkce je

$$u(x, t) = f(x) \cos(\omega_0 t) = A \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \cos(\omega_0 t) = A \frac{\sin\left(\omega_0(L-x)\sqrt{\frac{\lambda}{T}}\right)}{\sin\left(\omega_0 L \sqrt{\frac{\lambda}{T}}\right)} \cos(\omega_0 t) .$$

Dosazením $x = 0$ a $x = L$ snadno ověříme, že jsou splněny obě okrajové podmínky.

Řešení má divergující amplitudy v případě, že

$$0 = \sin(kL) = \sin\left(\omega_0 L \sqrt{\frac{\lambda}{T}}\right) .$$

To nastává, pokud

$$kL = m\pi,$$

kde m je celé číslo. Vlnovou délku lze vyjádřit jako $l = \frac{2\pi}{k}$, takže platí

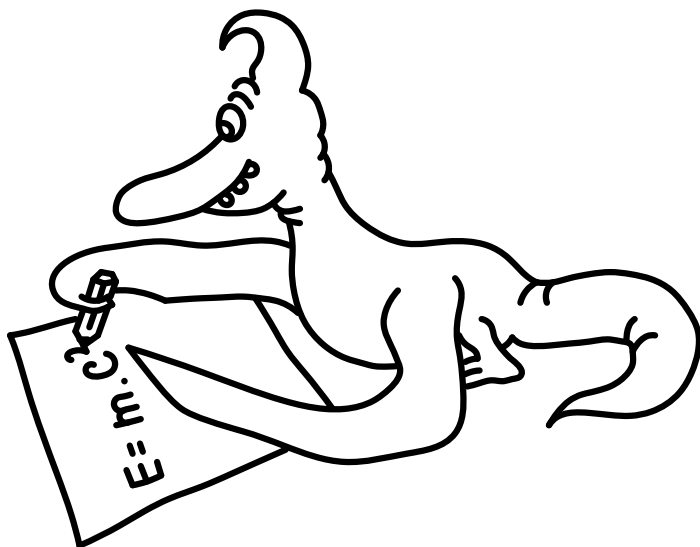
$$\frac{2\pi}{l}L = m\pi \Rightarrow 2L = ml.$$

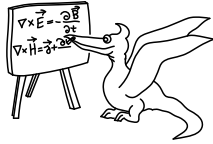
Divergující amplituda (která odpovídá rezonanci) se tedy objevuje v případech, kdy je celočíselný násobek vlnové délky roven $2L$ neboli kdy existuje celé číslo m splňující

$$l = \frac{2L}{m}.$$

Štěpán Marek

stepan.marek@fykos.cz@fykos.cz





Seriál: Polarizace

V minulém díle seriálu jsme se zabývali vlněním, které se odehrávalo pouze v jednom rozměru – struna mohla oscilovat jenom vertikálně, částice reprezentovala pouze jedna vlnová funkce atp. Nyní se zkusíme zamyslet nad tím, co se stane, když se vlnění objeví ve více rozměrech, které jsou navzájem provázány. Například můžeme přemýšlet nad oscilacemi struny v obou směrech kolmých na směr napnutí struny, nebo nad tím, jaké vlny mohou existovat v nabitě tekutině, kde se kromě hustoty a teploty může měnit i nábojová hustota. Jako konkrétní příklad si ukážeme pomalé vlnění v plazmě, které splňuje rovnice takzvané magnetohydrodynamiky. Začneme ale pomaleji, se strunou, která může kmitat ve dvou směrech.

Švihadlo

Uvažujme švihadlo napnuté mezi dvěma body, přičemž napětí ve švihadle je T . Jeho délková hustota je ρ . Zvolme soustavu souřadnic tak, aby bylo napnuté podél osy x , a aby bylo jedním koncem uchyceno v počátku soustavy souřadnic. Nechť je u výchylka švihadla z rovnovážné polohy ve vertikálním směru (podél osy z) a v je výchylka v horizontálním směru (podél osy y , tj. kolmo na směr napětí). Mohli bychom zopakovat stejné odvození jako v minulém díle, avšak musíme brát v potaz dva rozměry, ve kterých se švihadlo může pohybovat. To lze nejlépe učinit pomocí vektorového formalizmu.

