

Úvodem

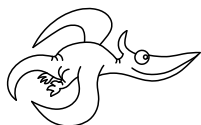
Milé řešitelky, milí řešitelé, první série je úspěšně za námi a my jsme rádi, že nám zachovávejte přízeň.

Podobně, jako legendární profesor matematiky z neméně známé anekdoty, i my bychom teď mohli běžet s papírem a volat „Existuje, existuje!“ Druhá série navzdory situaci existuje, a to ve zcela nezměněné podobě, mohli bychom říct, že je, na rozdíl od organizátorů, inherentně zavření-vzdorná.

Těšíme se na vás na online akcích a o to víc pak na osobní setkání, jakmile to zase bude možné. A pokud byste náhodou něco nestíhali, nezuťeňte a myslíte na to, abyste stihli to důležité!¹

A řešte FYKOS!

Organizátoři



Zadání II. série

Termín uploadu: 24. 11. 2020 23.59

Termín odeslání: 23. 11. 2020

Úloha II.1 ... svítí-nesvítí

3 body

Délka dne a noci se v průběhu roku mění, přičemž na různých místech na Zemi se může měnit jinak. Jak je to však s roční průměrnou délkou dne? Je všude stejná, nebo se na různých místech na Zemi liší? Stačí uvést pouze kvalitativní popis.

Bonus Pokuste se odhadnout, o kolik nejvíce může být průměrný den delší, než 12 h.

Úloha II.2 ... loď na obzoru

3 body

Kačka a Katka sledují loď plující konstantní rychlostí do přístavu. Kačka stojí na skále nad přístavem, přičemž má oči ve výšce $h_1 = 20$ m nad hladinou. Katka se nachází dole pod skálou, její oči jsou v nadmořské výšce $h_2 = 1,7$ m. Pokud Katka zahlédne na obzoru vrchol blížící se lodi se zpožděním $t = 25$ min oproti Kačce, za jak dlouho loď vysoká $h = 30$ m dopluje do přístavu? Zemi považujte za dokonalou kouli se známým poloměrem.

Úloha II.3 ... auto na dně jezera

5 bodů

Ne jednou se ve filmu stalo, že auto spolu s cestujícími spadlo do vody. Vypočítejte, jakým momentem sil by musel řidič tlačít na dveře, aby je otevřel na dně jezera, když je jejich spodní rám 8,0 m pod hladinou. Uvažujte obdélníkové dveře s rozměry 132 cm \times 87 cm, které se otvírají podle svislé osy.

¹TeXař, dopisujete tento úvodník 1. prosince poté, co doTeXal Fyziklání online.

Úloha II.4 ... vytahování ledu teplem

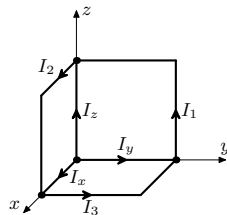
7 bodů

Ve sklepě v hloubce $h = 4,2\text{ m}$ je uskladněný led, který potřebujeme vytáhnout nahoru. Máme tepelný stroj, který pracuje s teplotou okolí a ledu s $\eta = 12\%$ účinností vůči jeho maximální možné účinnosti (dané Carnotovým cyklem). Teplota vzduchu je $T_v = 24^\circ\text{C}$, vytažený led potřebujeme mít na teplotě $T_{\max} = -9,0^\circ\text{C}$. Jakou teplotu musí mít led ve sklepě, aby jej bylo možné vytáhnout pomocí tohoto stroje? Proč to půjde, i když přitom zahřejeme led, který současně vytahujeme?

Úloha II.5 ... detektor magnetických nestacionarit

10 bodů

Elektrický obvod znázorněný na obrázku může sloužit jako detektor nestacionárního magnetického pole. Jedná se o devět hran krychle tvořených elektrickým drátem. Elektrický odpor jedné hrany je R . Nacházeli se tato konstrukce v nestacionárním homogenním magnetickém poli, které má pro jednoduchost konstantní směr a jeho velikost se mění jen pomalu, tečou na vyznačených místech proudy I_1 , I_2 , I_3 . Určete ze znalosti těchto proudů směr a časovou změnu velikosti magnetického pole v prostoru.

**Úloha II.P ... nákladný hokej**

9 bodů

Odhadněte, kolik stojí kompletní zalednění hokejového hřiště.

Úloha II.E ... hrnečku dost

13 bodů

Proměřte závislost rychlosti, s jakou přibývá kvásek, na čase a na okolní teplotě.

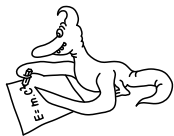
Soutěž V průběhu měření vyfoťte sebe nebo třeba buchty, které ze vzniklého kvásku upečete, a fotografie nám pošlete na adresu fykos-solutions@fykos.cz. Vystavíme je na našem Facebooku a Instagramu a autora nejlepší fotky oceníme zbrusu novými FYKOSími ponožkami.

Úloha II.S ... kmitající RLC

10 bodů

Uvažujme obvod, ve kterém jsou sériově zapojeny cívka, kondenzátor, rezistor a zdroj napětí. Cívka má indukčnost L , kondenzátor má kapacitu C a rezistor má odpor R . Zdroj vytváří střídavé napětí $U = U_0 \cos(\omega t)$. Všechny součástky považujte za ideální. S pomocí zákona zachování energie napište rovnici pro náboj, rychlost náboje (proud I) a zrychlení náboje (rychlost změny proudu I). Jedná se o rovnici tlumených kmitů. Porovnáte-li ji s rovnicí pro tlumené kmity závaží na pružině, co v tomto obvodu hraje roli hmotnosti, tuhosti pružiny a tření? Jaká je přirozená frekvence kmitů?

Dále pomocí veličin L , R a ω vyjádřete kapacitu kondenzátoru, při které by byl fázový posun napětí na kondenzátoru roven $\frac{\pi}{4}$. Jaká bude amplituda napětí na kondenzátoru při tomto fázovém posunu?



Řešení I. série

Úloha I.1 ... skoro zastavené světlo

3 body; průměr 2,05; řešilo 150 studentů

Jaký index lomu by musela mít průhledná planparalelní deska tloušťky $d = 1$ cm, abychom při pohledu na ni viděli světlo, které do ní vniklo z druhé strany před rokem? A jak moc je daná situace reálná? *Dodo opět čtel sci-fi.*

Index lomu vyjadruje pomer rýchlosti svetla vo vákuu c a v prostredí v a je definovaný ako

$$n = \frac{c}{v},$$

kde rýchlosť svetla v prostredí máme z podmienky zo zadania danú ako $v = d/t$. Po dosadení dostávame

$$n = \frac{ct}{d} \doteq 9,5 \cdot 10^{17}.$$

Vzhľadom na vysoký index lomu dosky navyše ani nie je nutné uvažovať pri výpočte uhol zovretý lúčom a kolmicou na rozhranie. Dopadajúce lúče sa totiž na prvom rozhraní lámu veľmi blízko ku kolmici, na druhom sa rozbehnú pod pôvodnými smermi.

Nielenže takýto index lomu je úplne nezmyselný (všetky známe materiály majú index lomu menší ako 10), ale aj vlnová dĺžka viditeľného svetla by v tomto materiáli bola $\lambda = 5 \cdot 10^{-25}$ m, čo je o desať rádov menej ako rozmery jadra atómu. Aby sme v jednotlivých miestach nevideli svetlo z rôznych častí dňa, musela by byť doska veľmi presne planparalelná, na úrovni $\Delta h \approx 10$ nm pre časový rozdiel rádu minút. Materiál by navyše musel mať nulovú disperziu, aby rôzne farby cez dosku neprechádzali rôzne dlho.

A čo je najsmutnejšie, použitím Fresnelových vzorcov dostávame, že cez prvé rozhranie by pri kolmom dopade prešlo len²

$$1 - R = 1 - \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right)^2 = \frac{4n}{(n + 1)^2} \approx \frac{4}{n} \doteq 4,2 \cdot 10^{-18}$$

z dopadnutej svetelnej intenzity a zvyšok by sa odrazil. Teda ak by taký materiál naozaj existoval, nič by sme cezeň nevideli.

Jozef Lipták

liptak.j@fykos.cz

² R označuje koeficient odrazivosti, teda časť svetelnej intenzity odrazenej od rozhrania.

Úloha I.2 ... brzdi!

3 body; průměr 2,40; řešilo 164 studentů

Karlovo auto, jedoucí rychlostí v_0 , zastaví na vzdálenosti s_0 při použití konstantní brzdící síly F_0 . Kolikrát delší bude brzdící dráha při stejné síle, ale dvojnásobné počáteční rychlosti? Kolikrát větší musí být brzdící síla, aby auto zastavilo na stejné dráze při dvojnásobné počáteční rychlosti?

Karel a Nemyšlův zaplatíš.

Auto jedoucí rychlostí v_0 má kinetickou energii $E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2$. Po zastavení bude jeho kinetická energie nulová. Síla F_0 musí tedy za dráhu s_0 vykonat práci E_{k0} . Jelikož je síla konstantní, platí vztah

$$F_0 s_0 = E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Bude-li mít na začátku auto rychlost $2v_0$, pak musí síla F_0 přes novou brzdící dráhu s_1 vykonat práci

$$F_0 s_1 = E_{k1} = \frac{1}{2}m(2v_0)^2 = 4\frac{1}{2}mv_0^2 = 4E_{k0} = 4F_0 s_0. \quad (1)$$

Vydělíme-li oba vztahy silou F_0 a porovnáme, vidíme

$$s_1 = 4s_0,$$

při zdvojnásobení počáteční rychlosti bude tedy výsledná brzdící dráha čtyřnásobná.

Pokud chceme zastavit na dráze s_0 z rychlosti $2v_0$, síla musí opět vykonat práci $4E_{k0}$. Ze vztahu 1 je hned vidět, že v takovém případě musí mít síla velikost $4F_0$.

Martin Vaněk
martin@fykos.cz

Úloha I.3 ... cyklistický anemometr

5 bodů; průměr 2,72; řešilo 117 studentů

Vašek jede za větrného počasí na kole. Jede-li rovně rychlostí $v = 10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, naměří, že proti němu fouká vítr vodorovně pod úhlem 25° od směru jízdy. Při vyšší rychlosti $v' = 20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ je tento úhel už jenom 15° . Určete rychlost a směr větru vzhledem k nehybnému pozorovateli.

Vašek si říkal, že na něj při jízdě fouká až moc.

Jedná se o úlohu, kterou vyřešíme vektorovým skládáním rychlostí. Zavedeme souřadnice spojené s nehybným pozorovatelem, ve kterých je rychlost Vaška v prvním případě $\mathbf{v} = (v, 0)$. V druhém případě pak zrychlí na rychlost $\mathbf{v}' = (v', 0)$. Vítr vzhledem k nehybnému pozorovateli vane rychlostí \mathbf{u} zapsanou ve složkách jako $\mathbf{u} = (u \cos \alpha, u \sin \alpha)$, kde α je úhel, který svírá rychlost větru \mathbf{u} s rychlostí cyklisty \mathbf{v} a je odlišný od úhlu, který pozoruje Vašek v jeho pohybující se soustavě.

Označme \mathbf{w} a \mathbf{w}' rychlost větru vzhledem k Vaškovi v prvním a v druhém případě. Rychlost větru vzhledem k cyklistovi získáme odečtením rychlosti cyklisty od rychlosti větru vzhledem k nehybnému pozorovateli (jedná se vlastně o Galileovu transformaci rychlostí), neboli v obou případech platí

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}, \quad (2)$$

$$\mathbf{w}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}'. \quad (3)$$

Ze zadání víme, že vektor rychlosti větru \mathbf{w} , resp. \mathbf{w}' , svírá s vektorem rychlosti cyklisty úhel $\beta = 155^\circ$, resp. $\gamma = 165^\circ$, pokud na cyklistu fouká vítr zprava, viz obr. 1. Jestliže na něj fouká vítr

zleva, platí $\beta = -155^\circ$, $\gamma = -165^\circ$. Rychlosti \mathbf{w} a \mathbf{w}' potom vyjádříme ve složkách jako $\mathbf{w} = (w \cos \beta, w \sin \beta)$ a $\mathbf{w}' = (w' \cos \gamma, w' \sin \gamma)$. Dosadíme-li do rovnic (2), (3) konkrétní složky, dostaneme 4 rovnice

$$w \cos \beta = u \cos \alpha - v, \quad (4)$$

$$w \sin \beta = u \sin \alpha, \quad (5)$$

$$w' \cos \gamma = u \cos \alpha - v', \quad (6)$$

$$w' \sin \gamma = u \sin \alpha. \quad (7)$$

Vyřešením těchto rovnic nalezneme hledanou velikost u rychlosti větru vzhledem k zemi a jeho směr α vztažený na směr rychlosti cyklisty. Rovnic máme akorát, neboť ještě neznáme w a w' . Postupovat můžeme např. následovně. Nejdříve eliminujeme z rovnic w a w' a to tak, že rovnicí (4) vydělíme rovnicí (5), a navíc vzniklou rovnicí vynásobíme faktorem $u \sin \alpha$. Podobné upravy provedeme také s rovnicemi (6) a (7), což vede na soustavu rovnic

$$u \sin \alpha \cotg \beta = u \cos \alpha - v, \quad (8)$$

$$u \sin \alpha \cotg \gamma = u \cos \alpha - v'. \quad (9)$$

Nejdříve nalezneme u . Odečtením rovnice (9) od (8) dostaneme

$$u \sin \alpha (\cotg \beta - \cotg \gamma) = v' - v, \quad (10)$$

Dále rovnici (8) vynásobíme $\cotg \gamma$, rovnicí (9) vynásobíme $\cotg \beta$ a obě rovnice od sebe odečteme, takže dostaneme

$$u \cos \alpha (\cotg \beta - \cotg \gamma) = v' \cotg \beta - v \cotg \gamma, \quad (11)$$

Umocnění rovnic (10) a (11) na druhou a jejich součet vede na

$$u^2 (\cotg \beta - \cotg \gamma)^2 = (v' - v)^2 + (v' \cotg \beta - v \cotg \gamma)^2, \quad (12)$$

odkud plyne

$$u = \frac{\sqrt{(v' - v)^2 + (v' \cotg \beta - v \cotg \gamma)^2}}{|\cotg \beta - \cotg \gamma|}, \quad (13)$$

kde jsme vyloučili záporné řešení.