Víme, že vertikální sílu působící na element délky dx v jednom rozměru šlo určit jako $dF = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$. Lze předpokládat, že oscilace v dalším směru budou nezávislé (nijak nezávisí na oscilacích v původním směru), takže pro sílu v druhém směru bude platit $dF' = T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx$. Pro celkovou sílu můžeme psát

$$d\mathbf{F} = T \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} dx,$$

kde $\mathbf{u} = (u, v)^\top$ a $d\mathbf{F} = (dF, dF')^\top$. Druhý Newtonův zákon pak lze zapsat jako

$$d\mathbf{F} = dm \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho dx \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}$$

a tedy

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}.$$

Toto je naše dvourozměrná analogie vlnové rovnice. Důležité je, že zachováváme fakt, že výchylky v obou směrech jsou stále funkce pouze dvou proměnných (času a příslušné souřadnici) čili můžeme provést fourierovskou substituci jak jsme zvyklí. To vede k vektorové rovnici

$$-\omega^2 \hat{\mathbf{u}} = \frac{T}{\rho} (-k^2) \hat{\mathbf{u}},$$

kde $\hat{\mathbf{u}}$ je komplexní vektorová výchylka, pro kterou platí $\mathbf{u} = \text{Re } \hat{\mathbf{u}}$, přičemž reálnou část bereme z každé komponenty zvlášť. Toto je vlastně soustava algebraických rovnic, kterou lze zapsat v maticové podobě jako

$$\begin{pmatrix} \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde \hat{u} a \hat{v} jsou komplexní výchylky v jednotlivých směrech. Ve fourierovské substituci jsme předpokládali tvary řešení

$$\begin{aligned} \hat{u} &= u_0 e^{ikx - i\omega t}, \\ \hat{v} &= v_0 e^{ikx - i\omega t}, \end{aligned}$$

kde u_0 a v_0 jsou potenciálně komplexní konstanty. Jelikož exponenciální část je pro oba směry shodná, můžeme maticovou rovnici upravit na

$$\begin{pmatrix} \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zde použijeme již známý formalismus z normálních modů – takovéto rovnice mají netriviální řešení pouze pokud determinant této matice je nula

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 \right)^2 \Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\frac{T}{\rho}} k.$$

Dostáváme stejný disperzní vztah jako v jednorozměrném případě. Matice se nyní stává nulovou maticí, takže u_0 i v_0 jsou zcela neomezeny, tj. vlnění můžeme zapsat jako libovolnou lineární kombinaci

$$\hat{\mathbf{u}}(x, t) = u_0 e^{\pm ikx - i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_0 e^{\pm ikx - i\omega t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde směry propagace obou vln mohou být nezávislé. Těmto odlišným vlnám se říká polarizace daného vlnění a vektor $(u_0, v_0)^T$ nazýváme polarizační vektor. Jak přesně určíme konstanty u_0 a v_0 ? Uvažujme nyní konkrétní případ – necht se švihadlo pohybuje jako při klasickém přeskačování, tj. obíhá okolo rovnovážné polohy tak, že jednotlivé elementy se pohybují konstantní úhlovou rychlostí po kružnicích, jejichž poloměr se zvyšuje směrem ke středu švihadla, kde dosahuje maxima. V čase $t = 0$ lze amplitudu švihadla zapsat jako

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{pmatrix} A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde A je reálná konstanta. Důležitá je také rychlost švihadla v čase $t = 0$, kterou můžeme zapsat jako

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ A\omega \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{pmatrix}.$$

Jak tento pohyb zachytit pomocí polarizací? U stojatého vlnění už jsme zvyklí, že pohyb lze zpravidla popsat jako superpozici dvou vln propagujících se v opačných směrech. Navrhneme tedy

$$\hat{\mathbf{u}}(x, t) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ikx - i\omega t} + \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} e^{-ikx - i\omega t}.$$