Nyní nalezneme úhel α . Jednoduchými algebraickými úpravami rovnic (8), (9) dostaneme

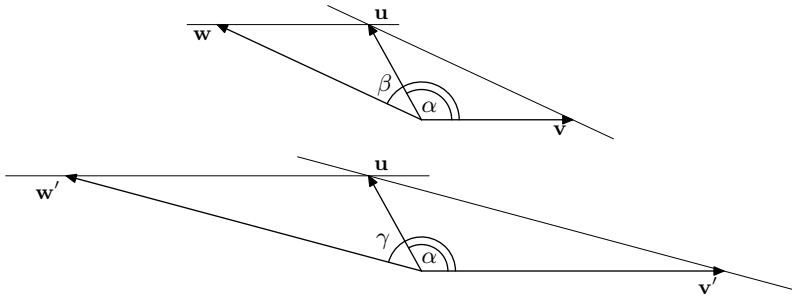
$$u (\cos \alpha - \cotg \beta \sin \alpha) = v, \quad (14)$$

$$u (\cos \alpha - \cotg \gamma \sin \alpha) = v'. \quad (15)$$

Dále vydělením rovnic (14), (15) dostaneme rovnici, ze které vyjádříme $\tg \alpha$ jako

$$\tg \alpha = \frac{v' - v}{v' \cotg \beta - v \cotg \gamma}. \quad (16)$$

Fouká-li na Vaška vítr zprava, dostaneme po číselném dosazení hodnot ze zadání do rovnice (13) velikost rychlosti větru vzhledem k zemi $u \doteq 7,2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Rovnice (16) vede v intervalu $(-\pi, \pi)$ pokývajícíím všechny směry na dvě řešení, které po číselném dosazení hodnot



Obr. 1: Skládání rychlostí. Nahoře má Vašek nižší rychlost, dole vyšší.

ze zadání jsou $\alpha \doteq 120^\circ$ a $\alpha \doteq -60^\circ$. Řešení $\alpha \doteq -60^\circ$ však odpovídá zápornému řešení u rovnice (12), a proto představuje stejný vektor \mathbf{u} jako $\alpha \doteq 120^\circ$ a $u \doteq 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Na závěr doplníme, že v případě, kdy na Vaška fouká vítr zleva, dostaneme řešení $\alpha \doteq -120^\circ$ a $u \doteq 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Ukážeme si také, jak lze dojít ke správnému řešení rychlejší cestou s pomocí sinové a kosinové věty. Obrázek 1 překreslíme dohromady tak, jak je znázorněno na obrázku 2. Místo úhlů β a γ budeme používat jejich doplňkové úhly $\beta' = 180^\circ - \beta = 25^\circ$ a $\gamma' = 180^\circ - \gamma = 15^\circ$. Aplikací sinové věty na pravý trojúhelník dostaneme rovnost

$$\frac{w}{\sin \gamma'} = \frac{v' - v}{\sin(\beta' - \gamma')},$$

ze které plyne vztah

$$w = \frac{(v' - v) \sin \gamma'}{\sin(\beta' - \gamma')}. \quad (17)$$

Dosazením hodnot ze zadání dostáváme $w \doteq 14,9 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Z levého trojúhelníku už tedy známe w , ze zadání samozřejmě také v a úhel β' , a chceme najít u a úhel α . V obou případech si poradíme kosínovou větou. Pro první případ použijeme kosínovou větu s úhlem β' ve tvaru

$$u^2 = v^2 + w^2 - 2vw \cos \beta'. \quad (18)$$

Odmocněním a dosazením za w z rovnice (17) získáme vztah pro výpočet velikosti rychlosti větru vzhledem k nehybnému pozorovateli

$$u = \sqrt{v^2 + \left(\frac{(v' - v) \sin \gamma'}{\sin(\beta' - \gamma')} \right)^2 - 2v(v' - v) \frac{\sin \gamma' \cos \beta'}{\sin(\beta' - \gamma')}}. \quad (19)$$

V našem konkrétním případě má velikost $u \doteq 7,2 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, tedy výsledek se shoduje s prvním způsobem výpočtu. Jinou aplikací kosínové věty na levý trojúhelník v obr. 2 dostaneme vztah

$$w^2 = v^2 + u^2 - 2vu \cos \alpha,$$

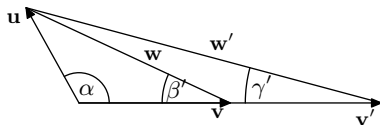
ze kterého jednoduše plyne

$$\cos \alpha = \frac{v^2 + u^2 - w^2}{2vu}.$$

Pravou stranu této rovnice můžeme ještě zjednodušit pomocí rovnice (18) následovně

$$\cos \alpha = \frac{v - w \cos \beta'}{u},$$

čímž jsme získali vztah pro výpočet úhlu α . Dosadíme-li do něho za w z rovnice (17) a za u z rovnice (19) a poté číselné hodnoty ze zadání, dostáváme v rozsahu $(-180^\circ, 180^\circ)$ dvě řešení $\alpha \doteq 120^\circ$ a $\alpha \doteq -120^\circ$, které odpovídají případu, kdy fouká vítr na Vaška zprava a zleva. Zcela správně by řešení $\alpha \doteq -120^\circ$ mělo odpovídat úhlům $\beta' - 25^\circ$, $\gamma' = -15^\circ$. Všimněte si však, že rovnice v druhém způsobu výpočtu nejsou k současné změně znamének úhlů β' a γ' citlivé. Tento postup je tedy v souladu s prvním způsobem výpočtu.



Obr. 2: Druhý způsob skládání rychlostí.

Václav Mikeska

v.mikeska@fykos.cz

Úloha I.4 ... solární plachetnice

8 bodů; průměr 3,62; řešilo 104 studentů

Ve vzdálenosti 0,8 au od Slunce se vznáší solární plachetnice ve tvaru tenké desky o ploše $S = 500 \text{ m}^2$ s plošnou hustotou $\sigma = 1,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$. Jakou silou na ni působí záření dopadající ze Slunce v okamžiku, kdy se plachetnice právě začíná pohybovat? Jaké bude v mít tu chvíli zrychlení? Zářivý výkon Slunce je $L_\odot = 3,826 \cdot 10^{26} \text{ W}$. Předpokládejte, že záření dopadá na plachetnici kolmo a odráží se pružně.

Nápověda Doporučujeme najít zrychlení při malé počáteční rychlosti v_0 a poté dosadit $v_0 = 0$.
Danka si chce zalétat.

Slnko vysíla svetelné žiarenie vo forme fotónov, ktoré sú nositeľmi hybnosti. Ich hybnosť p je daná ich energiou E podľa kvantovej fyziky ako $p = \frac{E}{c}$, kde c je rýchlosť svetla. Podľa 2. Newtonovho zákona je sila pôsobiaca na plachtu daná podielom zmeny jej hybnosti a času, za ktorý táto zmena nastane

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

Pri dopade fotónu na povrch plachty sa fotón dokonale pružne odrazí, pričom pri pružnej zrážke sa zachováva celková energia aj hybnosť sústavy.

Uvažujme, že fotón s hybnosťou p_0 narazí do dosky (plachetnice), ktorá sa od neho pohybuje rýchlosťou v_0 a má hmotnosť m . Potom sa fotón odrazí späť s hybnosťou p , ktorá smeruje od dosky, teda má opačný smer ako p_0 . Doska po tejto interakcii s fotónom pokračuje v pohybe v pôvodnom smere, teraz už rýchlosťou v (má smer rovnaký ako v_0 a p_0). Zákon zachovania hybnosti (ZZH) má teda tvar

$$p_0 + mv_0 = -p + mv.$$

Napišeme si tiež zákon zachovania energie (ZZE)

$$p_0c + \frac{1}{2}mv_0^2 = pc + \frac{1}{2}mv^2.$$

Zo ZZH si vyjadríme p , dosadíme do ZZE a riešime kvadratickú rovnicu pre v . S využitím vzorca $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ sa úpravami dopracujeme k výrazu

$$v = -c + \sqrt{(v_0 + c)^2 + \frac{4p_0c}{m}}.$$

Za predpokladu $(v_0 + c)^2 \gg \frac{4p_0c}{m}$, ktorý je v tomto prípade iste splnený (pretože ľavá strana je viac ako c^2 , zatiaľ čo pravá strana obsahuje hybnosť fotónu), môžeme použiť aproximáciu

$$v \approx -c + (v_0 + c) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{4p_0c}{m(v_0 + c)^2} \right) = v_0 + \frac{2p_0c}{m(v_0 + c)}.$$

Zmena rýchlosti dosky v dôsledku odrazu fotónu bude teda

$$\Delta v = v - v_0 = \frac{2p_0c}{m(v_0 + c)}.$$

Ak predpokladáme, že doska bola pred nárazom v pokoji (teda $v_0 = 0$), alebo sa pohybovala dostatočne pomaly (teda platí $v_0 \ll c$), pre zmenu rýchlosti dosky a následne zmenu hybnosti dostávame

$$\Delta v = \frac{2p_0}{m} \quad \Rightarrow \quad \Delta p = 2p_0.$$

Po dosadení tohto výrazu do 2. Newtonovho zákona máme

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{2p_0}{\Delta t}.$$

Hodnotu p_0 získame z energie snečného žiarenia. Za čas Δt na plachtu dopadne žiarenie s energiou

$$E = W\Delta tS.$$

Veličina W je svetelný výkon dopadajúci na jednotku plochy vo vzdialenosti r od Slnka

$$W = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2}.$$

Potom pre silu dostávame

$$F = \frac{2p_0}{\Delta t} = \frac{2E}{c\Delta t} = \frac{2WS}{c} = \frac{L_{\odot}S}{2\pi cr^2} \doteq 7,1 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

Zrýchlenie plachetnice spočítame jednoducho ako

$$a = \frac{F}{m} = \frac{L_{\odot}}{2\pi cr^2\sigma} \doteq 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Na plachtu pôsobí žiarenie Slnka silou 7,1 mN a udáva jej zrýchlenie $10 \mu\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha I.5 ... jak si navléci čepici jednou rukou?

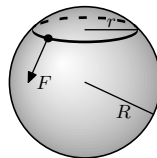
8 bodů; průměr 3,45;

řešilo 77 studentů

Mějme kouli o poloměru R a cyklickou nehmotnou gumičku o poloměru r_0 s tuhostí k , přičemž $r_0 < R$. Třecí koeficient mezi gumičkou a koulí je f . Určete podmínku pro hodnoty těchto parametrů, aby bylo možné přetáhnout gumičku přes kouli tak, že se gumičky budeme dotýkat jenom v jednom bodě.

Pro jednoduchost uvažujte, že gumička je pružná pouze v tečném směru (takže vždy leží v jedné rovině).

Matěj měl plnou ruku a byla mu zima na hlavu.



Gumičku buď považujeme za nehmotnou a nebo neuvažujeme tíhové zrychlení, takže na gumičku působí kromě vnější síly F pouze síly třecí. Orientace v tomto případě nehraje roli, ale v rámci analogie s navlékáním čepice na hlavu si představme, že gumička je volně položená na horní části koule tak, jak je to na obrázku.