V čase $t = 0$ potom platí

$$\hat{\mathbf{u}}(x, 0) = \begin{pmatrix} u_0 e^{ikx} + u_1 e^{-ikx} \\ v_0 e^{ikx} + v_1 e^{-ikx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_0 + u_1) \cos(kx) + i(u_0 - u_1) \sin(kx) \\ (v_0 + v_1) \cos(kx) + i(v_0 - v_1) \sin(kx) \end{pmatrix}.$$

Reálnou část určíme jako

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{pmatrix} (\operatorname{Re} u_0 + \operatorname{Re} u_1) \cos(kx) + (\operatorname{Re}(iu_0) - \operatorname{Re}(iu_1)) \sin(kx) \\ (\operatorname{Re} v_0 + \operatorname{Re} v_1) \cos(kx) + (\operatorname{Re}(iv_0) - \operatorname{Re}(iv_1)) \sin(kx) \end{pmatrix}.$$

Abychom splnili počáteční podmínky, potřebujeme $k = \frac{\pi}{L}$ a dále

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} u_0 + \operatorname{Re} u_1 &= 0, \\ \operatorname{Re}(iu_0) - \operatorname{Re}(iu_1) &= A, \\ \operatorname{Re} v_0 + \operatorname{Re} v_1 &= 0, \\ \operatorname{Re}(iv_0) - \operatorname{Re}(iv_1) &= 0. \end{aligned}$$

Jelikož pro obecné komplexní číslo platí

$$\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z,$$

můžeme psát

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} u_0 &= -\operatorname{Re} u_1, \\ \operatorname{Re} v_0 &= -\operatorname{Re} v_1, \\ \operatorname{Im} v_0 &= \operatorname{Im} v_1, \\ \operatorname{Im} u_0 &= \operatorname{Im} u_1 - A. \end{aligned}$$

Toto jsou první čtyři rovnice pro celkem osm neznámých (reálné a imaginární části $u_{0,1}$ a $v_{0,1}$). Další čtyři rovnice lze odvodit ze vztahu pro počáteční rychlost. Máme

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} = (-i\omega) \hat{\mathbf{u}}$$

a tedy

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \omega \begin{pmatrix} (\operatorname{Re}(-iu_0) + \operatorname{Re}(-iu_1)) \cos(kx) + (\operatorname{Re} u_0 - \operatorname{Re} u_1) \sin(kx) \\ (\operatorname{Re}(-iv_0) + \operatorname{Re}(-iv_1)) \cos(kx) + (\operatorname{Re} v_0 - \operatorname{Re} v_1) \sin(kx) \end{pmatrix}.$$

Tím jsme získali čtyři rovnice

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} u_0 &= -\operatorname{Im} u_1, \\ \operatorname{Re} u_0 &= \operatorname{Re} u_1, \\ \operatorname{Im} v_0 &= -\operatorname{Im} v_1, \\ \operatorname{Re} v_0 &= \operatorname{Re} v_1 + A. \end{aligned}$$

Dosažením z předchozích vztahů dostáváme

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} u_1 - A &= -\operatorname{Im} u_1, \\ -\operatorname{Re} u_1 &= \operatorname{Re} u_1, \\ \operatorname{Im} v_1 &= -\operatorname{Im} v_1, \\ -\operatorname{Re} v_1 &= \operatorname{Re} v_1 + A. \end{aligned}$$

Výsledkem je

$$\begin{aligned} u_0 &= -i\frac{A}{2}, & v_0 &= \frac{A}{2}, \\ u_1 &= i\frac{A}{2}, & v_1 &= -\frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Celkový časový vývoj lze popsat rovnicí

$$\hat{\mathbf{u}}(x, t) = \begin{pmatrix} -i\frac{A}{2}e^{ikx} + i\frac{A}{2}e^{-ikx} \\ \frac{A}{2}e^{ikx} - \frac{A}{2}e^{-ikx} \end{pmatrix} e^{-i\omega t} = A \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \\ i\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \end{pmatrix} e^{-i\omega t},$$

tudíž v reálné výchylce

$$\mathbf{u}(x, t) = A \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Vlny v plazmatu

Rozměr, ve kterém vlny oscilují, ovšem nemusí být pouze prostorová dimenze, může se jednat o jiný stupeň volnosti. Tuto skutečnost budeme reprezentovat na modelu plazmatu. Předpokládejme, že plazma se skládá z nabitých částic, elektronů a jader. Budeme uvažovat pomalé pohyby, tj. budeme předpokládat, že jakákoliv dynamika elektronů ustala a vedla k vybalancování elektrického pole. Dále budeme zkoumat pouze plazma, kde se veškeré hodnoty mění v prostoru pouze v závislosti na souřadnici x kartézského souřadnicového systému (představujeme si tenký sloupec plazmatu).

Při řešení vyjdeme z rovnic magnetohydrodynamiky. Jedná se o soustavu dvou skalárních a dvou vektorových diferenciálních rovnic. Postupně je nyní představíme.

První je tzv. rovnice kontinuity, která zajišťuje, že se hmota plazmatu nikam neztrácí. Její tvar je

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) = 0,$$

kde ρ je hustota plazmatu a $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^\top$ je jeho rychlost. Další skalární rovnicí je stavová rovnice plazmatu. Tu je obecně složité určit přesně, takže zde použijeme pouze obecnou fenomenologickou stavovou rovnici, která má tvar

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) = 0,$$

kde P je tlak v plazmatu a γ je konstanta. Třeba pro ideální plyn by se γ pojila s Poissonovou konstantou. Tato rovnice vlastně zajišťuje adiabatičnost stlačování plazmatu.

Můžeme přejít k vektorovým rovnicím. První z nich je tzv. Navier-Stokesova rovnice, která reprezentuje druhý Newtonův zákon v tekutinách

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{v}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial P}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)^\top$ je magnetické pole v plazmatu a \times značí vektorový součin. Této rovnici je o něco složitější porozumět, ale vnímejme ji tak, že na pravé straně jsou síly na jednotku

objemu tekutiny, jednak kvůli nerovnosti tlaku a zadruhé kvůli magnetickému poli, zatímco na levé straně je popsána změna hybnosti tekutiny v daném bodě.

Poslední vektorová rovnice je tzv. indukční rovnice, která plyne z Maxwellových rovnic v našem modelu a má tvar

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_z}{\partial x} \\ \frac{\partial(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_y}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Přímé řešení těchto rovnic je zřejmě extrémně těžký úkol – jedná se o soustavu nelineárních diferenciálních rovnic. Ukazuje se, že jedno relativně triviální řešení se sestává z klidového stavu $\rho = \rho_0$, $P = P_0$, $\mathbf{v} = 0$ a $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$, kde veličiny označené indexem 0 jsou konstantní jak v čase, tak v prostoru. Kolem tohoto klidového stavu lze rovnice linearizovat, čímž získáme vlnové rovnice.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že magnetické pole \mathbf{B}_0 leží v rovině xz , tedy $B_{0y} = 0$. Dále předpokládejme, že obecně proměnné lze zapsat jako $\rho = \rho_0 + \rho_1(x, t)$, kde $|\rho_1| \ll |\rho_0|$ pro všechny časy a pozice (obdobně pro ostatní veličiny). Dosazením těchto výrazů můžeme rovnice linearizovat, pokud zachováme členy pouze do prvního řádu „malých“ veličin. Nezapomeňme přitom, že $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$.

První rovnice je linearizovaná jako

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} = 0.$$

Druhá vyžaduje složitější úpravu

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{1x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{P_0 + P_1}{(\rho_0 + \rho_1)^\gamma} \right) = 0.$$

Platí

$$(\rho_0 + \rho_1)^{-\gamma} = \rho_0^{-\gamma} \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^{-\gamma} \approx \rho_0^{-\gamma} \left(1 - \frac{\gamma \rho_1}{\rho_0} \right).$$

Pokud zachováme pouze členy do prvního řádu, dostáváme

$$\rho_0^{-\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(P_0 - P_0 \frac{\gamma \rho_1}{\rho_0} + P_1 \right) = 0.$$