Nejjistější způsob navlékání gumičky přes kouli je takový, že gumičku v jednom bodě tlačíme směrem tečným ke kouli a kolmým ke gumičce. V případě, že se opačná část gumičky začne zvedat, máme problém a gumičku přes kouli nedokážeme přetáhnout. Aby bylo možné gumičku navléci, nesmí se pohnout protilehlý bod gumičky vůči působišti síly.

Kritické místo je přesně v tomto protilehlém bodě. V tomto bodě musí platit, že tečná síla je menší než normálová síla přenásobená třecím koeficientem. Hledáme tedy podmínku na to, kdy tento bod gumičky na kouli staticky drží a neprokluzuje. Příklad vyšetřování jednoho kritického bodu si můžeme nahradit symetrickou situací, kdy jsou všechny body symetricky „také kritické“. To znamená, že budeme vyšetřovat případ, kdy je gumička na kouli navlečena tak, že její poloměr je $r > r_0$.

Situace je analogická s prokluzem tělesa na rovné podložce (např. na nakloněné rovině), tady těleso neproklouzne, když je splněna podmínka $\text{tg } \alpha \leq f$, kde α je úhel, který svírá směr výslednice sil působících na těleso s normálou k podložce. Nezájímá nás tedy velikost síly, kterou je gumička napínána, ani velikost síly, kterou gumička tlačí do koule (značíme F_0). Stačí nám znát směr této síly – v každém bodě dotyku směřuje do středu gumičky (ne do středu koule).

V našem případě gumičky na kouli je úhel α sevřen v libovolném bodě dotyku mezi směrem do středu koule (tj. normála k povrchu) a směrem do středu gumičky (tj. směr působící síly F_0). Tento úhel je zřejmě největší pro nejkratší délku gumičky, postupným natahováním na kouli ho zmenšujeme. Nejkritičtější je proto případ hned na začátku natahování, když má gumička poloměr r_0 .³ Hledaný úhel snadno spočítáme s využitím poloviny rovnoramenného trojúhelníka, jehož ramena tvoří poloměry kuličky o délce R a základnu tvoří průměr gumičky $2r_0$, viz obrázek 3.

$$\cos \alpha = \frac{r_0}{R},$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{R^2 - r_0^2}}{r_0}.$$

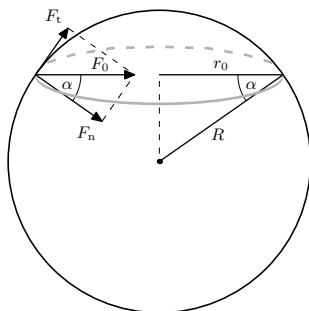
³Aby gumička působila silou na kouli, musí být její poloměr o libovolně málo větší než r_0 .

V poslední úpravě jsme využili vztahů mezi goniometrickými funkcemi stejného úhlu (nebo alternativně Pythagorovu větu). Po dosažení do podmínky pro neproklouznutí dostáváme

$$\frac{\sqrt{R^2 - r_0^2}}{r_0} \leq f,$$

$$r_0 \geq \frac{R}{\sqrt{f^2 + 1}}.$$

Tedy podmínka samozřejmě vůbec nezávisí na tuhosti gumičky, nýbrž pouze na poloměrech a třecím koeficientu. Všimněme si také, že pro velmi malé f se podmínka blíží k $r_0 \geq R$. To znamená, že pro nulové f nedokážeme přes kouli přetáhnout žádnou gumičku, která je menší než koule.



Obr. 3: Rozklad sil gumičky a polovina trojúhelníku pro výpočet úhlu.

Matěj Mezera

m.mezera@fykos.cz

Úloha I.P ... Přežijeme ve vakuu?

10 bodů; průměr 4,58; řešilo 139 studentů

Různé filmy dávají vzniknout různým představám o tom, co a jak rychle se stane, pokud astronautovi praskne skafandr. Některé z nich jsou dokonce protichůdné. Odůvodněte, co by se s největší pravděpodobností ve skutečnosti stalo, pokud by se dosud zdravý člověk ocitl nijak nechráněný uprostřed vakua. Co by bylo nejrychlejší příčinou smrti?

Kuba plánoval vydat se do světa.

Vieme, že v mnohých filmoch je ne jeden jav, ktorý odporuje fyzikálnym zákonom. Pre vytvorenie napínavejšieho a dramatickejšieho deja sú vytvorené scény, ktoré nezodpovedajú realite aj napriek tomu, že sa javia vierohodne. Toto sa tiež týka situácii, keď vo filmoch človeku vo vesmíre praskne skafander. Vo filmoch telo exploduje, alebo okamžite zmrzne.⁴ Avšak v skutočnosti to vôbec nie je až také jednoduché. Kvôli komplexnosti ľudského tela sa pri prasknutí skafandra začne odohrávať mnoho javov a zostáva nám len teoreticky opísať, čo by bolo najrýchlejšou príčinou smrti.

⁴<https://youtu.be/hPya55bVKDc?t=300>

Únik vzduchu z pľúc

Pri poškodení skafandra dochádza k rozdielu tlakov v ľudských pľúcach a vákuu, čo spôsobí únik vzduchu z pľúc. Tlak vzduchu v pľúcach je rovný atmosferickému, čiže cca 101 000 Pa, a tlak vo vesmírnom vákuu je cca 3 300 Pa – 130 mPa (stredné vákuum).⁵ V dôsledku nedostatku kyslíka by človek po zhruba 15 sekundách stratil vedomie – podobne ako pri topení sa⁴ – a neskôr by došlo k uduseniu. Po 3 – 5 minútach bez prísunu kyslíka dochádza k vážnemu poškodeniu mozgu, ktorý sa v tom čase už nedá zachrániť.⁶ Absencia kyslíka taktiež vedie k nevyučovaniu škodlivých látok, a teda dôjde k otrave organizmu, ktorá však bude výrazne pomalšia ako udusenie.

Tlak

Ak by krv bola vo vesmíre priamo vystavená vákuu, tak by po pár sekundách začala vriieť.⁷ Telo vo vesmíre expanduje, avšak kvôli jeho elasticite nie dostatočne na to, aby sa vnútri v tele vytvoril tlak vákuu. Krv je preto v ľudskom tele chránená pred priamym vystavením vákuu a vriieť nezačne, ale začnú sa v nej tvoriť vzduchové bublinky spôsobené rozpúšťaním vzduchu z krvi. Ak by však človek vo vákuu mal povrchovú ranu, tak by došlo k varu krvi.

Ľudské telo je zložené z cca 70 % vody. Var vody vo vákuu nastane zhruba pri izbovej teplote, čiže 21 °C.⁸ Podobne ako v prípade krvi, voda priamo vystavená vákuu začne vriieť, čo bude mať za následok rýchle vyschnutie slín, slizníc a očného sekrétu. Plynové bubliny, ktoré sa vytvárajú v dôsledku varu vody, spôsobujú spolu s vnútorným tlakom pretlak, ktorý má za následok nafúknutie ľudského tela na takmer dvojnásobok.⁴ Avšak koža je biologický materiál s veľmi odolnými vlastnosťami, čiže nedôjde k explózií tela.

Koža má maximálnu odolnosť voči deštrukcii približne 21,6 MPa,⁹ čo znamená, že rozdiel vnútorného tlaku a tlaku vo vákuu nemôže byť väčší ako daná hodnota, aby telo neexplodovalo. Rozdiel medzi atmosferickým tlakom (101 325 Pa¹⁰) a tlakom vo vákuu (1 650 Pa) je cca 99 700 Pa, čiže k deštrukcii kože nedôjde.

Srdcový tep sa na začiatku zvýši a neskôr zase klesne, pričom arteriálny krvný tlak taktiež klesne za čas 30 – 60 s. Tlak v žilách sa zvýši v dôsledku roztiahnutia žilového systému a spôsobí zastavenie cirkulácie krvi.¹¹

Teplota

Vo vesmíre je síce zima, avšak nie je tam médium, ktoré by ľudské telo ochladilo. Preto by človek strácal svoje teplo iba vyžarovaním, čiže po určitom čase by začalo telo mrznúť. Avšak plyn a vodná para budú prúdiť von cez dýchacie cesty a toto kontinuálne vyparovanie bude mať za následok ochladenie úst a nosa takmer až na teplotu mrazu. Zvyšok tela sa bude postupne ochladzovať tiež, avšak pomalšie, až kým nadobudne teplotu mrazu.¹¹ Závisiac od miesta, kde sa vo vesmíre človek nachádza, zamrzol by za 12 až 26 hodín.¹²

⁵<https://sk.wikipedia.org/wiki/Vákuum>

⁶[https://sk.wikipedia.org/wiki/Dusenie_\(nedýchanie\)](https://sk.wikipedia.org/wiki/Dusenie_(nedýchanie))

⁷<https://youtu.be/jU3MOLqA3WA>

⁸<https://tinyurl.com/waterInVacuum>

⁹<https://arxiv.org/pdf/1302.3022v1.pdf>

¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Atmospheric_pressure

¹¹<https://youtu.be/iWGGMchu6mQ>

¹²https://youtu.be/_Mr8f63Vinc

Avšak ak sa človek nachádza v blízkosti nejakého zdroja energie, ktorým je napríklad Slnko, hrozí mu prehriatie.

Neplánovaný experiment

V roku 1966, testovaný subjekt Jim LeBlanc bol prvým človekom, ktorý si náhodou vyskúšal vystavenie vákuu.¹³ Vďaka nemu a jeho pracovníkom v NASA rozumieme aspoň trochu z toho, čo sa udeje v takej situácii. Pánovi LeBlancovi sa odpojila jedna hadička na prototypy skafandra a bol vystavený zmene tlaku z 3,8 psi (26 200 Pa) na 0,1 psi (689 Pa) za 10 sekúnd.¹³ Následne bol vystavený vákuu zhruba 30 sekúnd, avšak kvôli pohotovosti jeho kolegov bol zachránený skôr, ako by utrpel vážne zdravotné problémy. Vyviazol z tohto incidentu „len“ s bolavým uchom.¹⁴ O vystavení človeka vákuu sa nevie veľa, avšak ľudia strácajú vedomie cca za 15 sekúnd, efekty vákuu začnú likvidovať ľudské telo za cca 30 sekúnd a úplná smrť nastane za cca 90 sekúnd.¹⁴ „Ako som sa potácal dozadu, cítil som, ako mi začínajú bublať sliny na jazyku tesne pred tým, než som odpadol.“ – spomína LeBlanc.¹³ Tento incident nám potvrdzuje, že voda v tele začne vriieť, a teda sekrety a sliny začnú vysychať. Hneď potom dôjde k strate vedomia, ktorá je dôsledkom úniku vzduchu.

Záver

Ľudské telo je príliš komplexné na to, aby sme vedeli bez experimentov presne určiť najrýchlejšiu príčinu smrti v prípade, keď je človek vystavený vákuu. Z vyššie uvedeného však vieme povedať, že únik kyslíka a zmena tlaku v žilách sú kľúčovými faktormi, keďže vedú k zlyhaniu obehového traktu a vážnemu poškodeniu mozgu, čo má rýchle a fatálne následky.

Katarína Častulíková

katka.castulikova@fykos.cz

Úloha I.E ... dopadová

13 bodů; průměr 5,49; řešilo 78 studentů

Změrte závislost průměru kráteru, vzniklého dopadem kamene do vhodného pískoviště, na hmotnosti kamene a na výšce vypuštění. Závisí velikost kráteru jenom na energii dopadu? Doporučujeme měřit, když je písek suchý.

Dodo se vrátil do dětství.

Teória

Hodnota priemeru krátera vzniknutého dopadom telesa do piesku závisí na kinetickej energii telesa, jeho rozmeroch, ale aj zložení. Významne ju ovplyvňujú aj vlastnosti použitého piesku, napríklad jeho vlhkosť a tiež veľkosť pieskových častíc. Vznik krátera v dôsledku dopadu sa nazýva impaktný proces. Ten môžeme rozdeliť na tri časti:

1. Dotyk, kompresia – Počas tejto fázy dochádza k premene kinetickej energie dopadajúceho telesa na energiu seizmických vln a teplo. V mieste dopadu dochádza k stláčaniu piesku (vznik prechodnej dutiny) a jeho vyvrhnutiu do strán od miesta dopadu. Kinetická energia E_k dopadajúceho telesa je daná jeho hmotnosťou m a rýchlosťou v ako

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$

¹³<https://tinyurl.com/jimLeBlanc>

¹⁴<https://www.popularmechanics.com/space/a24127/nasa-vacuum-exposure/>

2. Vznik dutiny – Nárázová vlna slabne a stlačený piesok je opäť vyvrhnutý do okolia. Pri rýchlostiach, ktoré kameň dosiahne, vzniká dopadový kráter. Tvar krátera závisí na uhle dopadu telesa a tiež na rýchlosti, ak nedopadá kolmo.
3. Formovanie tvaru krátera – vyvrhnutý materiál sa vplyvom gravitácie vracia zosúvaním späť do vyhlbenej dutiny a vzniká finálny kráter.

Objem vyvrhnutého materiálu V by mal byť úmerný kinetickej energii dopadajúceho telesa, v našom prípade kameňa. Kinetickú energiu kameň získa voľným pádom z určitej výšky h , kedy sa jeho potenciálna energia E_p zmení na kinetickú. Teda

$$E_k = E_p = mgh.$$

Keďže nemeríme objem vyvrhnutého materiálu, ale iba jeho priemer d , teda jeden rozmer, priemer by mal byť potom úmerný tretej odmocnine potenciálnej energie

$$d \propto \sqrt[3]{mgh}.$$

Meranie a diskusia jeho presnosti

Pre meranie sme si vybrali postupnosť desiatich kameňov s rastúcou veľkosťou, ktorej zodpovedá aj rastúca hmotnosť. Jednotlivé kamene sme si označili číslami od 1 do 10, môžeme ich vidieť na obrázku 4. Používali sme tiež dva metre, oba s veľkosťou najmenšieho dielika 1 mm. Pomocou jedného z nich sme určovali výšku vypustenia kameňa nad zemou a druhý, položený na zemi, slúžil ako mierka pri vzniknutých kráteroch, viď obrázok 5. Kráter sme si vždy po odstránení kameňa odfotili čo najviac kolmo zhora spolu s metrom ako našou mierkou.

Hmotnosti kameňov sme zmerali digitálnymi váhami, pričom každý kameň sme vážili trikrát a na záver sme vypočítali priemernú hodnotu a štatistickú odchýlku merania. Do celkovej odchýlky merania hmotnosti sme započítali aj nepresnosť váh. Pre menšie kamene sme zhruba odmerali taktiež ich objem, a to ponorením do vody v odmernom valci a porovnaním objemov vo valci pred a po ponorení kameňa. Vzhľadom na veľký najmenší dielik stupnice odmerného valca (2 ml) je toto meranie zatažené veľkou chybou. Umožňuje nám však aspoň približne určit hustotu použitých kameňov. Všetky tieto charakteristiky kameňov sú uvedené v tabuľke 1.

Fotografie kráterov sme následne spracovali v programe ImageJ. Fotografie niektorých kráterov sú na obrázkoch 6, 7 a 8. Pri každej fotografii sme najprv kalibrovali mierku pomocou vyfoteného pravítka (použili sme z neho vždy 10 cm). Následne sme zmerali priemer krátera v troch smeroch. Keďže kamene boli nesúmerné, také boli aj krátery. Preto sme jeden priemer zmerali v smere najdlhšieho rozmeru, druhý kolmo naň a tretí približne diagonálne. Z týchto nameraných dĺžok sme spočítali priemernú hodnotu a tiež štandardnú odchýlku, ktorá nám dáva informáciu hlavne o súmernosti krátera - čím je vyššia, tým menšia je kruhovosť krátera. Výsledky sú v tabuľkách 2 a 3.

Do celkovej odchýlky merania priemeru krátera ale prispieva viacero faktorov. Tie nie sú v štatistických odchýlkach v tabuľkách zahrnuté, ale postupne si ich rozoberieme. Pri kalibrácii mierky v programe ImageJ sa dopúšťame chyby nanajvýš 1 mm v dôsledku zlého vyznačenia dĺžky 10 cm. Avšak ďalšia chyba nastáva kvôli tomu, že celý vyznačený úsek nebol fotený úplne kolmo, v dôsledku čoho sú dĺžky na obrázku skreslené. Chybu kalibrácie spôsobenú týmto skreslením odhadujeme na maximálne 3 mm. Oveľa väčšiu nepresnosť nám do merania prináša chyba určenia okrajov krátera, a to odhadom 1 až 2 cm. Presné určenie okrajov krátera z fotografie bolo často viac či menej nejednoznačné. Záviselo to na osvetlení fotografie, ale aj na



Obr. 4: Kamene použité pri meraní.

tvári krátera. Pomôcť si bolo možné väčšími zrnčkami piesku nahromadenými v okolí hrany krátera.

Pri porovnaní nameraných závislostí s teoretickým predpokladom nemôžeme kvôli týmto nepresnostiam očakávať dokonalú zhodu. Budeme tak sledovať porovnanie trendov. Na tvar, a teda súbežne aj priemer krátera, vplýval vo veľkej miere aj tvar kameňa. Ten nebol súmerný, takže veľkosť krátera závisela aj na tom, aké bolo natočenie kameňa pri dopade. Neistotu výšky vypustenia kameňa nad zemou odhadujeme na 1 cm.

Porovnanie závislostí

Do grafu na obrázku 9 sme vyniesli závislosť priemeru krátera d na výške vypustenia kameňa h . Porovnaním trendov pre jednotlivé kamene vidíme, že majú až na odchýlky zhruba rovnaký priebeh. Chybové úsečky jednotlivých bodov sme kvôli prehľadnosti do grafu nevyznačili. Ak by sme tieto dáta porovnali so závislosťou $y = kx^{\frac{1}{3}}$, kde k je konštanta, vidíme veľmi podobný trend. Nameraná závislosť pre každý kameň zodpovedá odhadom závislosti približne $d \approx 2,2(mgh)^{\frac{1}{3}}$. Tieto funkcie sme pre prehľadnosť do grafu tiež nevyznačili.

Pre lepšie potvrdenie predpovedanej závislosti sme vykreslili graf závislosti priemeru krátera d na kinetickej energii kameňa pri dopade E , a to v logaritmickej škále (viď obrázok 10). Do grafu sme tiež vyniesli závislosť $d = \sqrt[3]{E}$. Vidíme, že namerané dáta pre prvých osem kameňov dobre kopírujú túto predpovedanú závislosť. Posledné dva kamene sa od tejto závislosti odchyľujú, nimi preložená priamka rastie rýchlejšie. To môže byť chyba merania veľkosti krátera alebo vplyv tvaru kameňa na výsledný kráter. Ak sa pozrieme na dátové body ako celok, môžeme si



Obr. 5: Usporiadanie pomôcok pri meraní.

všimnúť, že priamka preložená týmito dátami vo všeobecnosti rastie trochu menej prudko ako je teoretická predpoveď. Jedným z možných vysvetlení je, že odpor vzduchu, ktorý na kameň pri páde pôsobí, nie je zanedbateľný, a teda kinetická energia kameňa tesne pred dopadom je menšia, ako je jeho počiatočná potenciálna energia.

Záver

Zmerali sme závislosť priemeru krátera na výške vypustenia kameňa a tiež na kinetickej energii kameňa tesne pred dopadom. Obe závislosti v rámci odchýlky zodpovedali teoretickej predpovedi, teda že priemer krátera závisí na tretej odmocnine kinetickej energie kameňa. Pozorovali sme miernu odchýlku od teoretickej predpovede, ktorá je pravdepodobne dôsledkom neoprávneného zanedbania odporu vzduchu pri páde.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Tab. 1: Charakteristiky kameňov – hmotnosť, chyba hmotnosti, objem a hustota. Neistota merania objemu je 1 ml. Z tohto dôvodu sú uvedené hustoty pre menšie kamene skôr orientačné.

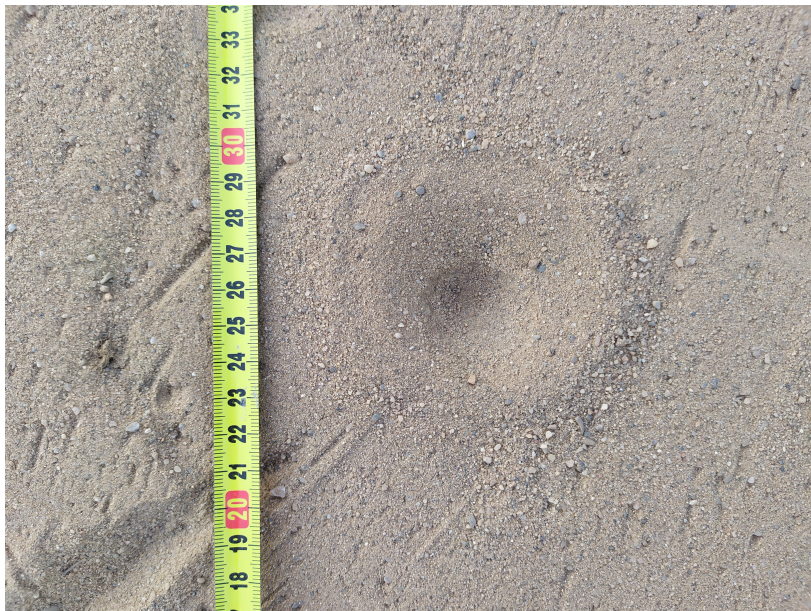
kameň	$\frac{m}{\text{g}}$	$\frac{u_m}{\text{g}}$	$\frac{V}{\text{ml}}$	$\frac{\rho}{\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}}$
1	2,85	0,01	1,5	1,7
2	7,04	0,01	3,5	2,0
3	14,58	0,01	5,0	2,9
4	26,48	0,01	10,0	2,6
5	44,18	0,02	17,0	2,6
6	57,28	0,02	22,5	2,5
7	87,43	0,02		
8	165,85	0,01		
9	589	2		
10	976	2		

Tab. 2: Priemery kráterov, 1. časť.

$\frac{h}{\text{cm}}$	$\frac{d_1}{\text{cm}}$	$\frac{d_2}{\text{cm}}$	$\frac{d_3}{\text{cm}}$	$\frac{d_4}{\text{cm}}$	$\frac{d_5}{\text{cm}}$
20	$1,9 \pm 0,1$	$2,6 \pm 0,5$	$3,6 \pm 0,1$	$3,8 \pm 0,1$	$5,5 \pm 0,4$
40	$2,4 \pm 0,1$	$3,4 \pm 0,4$	$4,4 \pm 0,2$	$4,2 \pm 0,3$	$5,8 \pm 0,7$
60	$2,6 \pm 0,2$	$4,4 \pm 0,3$	$4,0 \pm 0,3$	$5,1 \pm 0,2$	$7,4 \pm 0,3$
80	$3,0 \pm 0,1$	$4,2 \pm 0,1$	$5,3 \pm 0,8$	$6,4 \pm 0,2$	$7,4 \pm 0,1$
100	$3,1 \pm 0,1$	$4,3 \pm 0,4$	$5,5 \pm 0,5$	$6,2 \pm 0,6$	$7,7 \pm 0,8$
120	$3,2 \pm 0,1$	$4,6 \pm 0,2$	$6,4 \pm 0,5$	$6,9 \pm 0,1$	$7,3 \pm 0,2$
140	$3,5 \pm 0,2$	$4,8 \pm 0,4$	$5,5 \pm 0,7$	$7,6 \pm 0,6$	$7,8 \pm 0,3$

Tab. 3: Priemery kráterov, 2. časť.

$\frac{h}{\text{cm}}$	$\frac{d_6}{\text{cm}}$	$\frac{d_7}{\text{cm}}$	$\frac{d_8}{\text{cm}}$	$\frac{d_9}{\text{cm}}$	$\frac{d_{10}}{\text{cm}}$
20	$5,7 \pm 1,1$	$7,6 \pm 0,5$	$9,1 \pm 0,8$	$11,8 \pm 1,6$	$14,1 \pm 1,4$
40	$5,0 \pm 0,7$	$8,2 \pm 1,3$	$10,4 \pm 1,3$	$14,0 \pm 1,1$	$16,0 \pm 3,6$
60	$5,9 \pm 0,6$	$8,5 \pm 1,3$	$12,4 \pm 1,8$	$15,2 \pm 2,5$	$16,6 \pm 3,1$
80	$6,5 \pm 0,4$	$8,8 \pm 0,6$	$10,8 \pm 1,0$	$15,1 \pm 1,2$	$18,8 \pm 5,7$
100	$8,0 \pm 0,5$	$11,5 \pm 1,8$	$11,2 \pm 1,6$	$14,6 \pm 4,3$	$18,7 \pm 2,3$
120	$7,5 \pm 0,8$	$10,1 \pm 1,5$	$13,6 \pm 2,7$	$16,4 \pm 2,9$	$18,9 \pm 6,3$
140	$8,4 \pm 0,9$	$10,5 \pm 1,1$	$13,7 \pm 1,5$	$16,7 \pm 4,9$	$20,7 \pm 2,7$



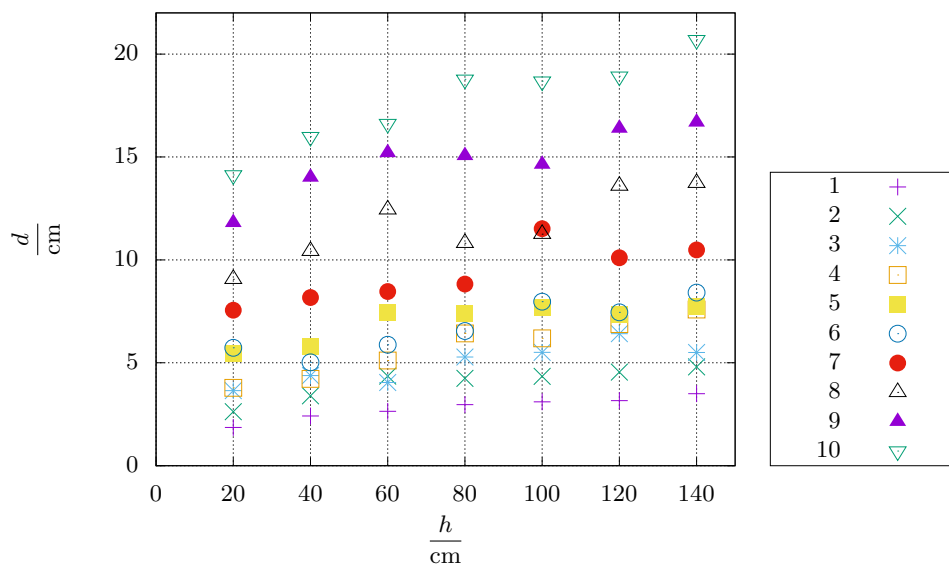
Obr. 6: Kráter od kameňa 4 po vypustení z výšky 140 cm.