Jelikož P_0 je konstantní a ostatní členy v druhé závorce jsou již prvního řádu „malosti“, pouze časová derivace zůstane v našem přiblížení do prvního řádu a platí (pro nenulovou hustotu ρ_0)

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0.$$

Navier-Stokesovu rovnici rozepíšeme v jednotlivých komponentech vektorů. Dále zavedeme úhel α , který určuje odchylku pole \mathbf{B}_0 od směru osy x . Platí $B_{0x} = B_0 \cos \alpha$, $B_{0z} = B_0 \sin \alpha$, kde $B_0 = |\mathbf{B}_0|$. Potom můžeme psát (zde již bez odvození, žádné zvláštní triky tu nejsou)

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial v_{1x}}{\partial t} &= -\frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{1}{\mu_0} B_0 \sin \alpha \frac{\partial B_{1z}}{\partial x}, \\ \rho_0 \frac{\partial v_{1z}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0} B_0 \cos \alpha \frac{\partial B_{1z}}{\partial x}, \\ \rho_0 \frac{\partial v_{1y}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0} B_0 \cos \alpha \frac{\partial B_{1y}}{\partial x}.\end{aligned}$$

Následující tři vztahy odvodíme obdobným způsobem z indukční rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_{1x}}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial B_{1z}}{\partial t} &= B_0 \cos \alpha \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} - B_0 \sin \alpha \frac{\partial v_{1x}}{\partial x}, \\ \frac{\partial B_{1y}}{\partial t} &= B_0 \cos \alpha \frac{\partial v_{1y}}{\partial x}.\end{aligned}$$

Celkem tedy máme osm rovnic pro osm neznámých – 3 komponenty \mathbf{B}_1 , 3 komponenty \mathbf{v}_1 , ρ_1 a P_1 .

Ve vektorových rovnicích jsme záměrně psali komponentu y jako poslední. Důvodem je, že jsou oddělené od ostatních – neznámé v_{1y} a B_{1y} se vyskytují pouze v nich. To znamená, že vlnění popsané těmito dvěma rovnicemi je nezávislé na vlnění, které je popsáno zbytkem rovnic.

Dále postupujeme již standardně – provedeme fourierovskou substituci pro všechny veličiny typu $\rho_1(x, t) \rightarrow \hat{\rho}_1 = A e^{ikx - i\omega t}$, kde A je komplexní konstanta a $\hat{\rho}_1$ je komplexní výchylka (v tomto případě hustoty). Všech osm rovnic pak lze zapsat jako dvě maticové rovnice (jedna pro proměnné v_{1y} a B_{1y} , druhá pro ostatní proměnné)

$$\begin{pmatrix} -i\omega\rho_0 & -ik\frac{1}{\mu_0}B_0\cos\alpha \\ ikB_0\cos\alpha & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_{1y} \\ \hat{B}_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -i\omega\rho_0 & 0 & \frac{ik}{\mu_0}B_0\sin\alpha & 0 & ik \\ 0 & -i\omega\rho_0 & -\frac{ik}{\mu_0}B_0\cos\alpha & 0 & 0 \\ ikB_0\sin\alpha & -ikB_0\cos\alpha & -i\omega & 0 & 0 \\ ik\rho_0 & 0 & 0 & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega\frac{\gamma P_0}{\rho_0} & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_{1x} \\ \hat{v}_{1z} \\ \hat{B}_{1z} \\ \hat{\rho}_1 \\ \hat{P}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde jsme vypustili triviální rovnici $-i\omega\hat{B}_{1x} = 0$, ze které plyne právě $\hat{B}_{1x} = 0$. Tím máme dva potenciální typy vlnění. Abychom určili disperzní vzorec, je potřeba spočítat determinant matice odpovídající danému vlnění. Zde se budeme věnovat pouze vlnění v v_{1y} a B_{1y} . Tyto vlny nazýváme Alfvénovy vlny.