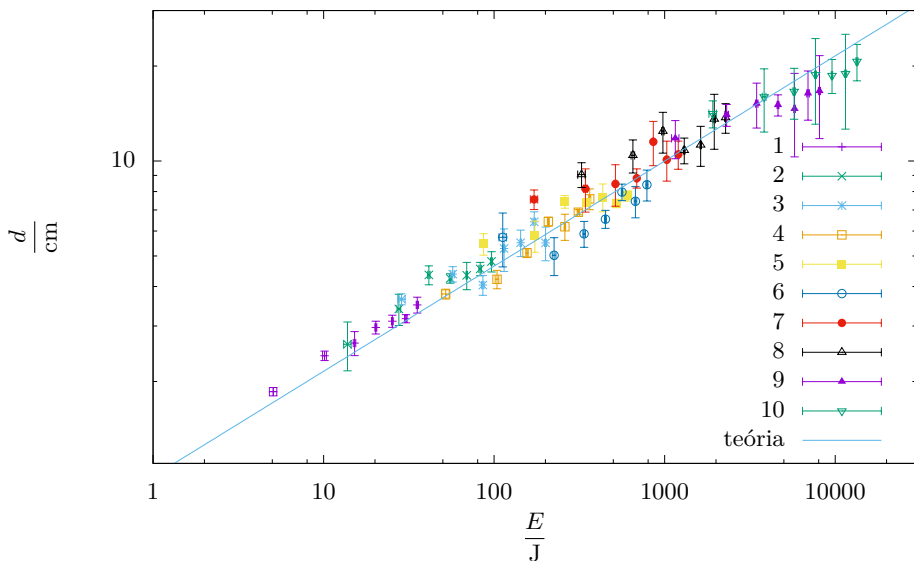
Obr. 7: Kráter od kameňa 7 po vypustení z výšky 120 cm.



Obr. 8: Kráter od kameňa 4 po vypustení z výšky 80 cm.



Obr. 9: Graf závislosti priemeru krátera na výške vypustenia kameňa pre všetky merané kamene.

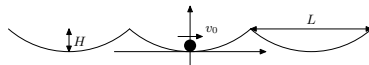


Obr. 10: Logaritmický graf závislosti priemeru vzniknutého krátera na energii kameňa pri dopade.

Úloha I.S ... kmitáme

10 bodů; průměr 2,36; řešilo 72 studentů

Seriál začneme zkoumáním několika mechanických oscilátorů, u kterých nás bude zajímat především určení frekvence volných kmitů. Dále si zopakujeme, jak vypadá oscilátor ve fázovém prostoru.



1. Uvažujme dutý nehmotný kužel, do jehož špičky vložíme kámen o hmotnosti M . Kužel ponoříme špičkou dolů do vody o hustotě ρ , ve které bude plovat. Určete rovnovážnou hloubku ponoru kužele měřenou od špičky h , pokud je celková výška kužele H a poloměr základny R . Dále naleznete úhlovou frekvenci malých vertikálních kmitů kuželu.
2. Představme si závaží o hmotnosti m přidělané na nehmotné pružině o tuhosti k a klidové délce L . Pokud pružinu na druhém konci upevníme, dostaneme kyvadlo. Spočítejte přirozenou úhlovou frekvenci jeho oscilací, přičemž předpokládejte, že délka pružiny se během pohybu nemění. Následně určete malý rozdíl v úhlové frekvenci $\Delta\omega$, o který se úhlová rychlost tohoto kyvadla liší od případu, ve kterém je pružina nahrazena nedeformovatelnou tyčí se stejnou klidovou délkou. Přitom předpokládejte $kL \gg mg$.
3. V terénu, který se skládá z periodicky se opakujících parabol s výškou H a šířkou L , se nachází kostka cukru s hmotností m . Popište její potenciální energii jako funkci souřadnice v horizontálním směru a následně načrtněte možné trajektorie jejího pohybu ve fázovém prostoru v závislosti na rychlosti v_0 , kterou má při průchodu vrcholem paraboly. Na náčrtku označte všechny významné vzdálenosti. Pro výchylku použijte horizontální souřadnici, vhodně přizpůsobte jednotky hybnosti v horizontálním směru. Při výpočtech zanedbejte kinetickou energii pohybu kostky ve vertikálním směru a předpokládejte, že stále zůstává v kontaktu s terénem.

Štěpán našel pár základních oscilátorů.

Kužel

Pokud je kužel ponořen do hloubky h , je jeho poloměr v úrovni hladiny roven

$$r = \frac{R}{H}h$$

a jeho objem pod hladinou bude

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi R^2 h^3}{3H^2}.$$

Vztlaková síla působící na kužel je tedy

$$F = -\rho g V = -\frac{\pi \rho g R^2 h^3}{3H^2},$$

kde znaménko minus značí, že síla působí v opačném směru vzhledem ke směru ponoru h . Tíhová síla má velikost Mg a působí ve směru souřadnice h , z nulové výslednice sil v rovnovážné poloze tedy vyplývá

$$h^3 = \frac{3MH^2}{\pi\rho R^2} \Rightarrow h = \left(\frac{3MH^2}{\pi\rho R^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Při malé výchylce $\Delta h \ll h$, která zvětší ponor kužele, dojde ke zvětšení vztlakové síly F_v , jež má nyní velikost

$$F_v = -\frac{\pi\rho g R^2}{3H^2} (h + \Delta h)^3 = -\frac{\pi\rho g R^2}{3H^2} h^3 \left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right)^3 \approx -\frac{\pi\rho g R^2}{3H^2} h^3 \left(1 + \frac{3\Delta h}{h}\right).$$

Výslednice sil působících na kužel je potom rovna

$$\Delta F = F_v + F_g = F_v - F = -\frac{\pi\rho g R^2 h^3}{3H^2} \frac{3\Delta h}{h} = -\frac{\pi\rho g R^2 h^2}{H^2} \Delta h.$$

Pro zrychlení kužele dostáváme

$$a = \frac{\Delta F}{M} = -\frac{\pi\rho g R^2 h^2}{MH^2} \Delta h,$$

což identifikujeme jako základní rovnici pro harmonické kmitů je

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi\rho g R^2 h^2}{MH^2}} = \left(\frac{\pi\rho g R^2}{MH^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3MH^2}{\pi\rho R^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{9\pi\rho g^3 R^2}{MH^2}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

Kyvadlo

Prodloužení pružiny zřejmě bude

$$\Delta L = \frac{mg}{k},$$

frekvence oscilací kyvadla je dána jako

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{g}{L + \Delta L}} = \sqrt{\frac{g}{L + \frac{mg}{k}}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \left(1 + \frac{mg}{kL}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Oproti kyvadlu s nedeformovatelnou tyčí tedy existuje rozdíl ve frekvenci kmitů, pro $kL \gg mg$ můžeme psát

$$\Delta\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \left(1 + \frac{mg}{kL}\right)^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{g}{L}} \approx -\frac{mg}{2kL} \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Důležitým kvalitativním pozorováním je, že prodloužením tyče se zmenší úhlová frekvence kmitů kyvadla.

Kostka cukru

V naznačeném souřadnicovém systému má jedna z parabol vrchol v počátku. Její obecný předpis je tedy

$$y = cx^2,$$

kde x je horizontální souřadnice a c neznámá konstanta. Vzhledem k tomu, že stejnými, periodicky se opakujícími parabolami je tvořen celý povrch, se v dalších úvahách můžeme omezit na interval

$$x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right].$$

Aby měla parabola v bodě $x = \frac{L}{2}$ výšku H , musí platit

$$H = c \frac{L^2}{4} \Rightarrow c = \frac{4H}{L^2}.$$

Potenciální energie kostky má proto tvar

$$E_p = mgy = \frac{4mgH}{L^2} x^2.$$

Pro náčrt fázového prostoru je zapotřebí určit celkovou mechanickou energii, která bude rovna

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = \frac{p^2}{2m} + \frac{4mgH}{L^2} x^2.$$

Energie se zachovává, přičemž v počátku platí

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Z toho postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{p^2}{2m} \cdot \frac{L^2}{4mgH} &= \frac{1}{2}mv_0^2 \cdot \frac{L^2}{4mgH}, \\ x^2 + \frac{p^2}{\frac{8m^2gH}{L^2}} &= \frac{v_0^2 L^2}{8gH}. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že kostka ve fázovém prostoru opisuje kružnici s poloměrem

$$r = \frac{v_0 L}{\sqrt{8gH}},$$

udáváme-li hybnost v jednotkách

$$\sqrt{\frac{8m^2gH}{L^2}}.$$

Nyní už je snadné tyto výsledky zobecnit a popsat pohyb kostky po parabolách, které nemají střed v počátku – kostka bude ve fázovém prostoru opět opisovat kružnici, jejíž střed bude ležet na ose x v bodě, v němž má vrchol parabola, ve které se kostka právě nachází.

Důležitým poznatkem je, že toto platí pouze tehdy, je-li počáteční kinetická energie menší než potenciální energie v nejvyšším bodě paraboly, tedy pokud platí

$$\frac{1}{2}mv_0^2 < mgH$$

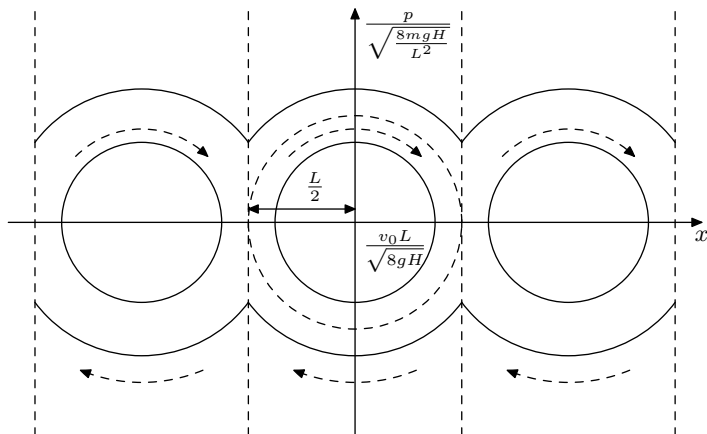
neboli

$$v_0 < \sqrt{2gH}.$$

Ve fázovém prostoru to odpovídá kritickému poloměru kružnice

$$r < \sqrt{2gH} \cdot \frac{L}{\sqrt{8gH}} = \frac{L}{2},$$

jak lze očekávat z geometrie zadané paraboly. Pokud je energie kostky vyšší, bude se vždy pohybovat po části kružnice s příslušným poloměrem v dané parabole. Od okamžiku, kdy



Obr. 11: Fázový diagram pro kostku v nejnižším bodě paraboly. Čárkované vertikální čáry označují hranice parabol. Čárkovaná kružnice značí kružnici s kritickým poloměrem. Čárkované šipky označují směr pohybu ve fázovém prostoru.

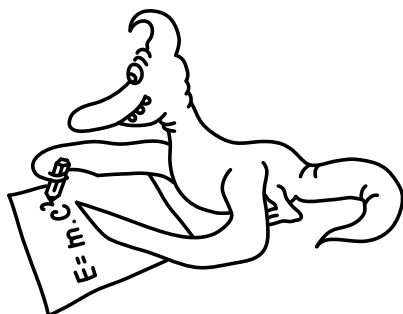
přesáhne nejvyšší bod, bude pokračovat po části kružnice se středem ve středu vedlejší paraboly (viz obrázek 11).