Determinant matice 2×2 určíme snadno

$$\begin{vmatrix} ikB_0\cos\alpha & i\omega \\ -i\omega\rho_0 & -ik\frac{1}{\mu_0}B_0\cos\alpha \end{vmatrix} = k^2\frac{1}{\mu_0}B_0^2\cos^2\alpha - \omega^2\rho_0.$$

Z podmínky, že determinant musí být roven nule, vychází disperzní vztah

$$\omega = \frac{B_0 \cos \alpha}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} k.$$

To znamená, že vlny mají lineární disperzi (stejnou jako světlo nebo zvuk) s fázovou rychlostí

$$v_p = \frac{B_0 \cos \alpha}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}.$$

Platí tedy, že čím více je pole \mathbf{B}_0 odklopené od směru x , tím pomaleji se vlny propagují. Pro určení polarizačních vektorů dosadíme tento výsledek zpět do maticové rovnice

$$\begin{pmatrix} ikB_0 \cos \alpha & i \frac{kB_0 \cos \alpha}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \\ -i \frac{kB_0 \cos \alpha}{\sqrt{\mu_0}} \sqrt{\rho_0} & -i \frac{kB_0 \cos \alpha}{\mu_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_{1y} \\ \hat{B}_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

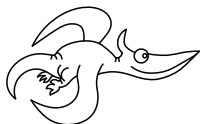
Z čehož plyne, že možné řešení je

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_{1y} \\ \hat{B}_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \\ -\frac{\nu}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \end{pmatrix},$$

kde ν je komplexní konstanta s rozměrem rychlosti. Oscilace v B_{1y} probíhají v přímé antifázi k oscilacím v_{1y} a jsou větší pro nižší hustotu plazmatu ρ_0 .

Závěrem

V tomto seriálu jsme postupně objevovali systémy, které všemožně kmitají, vlní se a oscilují v blízkém okolí lokálního minima energie. Svět vln ovšem není omezen pouze na malé oscilace, existují i typy vlnění, které splňují některé charakteristiky (například zachovávají tvar při pohybu), ale od jednoduchých vln se odlišují. Například rovnice, která je popisuje, může být nelineární, takže vlny musí mít konkrétní amplitudu. Nelineární rovnice jsou ovšem výrazně složitější na řešení, zejména kvůli tomu, že nemůžeme uplatnit princip superpozice. Takové systémy se v současnosti stále zkoumají. Nicméně lineární vlnění a oscilace se stále hodně často objevují v mnoha systémech a my věříme, že zkušenosti nabyté v tomto seriálu se Vám budou velmi hodit ve Vaší fyzikální kariéře.



Pořadí řešitelů po V. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%“	“%“	Σ
		100	110	264									
1. Lukáš Linhart	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	–	79	62	148								
2. Vojtěch Kadeřábek	G Mensa, Praha	–	68	44	105								
3. Vladimíra Jiříčková	G J. Vrchlického, Klatovy	–	60	34	82								
4. Daniel Čtvrtečka	G Christiana Dopplera, Praha	–	70	22	52								
5. David Mendl	G P. de Coubertina, Tábor	–	59	20	47								
6. Veronika Bartáková	Slovanské G, Olomouc	–	70	19	45								
7. Anežka Čechová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	57	16	39								
8. Richard Materna	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	53	13	32								
9. Sandeep Kandi	IMSA, Aurora, USA	–	41	11	27								
10. Lukáš Jarábek	G Grösslingová, Bratislava	–	39	10	23								
11. Vítězslav Lamoš	G, Omská, Praha	–	57	9	21								
12. Boris Pasterňak	Leaf Academy	–	86	8	19								
13. Kristián Matuš	G, Nový Jičín	–	48	6	15								
14. Samuel Ševčík	G, Jeseník	–	59	5	13								
15.–16. Jakub Ebringer	G, Blansko	–	56	4	10								
15.–16. Vojtěch Janáček	G F. X. Šaldy, Liberec	–	37	4	10								
17. Johana Vaníčková	G, Českolipská, Praha	–	57	3	8								
18. Krishna Kumar Sah	Awasiya Public School	–	47	3	7								
19. Isuru Liyanawaduge	D.S.Senanayake College	–	100	3	6								
20. Patrik Pecina	G F. Palackého, Val. Mez.	–	31	2	5								
21. Václav Vinkler	Wichterlovo G, Ostrava	–	17	1	3								

Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%	“%	Σ
		100	110	264									
1. <i>David Bálek</i>	G Legionářů, Příbram	–	85	50	120								
2. <i>Pavel Provazník</i>	G Dašická, Pardubice	–	65	48	115								
3. <i>Jonáš Dej</i>	Wichterlovo G, Ostrava	–	75	48	114								
4.–5. <i>Barbora Čemanová</i>	G, Park mládeže, Košice	–	74	41	99								
4.–5. <i>Jan Lepič</i>	G, Strakonice	–	56	41	99								
6. <i>Jakub Hadač</i>	G V. Hlavatého, Louny	–	70	39	94								
7. <i>Martin Kysela</i>	G, Český Krumlov	–	63	39	93								
8. <i>Alexander Stoyanov</i>	91 Germ. Lang. Sch. "Pr. K. G"	–	42	35	84								
9. <i>Vojtěch Juza</i>	G, Litomyšl	–	57	31	74								
10. <i>Lukáš Létal</i>	G J. Škody, Přerov	–	58	28	67								
11. <i>Miruna Neacsu</i>	Inter. Computer HS, Bucharest, RO	–	51	27	65								
12. <i>Tomáš Patsch</i>	Slovanské G, Olomouc	–	84	25	59								
13. <i>Daniela karpíšková</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	49	23	56								
14. <i>Evan Kim</i>	Tesla STEM High School, USA	–	82	23	54								
15.–16. <i>Vít Brázda</i>	G Dašická, Pardubice	–	80	22	53								
15.–16. <i>Ladislav Vávra</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	–	32	22	53								
17. <i>Jan Engler</i>	G, Hodonín	–	77	21	51								
18. <i>Petr Pňos</i>	Biskupské G, Brno	–	74	20	48								
19. <i>Vojtěch Kysilka</i>	G, Roudnice nad Labem	–	51	18	43								
20. <i>Karolína Šedová</i>	G Jana Keplera, Praha	–	91	17	41								
21. <i>Juraj Pavolko</i>	G, P. Horova, Michalovce	–	54	17	40								
22. <i>Martin Švanda</i>	Arcibiskupské G, Praha	–	73	15	37								
23. <i>Ioana Mîlea</i>	CN Mihai Eminescu, Romania	–	61	15	35								
24. <i>Jiří Jirásek</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	52	13	32								
25. <i>Ivy Qin</i>	RC Palmer Sec. Sc.	–	42	12	28								
26.–27. <i>Julie Křimská</i>	G Jana Keplera, Praha	–	65	11	26								
26.–27. <i>Dalibor Očenášek</i>	G Uničov	–	52	11	26								
28. <i>Jakub Genčur</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	96	9	22								
29. <i>Jiří Mládek</i>	G, Soběslav	–	32	8	18								
30. <i>Ashmit Dutta</i>	Wayzata High School	–	80	7	16								
31. <i>Jan Cícha</i>	Gymnázium Brno-Bystrc	–	42	6	15								
32. <i>Pragun Pudukoli</i>	Sishu Griha HS, India	–	58	6	14								
33. <i>Domínik Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	–	50	5	12								
34. <i>Petr Vitko</i>	G Teplice	–	37	4	10								
35. <i>Barbora Peřinová</i>	Česká zemědělská akademie Humpol	–	31	4	9								
36. <i>Jakub Koňárek</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	73	3	8								
37. <i>Vojtěch Štěpán</i>	G, Benešov	–	100	3	6								
38. <i>Damián Tancoš</i>	G, Kukučínova, Poprad	–	14	2	5								
39. <i>Patrik Jendele</i>	SPŠ stavební Plzeň	–	36	2	4								
40. <i>Timotej Marhefka</i>	G sv. Jána Pavla II., Poprad	–	5	1	2								