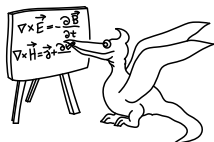
Ve standardním prostoru si lze tyto dvě alternativy představit následovně. První možností je, že kostka osciluje okolo vrcholu paraboly, přičemž vždy zpomaluje, když se blíží do maximální výšky odpovídající výchylce $x = \pm \frac{v_0 L}{\sqrt{8gH}}$. V ní se obrátí směr rychlosti, a kostka se tak začne vracet zpět k vrcholu paraboly. V tomto případě má kostka malou energii a je omezena na pohyb v rámci jediné paraboly.

Pokud má ale kostka dostatečnou energii (tedy $v_0 > \sqrt{2gH}$), může překonat nejvyšší bod paraboly a následně pokračovat v pohybu stejným směrem. Při výstupu bude sice stále zpomalovat, ale její rychlost nikdy neklesne na nulu, a proto nikdy nezmění směr. Kostka se tak může volně pohybovat jedním směrem napříč parabolami.

Štěpán Marek

stepan.marek@fykos.cz





Seriál: Tření a vnější síly

V úvodním dílu seriálu jsme se zabývali dokonalými kmity – na naše závaží na pružině nepůsobil odpor vzduchu, kyvadlo kmitalo v bezvětrí a kužel se potápěl v dokonale stojaté vodě. V reálném světě ovšem často musíme počítat s tím, že na naše závaží působí kromě síly způsobované pružinou i další síly. V tomto díle se budeme zabývat tím, jak s takovými externími silami pracovat, a představíme si důležitý důsledek povahy oscilátorů v poli vnějších sil – rezonanci.

O co se síly snaží?

Uvažujme nyní kmitající systém, který popíšeme výchylkou x a hybností $p = mv$, kde v je rychlost změny výchylky. Označíme-li zrychlení výchylky jako a , dá nám druhý Newtonův zákon rovnici

$$F = ma,$$

kde F je součet všech sil působících na systém. Prozatím budeme uvažovat pouze pohyb v jedné dimenzi. V minulém dílu nám stačilo pracovat pouze se silou, která se snažila vrátit systém do rovnovážné polohy a měla vyjádření

$$F_0 = -kx,$$

kde x byla výchylka odpovídající rovnovážné poloze. Nyní k této síle připočteme obecnou externí sílu závisující na čase, což lze reprezentovat zápisem

$$F_e = F_e(t).$$

Výsledná rovnice má tvar

$$F_e(t) = ma + kx. \quad (20)$$

Obecné řešení této rovnice je složité, provedme proto zpočátku aproximaci – předpokládejme, že hmotnost je natolik malá, že kinetická energie systému je vždy zanedbatelná ve srovnání s potenciální energií systému. Rovnice (20) se tím zjednoduší na

$$F_e(t) = kx.$$

Vidíme, že v tomto případě se síla vracející systém do rovnovážné polohy přesně vyrovná s externí silou a výchylka následuje bez jakéhokoliv zpoždění externí sílu. Pokud by závislost externí síly na čase byla například $F_e(t) = F_e^0 \cos(\omega t)$, pak by se výchylka v čase měnila jako

$$x(t) = \frac{F_e^0}{k} \cos(\omega t),$$

kde F_e^0 je amplituda externí síly.

Normální systém ovšem nulovou hmotnost nemá – to způsobí, že systém má nenulovou hybnost ve chvíli, kdy se externí síla vyrovná se silou F_0 , a tím pádem pokračuje v pohybu i mimo tuto výchylku. Externí síla tak vlastně určuje novou rovnovážnou polohu, do které se systém snaží dostat, ale kterou vždy „přestřelí“.

Tuto ideu můžeme realizovat formálněji na následujícím příkladu. Uvažujme sílu s časovým průběhem $F_e(t) = F_e^0 \Theta(t)$, kde $\Theta(t)$ je tzv. Heavisideova funkce, pro kterou platí

$$\Theta(t) = \begin{cases} \Theta(t) = 1 & t > 0 \\ \Theta(t) = 0 & t < 0 \end{cases} .$$

Jedná se tedy o konstantní sílu, kterou v čase $t = 0$ „zapneme“. Pro čas $t < 0$ je rovnice (20) shodná s rovnicí harmonických kmitů. Pro jednoduchost uvažujme, že systém má pro $t < 0$ nulovou výchylku, a tím pádem je v klidu. Pro $t > 0$ je pak pohybová rovnice

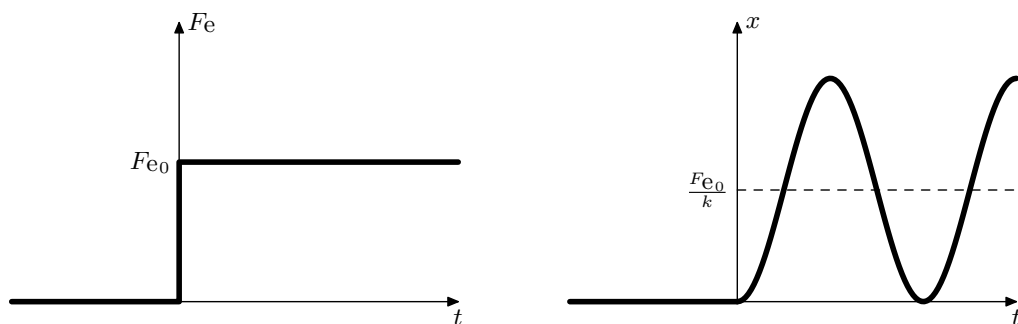
$$\begin{aligned} F_e^0 &= ma + kx, \\ 0 &= ma + k \left(x - \frac{F_e^0}{k} \right). \end{aligned}$$

Zde si můžeme uvědomit, že pokud udáváme polohu v souřadnicích $x' = x - \frac{F_e^0}{k}$, zůstává rychlost $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'}{\Delta t} = v'$ nezměněná a platí

$$0 = ma' + kx' .$$

Vidíme, že systém v tomto případě vykonává jednoduché harmonické kmity, ovšem okolo nové rovnovážné polohy, kterou je $\frac{F_e^0}{k}$. Důležité je, že tyto kmity probíhají s přirozenou úhlovou frekvencí systému

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} .$$



Obr. 12: Systém vlivem vnější síly začne kmitat okolo nové rovnovážné polohy.

Systém pod vlivem externí síly můžeme kvalitativně popsat následujícím způsobem – externí síla se snaží dostat systém do nové rovnovážné polohy dané velikostí síly, avšak oscilační povaha systému mu brání setrvat v klidu v blízkosti rovnovážné polohy.

Povolené ztráty

Mimo externí síly musíme v reálných systémech uvažovat také třecí síly. Ty jsou obecně poměrně složité, nicméně pro relativně pomalé oscilace lze tření vznikající odporem tekutiny přibližně modelovat jako sílu

$$F_t = -\gamma m v,$$

kde γ je koeficient tření (má rozměr s^{-1} , tedy stejný jako frekvence). Tento model tření má značnou výhodu v tom, že je lineární. Pokud je náš pohyb složen ze dvou rychlostí v_1 a v_2 , výsledná třecí síla je

$$F_t = -\gamma m (v_1 + v_2) = -\gamma m v_1 - \gamma m v_2 = F_{t1} + F_{t2}.$$

Pokud tuto sílu vnímáme jako externí sílu, rovnice (20) vede (opět pro nesložený pohyb) na

$$-\gamma m v = m a + k x. \quad (21)$$

Tento vztah není zcela triviální, jelikož a , x i v se v čase mění. Abychom odhalili základní fyzikální principy, uvažujme opět zjednodušení, kdy koeficient γ je relativně malý vzhledem k přirozené frekvenci oscilací $\omega_0 = \frac{k}{m}$. V takovém případě je naše rovnice vlastně opět rovnicí harmonických kmitů, avšak s malým vlivem tření. Kvůli tomuto tření bude systém ztrácet energii. Množství ztracené energie lze odhadnout, budeme-li předpokládat, že systém osciluje pouze harmonicky, tj. platí

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t),$$

$$v(t) = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t),$$

$$a(t) = -\omega_0^2 x_0 \cos(\omega_0 t).$$

Výkon ztráty energie je dán jako

$$P = F_t v = -\gamma m x_0^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t.$$

S použitím vzorce pro goniometrické funkce

$$\sin^2 \omega_0 t = \frac{1 - \cos(2\omega_0 t)}{2}$$

dostáváme

$$P = -\frac{1}{2} \gamma m x_0^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} \gamma m x_0^2 \omega_0^2 \cos(2\omega_0 t).$$

Průměrný výkon ztráty energie za jednu periodu kmitů je pak dán pouze prvním členem, jelikož cosinus se zprůměruje na nulu. Změna energie systému za jednu periodu je tedy

$$\Delta E = PT = P \frac{2\pi}{\omega_0} = -\pi \gamma m \omega_0 x_0^2.$$

Tato změna energie se projeví jako pokles amplitudy kmitání x_0 , která bude po jednom cyklu x'_0 , přičemž z rovnováhy energie plyne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k (x'_0)^2 &= \frac{1}{2} k x_0^2 - \pi \gamma m \omega_0 x_0^2, \\ (x'_0)^2 &= x_0^2 \left(1 - 2\pi \gamma \frac{m}{k} \omega_0\right) = x_0^2 \left(1 - \frac{2\pi}{\omega_0} \gamma\right) = x_0^2 (1 - \gamma T) \end{aligned}$$

a provedením aproximace pro malé γ

$$x'_0 = x_0 \sqrt{1 - \gamma T} \approx x_0 \left(1 - \frac{\gamma}{2} T\right).$$

Nezapomeňme, že jsme v našem odvození uvažovali pouze malé hodnoty γ , a tedy výraz $1 - \frac{\gamma}{2} T$ může být pouze přiblížením určité funkce pro nízké koeficienty tření. Při důkladnějším postupu se ukazuje, že správné řešení obsahuje exponenciální funkci, kterou pro malé hodnoty γ můžeme vyjádřit jako

$$e^{-\frac{\gamma}{2}t} \approx 1 - \frac{\gamma}{2}t,$$

tedy platí

$$x'_0(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}. \quad (22)$$

Při ještě důkladnějším zkoumání se ukáže, že pouhý exponenciální pokles amplitudy není jediný efekt tření, ale mění se i frekvence oscilací. Při velkém tření se může dokonce stát, že systém vůbec oscilovat nebude. Těmito zpřesněními a odpovídajícími příklady se však zatím zabývat nebudeme. Nyní nám stačí si pamatovat, že tření způsobuje exponenciální pokles amplitudy kmitů.

Všechny síly dohromady

Nyní se budeme zabývat tím, jak ideu tření a ztrát energie v systému zkombinovat s ideou externích sil, které se snaží se systémem pohybovat. Pro tento účel budeme uvažovat jednoduchou harmonickou externí sílu

$$F_e(t) = F_e^0 \cos(\omega t),$$

kde ω se může lišit od ω_0 . Zároveň započteme v kmitech vliv tření, čímž získáme výslednou pohybovou rovnici

$$F_e^0 \cos(\omega t) = ma + \gamma mv + kx. \quad (23)$$

V systému, který tato rovnice popisuje, soupeří několik vlivů. Externí síla kontinuálně mění rovnovážný bod, kolem kterého se systém snaží oscilovat, zároveň však tření zabraňuje přílišné rychlosti systému, jehož oscilace tak ztrácí energii. Výsledkem těchto vlivů může být velmi komplikovaný pohyb, ovšem tření zajistí, že většina složek tohoto pohybu nakonec vymizí. Nás bude zajímat ta část pohybu, která s plynoucím časem nezmizí, tzv. *stacionární řešení*. Z tvaru rovnice (23) můžeme tušit, že aby byla platná, musí systém nějak oscilovat, ale konkrétní amplituda a relativní fáze vzhledem k oscilacím externí síly nejsou jasné. Budeme předpokládat, že systém osciluje podle rovnice

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega' t - \varphi_0), \\ v(t) &= -\omega' x_0 \sin(\omega' t - \varphi_0), \\ a(t) &= -\omega'^2 x_0 \cos(\omega' t - \varphi_0). \end{aligned}$$

S použitím sčítacích vzorců pro goniometrické funkce dostáváme

$$\begin{aligned} \cos(\omega' t - \varphi_0) &= \cos \varphi_0 \cos(\omega' t) + \sin \varphi_0 \sin(\omega' t), \\ \sin(\omega' t - \varphi_0) &= \sin(\omega' t) \cos \varphi_0 - \cos(\omega' t) \sin \varphi_0. \end{aligned}$$

Tím pádem má rovnice tvar

$$F_e^0 \cos(\omega t) = (kx_0 \cos \varphi_0 + \gamma m \omega' x_0 \sin \varphi_0 - m \omega'^2 x_0 \cos \varphi_0) \cos(\omega' t) + (kx_0 \sin \varphi_0 - \gamma m \omega' x_0 \cos \varphi_0 - m \omega'^2 x_0 \sin \varphi_0) \sin(\omega' t).$$