Kategorie třetích ročníků

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student Pílný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%	“%	Σ
		100	100	240									
1. Patrik Kašpárek	Katolické gymnázium Třebíč	–	86	65	155								
2. Vojtěch Kuchař	Wichterlovo G, Ostrava	–	78	58	140								
3. Šimon Kurz	G Ludka Pika, Plzeň	–	63	45	109								
4. Marek Milička	G dr. K. Polesného., Znojmo	–	79	41	99								
5. Štěpán Pressl	G J. Vrchlického, Klatovy	–	73	40	96								
6.–7. Matěj Dvořák	G Jana Keplera, Praha	–	64	37	89								
6.–7. Viktor Fukala	G Jana Keplera, Praha	–	95	37	89								
8. Tomáš Volf	G Jura Hronca, Bratislava	–	59	32	77								
9. Dominik Farhan	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	66	32	76								
10. Daniel Fousek	G, Špitálská, Praha	–	54	28	66								
11. Lubor Čech	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	66	25	59								
12. Tomáš Tuleja	G L. Svobodu, Humenné	–	75	24	57								
13.–14. Soňa Husáková	G, Českolipská, Praha	–	73	21	51								
13.–14. Matúš Kolenka	G Konštantínova, Prešov	–	39	21	51								
15. Marek Broul	G dr. V. Šmejkal, Ústí n. L.	–	66	15	35								
16. Viduranga Landers	D.S.Senanayake College	–	58	13	30								
17.–18. Lívia Čerešňová	ŠpMNDaG, Bratislava	–	53	12	29								
17.–18. Aneta Pjatkanová	G, Kralupy	–	57	12	29								
19.–20. Mona Alizadeh	St Paul's GS	–	70	11	26								
19.–20. Marika Kosohorská	G J. Vrchlického, Klatovy	–	90	11	26								
21. Andrew Pun	M. Garneau Collegiate Institute	–	85	10	23								
22. Martin Opat	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	72	9	21								
23.–24. Log Franc	Cumberland Valley HS, USA	–	69	8	20								
23.–24. Agra Navaratne Navaratne	D.S.Senanayake College	–	48	8	20								
25.–26. Aahana Aahana	CHIREC International School	–	40	8	19								
25.–26. Ondřej Sladký	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	70	8	19								
27.–28. Jaroslav Grulich	Jiráskovo G, Náchod	–	81	7	17								
27.–28. Konstantin Tripunovskí	American HS Skopje, Macedonia	–	36	7	17								
29.–30. Zsolt Beke	G H. Selyeho Komárno	–	56	6	15								
29.–30. Riley Lofgren	Lambert High School, USA	–	100	6	15								
31. Makar Kuznietsov	Lviv Lyceum	–	67	5	12								
32.–34. Robert Gemrot	G Komenského, Havířov	–	91	4	10								
32.–34. Gauri Shankar H	Pondicherry University	–	48	4	10								
32.–34. Patrik Kočan	G M. Hattalu, Trstená	–	28	4	10								
35.–36. Gauri Shankar H	Pondicherry University	–	21	4	9								
35.–36. Martin Polyácko	G Alejová, Košice	–	75	4	9								
37. Jakub Klíment	G Tajovského, B. Bystrica	–	73	3	8								
38. Dávid Benko	G L. Svobodu, Humenné	–	44	3	7								
39.–40. Martina Daňková	Gymnázium Brno-Bystrc	–	83	2	5								
39.–40. Jan Klívan	G, Dačice	–	45	2	5								
41. Kian Kyars	Harry Ainlay Highschool	–	67	2	4								
42.–44. Youssef Abdelmoneim	STEM High School, Egypt	–	50	1	3								
42.–44. Philopater Gabra	STEM High School, Egypt	–	5	1	3								
42.–44. Le Vu Neumann	G Opatov, Praha	–	100	1	3								
45. Anna Kaiserová	SPŠS a OA Kadaň	–	40	1	2								
46.–49. Hussein Hassan	STEM High School, Egypt	–	0	0	0								
46.–49. Islam Hassan	STEM High School, Egypt	–	0	0	0								
46.–49. Andrew Henin	STEM High School, Egypt	–	0	0	0								
46.–49. Ahmed Jaheen	STEM High School, Egypt	–	0	0	0								



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
18000 Praha 8

www: <https://fykos.cz>

e-mail: fykos@fykos.cz



@FYKOS



@fykosak

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.