Aby tato rovnice platila v jakýkoli čas t , člen obsahující $\sin(\omega' t)$ musí být nulový neboli musí platit

$$kx_0 \sin \varphi_0 - \gamma m \omega' x_0 \cos \varphi_0 - m \omega'^2 x_0 \sin \varphi_0 = 0, \\ (\omega_0^2 - \omega'^2) \sin \varphi_0 = \gamma \omega' \cos \varphi_0.$$

Tato rovnice je triviálně splněna pro $\gamma = 0$ a $\varphi_0 = n\pi$, kde n je celé číslo. To znamená, že pokud je tření nulové, fázový rozdíl mezi silou a oscilacemi systému bude buď nulový, nebo budou síla a systém přesně v protifázi. V ostatních případech máme

$$\cotg \varphi_0 = \frac{\omega_0^2 - \omega'^2}{\gamma \omega'}.$$
 (24)

Vidíme, že tento výraz replikuje předpovídané chování pro $\gamma \rightarrow 0$, jelikož pro malé hodnoty γ dostáváme naopak velkou hodnotu funkce kotangens, která odpovídá buď takřka nulovému fázovému posunu (pro kladnou velkou hodnotu), nebo protifázi (pro zápornou hodnotu). Tím pádem je pohybová rovnice dána jako

$$F_e^0 \cos(\omega t) = (kx_0 \cos \varphi_0 + \gamma m \omega' x_0 \sin \varphi_0 - m \omega'^2 x_0 \cos \varphi_0) \cos(\omega' t) = \\ = x_0 \sin \varphi_0 (k \cotg \varphi_0 + \gamma m \omega' - m \omega'^2 \cotg \varphi_0) \cos(\omega' t).$$

Nyní by mělo být zřejmé, že další podmínkou platnosti rovnice v každém čase je $\omega' = \omega$. Díky tomu už známe jak frekvenci, tak fázový posun kmitů. Ještě nás ovšem zajímá amplituda kmitů. Substitucí v rovnici (24) dostáváme

$$F_e^0 = kx_0 \sin \varphi_0 \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\gamma \omega} + \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2} - \frac{\omega^2 \omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2 \gamma \omega} \right) = \\ = kx_0 \frac{\sin \varphi_0}{\gamma \omega \omega_0^2} (\omega_0^4 - \omega_0^2 \omega^2 + \gamma^2 \omega^2 + \omega^4 - \omega^2 \omega_0^2) = \\ = kx_0 \frac{\sin \varphi_0}{\gamma \omega \omega_0^2} \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2 \right).$$

Na tomto místě použijeme další goniometrickou identitu

$$1 + \cotg^2 \varphi_0 = \frac{1}{\sin^2 \varphi_0},$$

s jejíž pomocí vyjádříme

$$\sin \varphi_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \cotg^2 \varphi}} = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{\gamma^2 \omega^2}}} = \pm \frac{\gamma \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}},$$

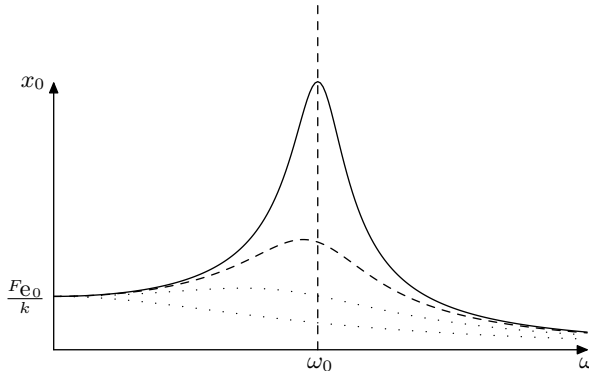
takže

$$F_e^0 = \pm x_0 \frac{k}{\omega_0^2} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

Pokud nás zajímá pouze absolutní velikost amplitudy (relativní fázi už známe), máme jednoduše

$$x_0 = \frac{1}{m} \frac{F_e^0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}. \quad (25)$$

Všimněme si, že pokud za předpokladu malého tření ($\gamma \ll \omega_0$) zvolíme frekvenci externí síly ω blízkou ω_0 , výsledná amplituda oscilací je obrovská. Tomuto jevu se říká *rezonance* (viz obrázek 13).



Obr. 13: Amplituda jako funkce frekvence vnější síly. Grafy odpovídají třecím koeficientům $\frac{\gamma}{\omega_0} = 0,2, 0,5, 1,2$ s klesajícím vrcholem pro rostoucí γ . Všimněme si, že pro γ , které již není mnohem menší než ω_0 , se maximum amplitudy přesouvá pryč od ω_0 .

Rezonanci lze pozorovat v mnoha systémech a dá se velmi dobře využít, kupříkladu pomocí rezonančních obvodů lze zvýraznit některé frekvence signálů oproti jiným. Samozřejmě existuje mnoho příkladů rezonance v akustice, například jednotlivé tóny. Jak je možné, že systém má více než jednu přirozenou frekvenci, budeme řešit v pozdějších dílech seriálu, zabývajících se vlněním. Prozatím nám postačí zkoumat vlastnosti rezonance jednoduchých oscilátorů.

Vraťme se ke vztahům pro fázový rozdíl a amplitudu oscilujícího systému s externí silou. Z kvalitativního hlediska nás zajímají limity $\omega \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$ a $\omega \rightarrow \omega_0$. Pokud je frekvence síly výrazně nižší než frekvence přirozených oscilací, platí

$$x_0 \rightarrow \frac{F_e^0}{m\omega_0^2} = \frac{F_e^0}{k}.$$

Zároveň $\cotg \varphi_0 \rightarrow \infty$, takže $\varphi_0 \rightarrow 0$ a opět máme situaci, ve které výchylka přesně následuje sílu. To dává smysl, jelikož předpoklad $\omega \rightarrow 0$ odpovídá systému, na nějž působí jen velmi pomalu se měnící vnější síla, a ten je díky tlumení schopen tuto sílu následovat. Efektivně to také odpovídá předpokladu $\omega_0 \rightarrow \infty$, což je ekvivalentní s případem $m \rightarrow 0$, který jsme diskutovali na začátku textu.

Pro případ $\omega \rightarrow \infty$, $\cotg \varphi_0 \rightarrow -\infty$, a tedy $\varphi \rightarrow -\pi$ je výchylka systému v přesné protifázi k oscilacím síly. Amplituda oscilací je

$$x_0 \rightarrow \frac{F_e^0}{m\omega^2} \rightarrow 0.$$

V této situaci jsou oscilace vnější síly tak rychlé, že se systém nestíhá rozpohybovat.

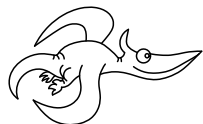
V posledním případě (při rezonanci) platí $\cotg \varphi_0 \rightarrow 0$ čili $\varphi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Síla je shodná se směrem rychlosti, oscilační amplituda

$$x_0 \rightarrow \frac{F_e^0}{\gamma\omega}$$

je určena třením, resp. ztrátami v systému. Dále vidíme, že pro malé ztráty může amplituda růst bez omezení, v praxi však často dojde k nelineárním efektům, jako je například poškození systému.

Závěr

V tomto díle seriálu jsme se zabývali tím, co se stane, když do našeho systému přidáme více sil. V příštím díle zjistíme, co se změní, když přidáme více oscilátorů! Budeme zkoumat chování pružin se dvěma závažími, kyvadel, která se mohou pohybovat více směry, a podobné problémy.



Pořadí řešitelů po I. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%“%	Σ	
		6	6	5	8	8	10	13	10	66	100	18	66
1. Lukáš Linhart	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	6	6	4	6	8	9	11	7	57	86	15	57
2. Vojtěch Kadeřábek	G Mensa, Praha	6	6	4	3	8	8	6	5	46	70	12	46
3. Vladimíra Jiříčková	G J. Vrchlického, Klatovy	6	6	4	2	–	6	9	1	34	59	9	34
4. Daniel Čtvrtečka	G Christiana Dopplera, Praha	6	6	4	4	–	7	3	–	30	63	8	30
5. Sandeep Kandi	IMSA, Aurora, USA	4	6	1	6	2	1	2	5	27	41	7	27
6. David Mendl	G P. de Coubertina, Tábor	4	6	–	–	–	–	7	–	17	68	4	17
7.–8. Richard Materna	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	6	–	–	–	7	–	–	15	68	4	15
7.–8. Kristián Matuš	G, Nový Jičín	4	6	3	2	–	–	–	–	15	60	4	15
9.–10. Boris Pasterňak	Leaf Academy	4	–	–	–	–	9	–	–	13	81	3	13
9.–10. Samuel Ševčík	G, Jeseník	6	2	–	–	–	5	–	–	13	59	3	13
11. Veronika Bartáková	Slovanské G, Olomouc	6	6	–	–	–	–	–	–	12	100	3	12
12.–13. Anežka Čechová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	5	4	–	9	39	2	9
12.–13. Vítězslav Lamoš	G, Omská, Praha	6	–	–	–	–	3	–	–	9	56	2	9
14.–15. Jakub Ebringer	G, Blansko	6	2	–	–	–	–	–	–	8	67	2	8
14.–15. Johana Vaníčková	G, Českolipská, Praha	–	6	–	2	–	–	–	–	8	57	2	8
16. Isuru Liyanawaduge	D.S.Senanayake College	–	6	–	–	–	–	–	–	6	100	1	6
17. Patrik Pecina	G F. Palackého, Val. Mez.	–	4	–	–	–	1	–	–	5	31	1	5
18. Václav Vinkler	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	2	–	1	–	–	3	17	0	3

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%	“%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	6	6	5	8	8	10	13	10	66	100	18	66
1. <i>Jonáš Dej</i>	Wichterlovo G, Ostrava	6	6	4	4	9	9	14	4	56	85	15	56
2. <i>Evan Kim</i>	Tesla STEM High School, USA	6	6	5	8	8	1	11	9	54	82	15	54
3. <i>Pavel Provažník</i>	G Dašická, Pardubice	6	6	4	5	7	9	7	5	49	74	13	49
4. <i>David Bálek</i>	G Legionářů, Příbram	6	6	4	6	6	–	8	8	44	79	12	44
5.–6. <i>Jan Engler</i>	G, Hodonín	6	6	4	4	–	7	–	9	36	80	10	36
5.–6. <i>Martin Kysela</i>	G, Český Krumlov	6	6	4	5	5	6	4	–	36	64	10	36
7. <i>Jan Lepič</i>	G, Strakonice	6	6	3	1	8	5	5	1	35	53	9	35
8. <i>Jakub Hadač</i>	G V. Hlavatého, Louny	6	6	4	4	1	–	10	3	34	61	9	34
9. <i>Tomáš Patsch</i>	Slovanské G, Olomouc	6	6	4	6	–	9	–	–	31	89	8	31
10.–12. <i>Barbora Čemanová</i>	G, Park mládeže, Košice	–	4	4	–	–	9	11	2	30	68	8	30
10.–12. <i>Daniela karpíšková</i>	Masarykovo G, Plzeň	6	6	0	1	6	6	3	2	30	45	8	30
10.–12. <i>Alexander Stoyanov</i>	91 Germ. Lang. Sch. "Pr. K. G"	6	6	5	4	1	3	5	0	30	45	8	30
13. <i>Ladislav Vávra</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	6	2	0	6	–	8	4	0	26	45	7	26
14. <i>Vít Brázda</i>	G Dašická, Pardubice	6	6	5	–	8	–	–	–	25	100	7	25
15. <i>Martin Švanda</i>	Arcibiskupské G, Praha	4	6	–	4	–	9	–	–	23	77	6	23
16. <i>Dalibor Očenášek</i>	G Uničov	6	6	4	1	–	5	–	–	22	63	6	22
17. <i>Karolína Sedová</i>	G Jana Keplera, Praha	6	6	–	–	–	9	–	–	21	95	5	21
18.–19. <i>Lukáš Létal</i>	G J. Škody, Přerov	4	6	2	0	–	8	–	–	20	57	5	20
18.–19. <i>Miruna Neacsu</i>	Inter. Computer HS, Bucharest, RO	6	6	1	–	2	2	–	3	20	44	5	20
20. <i>Vojtěch Juza</i>	G, Litomyšl	6	4	–	–	–	5	3	1	19	42	5	19
21. <i>Julie Křimská</i>	G Jana Keplera, Praha	6	6	–	–	–	5	–	–	17	77	4	17
22.–24. <i>Ashmit Dutta</i>	Wayzata High School	6	4	–	6	–	–	–	–	16	80	4	16
22.–24. <i>Jakub Genčur</i>	G Matyáše Lercha, Brno	6	6	4	–	–	–	–	–	16	94	4	16
22.–24. <i>Petr Piňos</i>	Biskupské G, Brno	6	6	4	–	–	–	–	–	16	94	4	16
25.–26. <i>Jiří Jirásek</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	4	6	–	–	–	1	4	–	15	43	4	15
25.–26. <i>Juraj Pavolko</i>	G, P. Horova, Michalovce	4	4	–	5	–	2	–	–	15	50	4	15
27. <i>Petr Vítko</i>	G Teplice	2	6	0	–	–	2	–	–	10	37	2	10
28. <i>Barbora Peřinová</i>	Česká zemědělská akademie Humpol	–	4	4	–	0	1	–	–	9	31	2	9
29. <i>Vojtěch Štěpán</i>	G, Benešov	–	6	–	–	–	–	–	–	6	100	1	6
30. <i>Damián Tancoš</i>	G, Kukučínova, Poprad	–	4	–	–	1	0	0	–	5	14	1	5
31.–32. <i>Domínik Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	4	–	–	–	–	–	–	–	4	67	1	4
31.–32. <i>Patrik Jendele</i>	SPŠ stavební Plzeň	4	–	–	–	–	–	–	–	4	67	1	4
33. <i>Timotej Marhefka</i>	G sv. Jána Pavla II., Poprad	–	2	–	–	0	0	0	–	2	5	0	2

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%	“%	Σ
		3	3	5	8	8	10	13	10	60	100	16	60
1. <i>Aleš Opl</i>	G a Hudební škola, Praha 3	3	3	4	6	8	10	15	9	58	97	16	58
2. <i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	3	3	4	8	8	9	13	9	57	95	15	57
3. <i>Josef Vácha</i>	G Jana Keplera, Praha	3	3	5	6	8	8	13	–	46	92	12	46
4. <i>Elena Chochoňáková</i>	G L. Svobodu, Humenné	2	3	4	6	7	8	12	1	43	72	12	43
5.–6. <i>David Chudožilov</i>	Reálné G a ZŠ, Prostějov	1	3	5	6	8	8	7	1	39	65	10	39
5.–6. <i>Jan Pijáček</i>	Biskupské G, Brno	3	2	4	6	2	10	11	1	39	65	10	39
7. <i>Yahya Numan INCIR-KUS</i>	Yasar Acar High School	3	3	3	6	8	8	3	3	37	62	10	37
8. <i>Adam Kozubek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	3	3	4	6	–	8	10	1	35	67	9	35
9. <i>Hynek Jakeš</i>	Slovanské G, Olomouc	2	3	4	6	8	–	–	10	33	89	9	33
10. <i>Nikita Ustinov</i>	G Jana Keplera, Praha	3	3	4	6	–	9	–	7	32	82	8	32
11. <i>Jáchym Mraček</i>	Akademické G, Praha	2	3	4	4	1	7	9	1	31	52	8	31
12.–14. <i>Marie Lausová</i>	G, Jihlava	3	2	–	5	2	8	8	0	28	51	7	28
12.–14. <i>Václav Maštera</i>	G P. de Coubertina, Tábor	2	3	5	8	8	2	–	–	28	76	7	28
12.–14. <i>Daniel Skýpala</i>	G, Olomouc-Hejčín	3	3	4	6	–	8	–	4	28	72	7	28
15.–17. <i>Matouš Hofmeister</i>	G J. Barranda, Beroun	3	3	4	–	4	7	5	–	26	62	7	26
15.–17. <i>Jan Marjánko</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	3	3	3	4	–	8	5	–	26	62	7	26
15.–17. <i>Aleš Manuel Papáček</i>	G, Třeboň	2	3	3	–	5	8	5	–	26	62	7	26
18. <i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	3	3	4	6	–	8	–	–	24	83	6	24
19.–22. <i>Eliška Durstová</i>	G, Dvůr Králové n. L.	2	3	4	5	–	9	–	0	23	59	6	23
19.–22. <i>Adam Hůštava</i>	European School Luxembourg II	3	2	–	–	–	8	10	–	23	79	6	23
19.–22. <i>Antonín Kubík</i>	G, Roudnice nad Labem	3	3	0	–	–	8	9	0	23	52	6	23
19.–22. <i>Ondřej Piroutek</i>	G, Českolipská, Praha	3	3	–	5	–	3	9	0	23	49	6	23
23. <i>Jan Bajer</i>	G, Jihlava	3	3	0	4	2	2	7	0	21	35	5	21
24. <i>Vojtěch Votruba</i>	G Jana Keplera, Praha	2	3	–	6	–	9	–	–	20	83	5	20
25.–30. <i>Eva Feldebabelová</i>	Katolické gymnázium Třebíč	–	3	4	6	–	–	6	–	19	66	5	19
25.–30. <i>Matúš Jakubec</i>	G, P. Horova, Michalovce	3	3	–	6	–	7	–	–	19	79	5	19
25.–30. <i>Eliška Malá</i>	Slovanské G, Olomouc	2	3	4	4	1	5	–	–	19	51	5	19
25.–30. <i>Jakub Mikeš</i>	G J. Škody, Přerov	3	3	4	–	–	9	–	–	19	90	5	19
25.–30. <i>Jakub Pelc</i>	G, Benešov	2	3	–	1	–	5	8	–	19	51	5	19
25.–30. <i>Pavína Zavřelová</i>	Biskupské G, Brno	1	3	4	6	–	5	–	0	19	49	5	19
31. <i>Lubomír Břoušek</i>	G, Jihlava	3	4	–	–	3	8	–	–	18	58	5	18
32.–33. <i>Luboš Bariak</i>	G Tajovského, B. Bystrica	–	3	0	–	–	6	7	–	16	52	4	16
32.–33. <i>Martin Fedorko</i>	G J. A. Raymana, Prešov	3	3	4	6	–	–	–	–	16	84	4	16
34. <i>Tomáš Heger</i>	Jiráskovo G, Náchod	3	3	4	4	–	–	1	15	52	4	15	
35.–36. <i>Lukáš Fidler</i>	Jiráskovo G, Náchod	1	3	4	6	–	–	–	–	14	74	3	14
35.–36. <i>Vojtěch Stránský</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	1	3	4	6	–	–	0	14	48	3	14	
37.–40. <i>Dávid Brodňanský</i>	G J. A. Raymana, Prešov	–	3	–	–	–	10	–	–	13	100	3	13
37.–40. <i>Monika Janderová</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	1	–	–	–	7	5	–	13	50	3	13
37.–40. <i>Ondřej Korběl</i>	G Varšavská, Žilina	2	3	–	–	–	8	–	–	13	81	3	13
37.–40. <i>Tereza Skořepová</i>	G Dašická, Pardubice	1	3	–	4	–	4	1	–	13	35	3	13
41.–42. <i>Martin Polák</i>	G Masaryk.nám.	2	3	4	–	1	2	–	–	12	41	3	12
41.–42. <i>Míchaela Šídová</i>	G, Litoměřická, Praha	3	3	4	–	–	2	–	–	12	57	3	12
43.–44. <i>Matěj Charousek</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	1	2	0	–	4	4	–	–	11	38	3	11
43.–44. <i>Matěj Korž</i>	G J. A. Raymana, Prešov	–	3	–	–	–	8	–	–	11	85	3	11
45.–46. <i>Aneta Píková</i>	G, Strakonice	0	–	0	2	2	5	–	1	10	23	2	10
45.–46. <i>Michal Štěpán</i>	Jiráskovo G, Náchod	3	3	–	–	–	4	–	–	10	63	2	10
47.–48. <i>Anička Chu Ngoc</i>	G, Jihlava	–	3	–	–	–	1	5	–	9	35	2	9
47.–48. <i>Wiktor Macura</i>	G J. Slowackiego, Český Těšín	3	3	–	–	–	3	–	–	9	56	2	9
49.–51. <i>Štěpán Cuzák</i>	Jiráskovo G, Náchod	1	2	–	–	–	5	–	–	8	50	2	8

jméno <i>Student</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%	“%	Σ
		3	3	5	8	8	10	13	10	60	100	16	60
49.–51. <i>Bishoy Roushdy</i>	STEM High School, Egypt	2	0	0	5	–	1	–	0	8	21	2	8
49.–51. <i>Vojtěch Smola</i>	G Komenského, Havířov	1	3	4	–	–	–	–	–	8	73	2	8
52.–54. <i>Samuel Stanek</i>	G Grösslingová, Bratislava	–	3	4	–	–	–	–	–	7	88	2	7
52.–54. <i>Kristián Štastný</i>	G, Ostrov	3	3	–	–	–	1	–	–	7	44	2	7
52.–54. <i>Jevhenij Vorochta</i>	Jiráskovo G, Náchod	3	3	–	–	–	1	–	–	7	44	2	7
55.–56. <i>Abanoub Osama</i>	STEM High School, Egypt	0	0	5	0	0	0	0	1	6	10	1	6
55.–56. <i>Bianka Tomaščíková</i>	G Varšavská, Žilina	2	–	4	–	–	–	–	–	6	75	1	6
57. <i>Mohamed Mostafa</i>	Sayed STEM High School, Egypt	0	1	4	0	0	0	0	–	5	10	1	5
58.–65. <i>Hamdy Amen</i>	STEM High School, Egypt	0	3	0	0	0	1	0	0	4	7	1	4
58.–65. <i>Zyad Ekramy</i>	STEM High School, Egypt	0	3	0	0	–	1	–	–	4	14	1	4
58.–65. <i>Lukáš Hubač</i>	SPŠ a VOŠ, Písek	1	2	0	–	–	1	–	–	4	19	1	4
58.–65. <i>Mahmoud Shawky</i>	STEM High School, Egypt	0	0	4	0	0	0	0	0	4	7	1	4
58.–65. <i>Mahmoud Shawky</i>	STEM High School, Egypt	0	0	4	0	0	0	0	0	4	7	1	4
58.–65. <i>Radim Skála</i>	G, Hořovice	–	–	–	–	–	4	–	–	4	40	1	4
58.–65. <i>Martin Václavíček</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	1	–	–	–	3	–	–	4	31	1	4
58.–65. <i>Nabil Youssef</i>	STEM High School, Egypt	0	0	4	0	0	0	–	0	4	9	1	4
66.–67. <i>Moaz Ahmed</i>	STEM High School, Egypt	0	3	0	0	0	0	0	0	3	5	0	3
66.–67. <i>Jakub Ferenčík</i>	G Dašická, Pardubice	–	3	–	–	–	–	–	–	3	100	0	3
68.–69. <i>Akram Haitham</i>	G, Frenštát pod Radhoš- tém	2	0	0	0	0	0	0	0	2	3	0	2
68.–69. <i>Akmal Hashad</i>	STEM High School, Egypt	0	0	0	0	0	2	0	0	2	3	0	2
70.–73. <i>Hamdy Nour El-din Mansour</i>	STEM High School, Egypt	0	0	0	0	0	1	0	0	1	2	0	1
70.–73. <i>Mohammed Meshrif</i>	STEM High School, Egypt	0	0	0	0	0	1	0	0	1	2	0	1
70.–73. <i>Ahmed Ragab</i>	Tesla STEM High School, USA	0	0	–	–	–	1	–	–	1	6	0	1
70.–73. <i>Seif Eldein Walid</i>	STEM High School, Egypt	0	0	0	0	0	1	0	0	1	2	0	1
74.–81. <i>Mahmoud El-Nezely</i>	STEM High School, Egypt	0	0	0	0	0	0	–	0	0	0	0	0
74.–81. <i>Saif El-said</i>	STEM High School, Egypt	0	0	0	0	0	0	0	–	0	0	0	0
74.–81. <i>Moemen Ibrahim</i>	STEM High School, Egypt	0	0	0	0	0	0	–	0	0	0	0	0
74.–81. <i>Mahmoud Kassem</i>	STEM High School, Egypt	0	0	0	0	–	0	–	–	0	0	0	0
74.–81. <i>Ahmed Moussa</i>	STEM High School, Egypt	0	0	0	0	0	0	–	0	0	0	0	0
74.–81. <i>Ahmed Nassar</i>	STEM High School, Egypt	0	0	0	0	0	0	–	–	0	0	0	0
74.–81. <i>Omar Sharaf</i>	STEM High School, Egypt	0	0	0	0	0	0	–	–	0	0	0	0
74.–81. <i>ahmed waleed</i>	STEM High School, Egypt	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0


Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student</i>	Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	I	,%	“%	Σ
			3	3	5	8	8	10	13	10	60	100	16	60
1.	<i>Patrik Kašpárek</i>	Katolické gymnázium Třebíč	2	3	4	6	8	10	14	9	56	<i>93</i>	<i>15</i>	56
2.	<i>Vojtěch Kuchař</i>	Wichterlovo G, Ostrava	3	3	4	6	2	10	13	5	46	<i>77</i>	<i>12</i>	46
3.	<i>Marek Milička</i>	G dr. K. Polesného., Znojmo	3	3	4	6	8	9	7	5	45	<i>75</i>	<i>12</i>	45
4.	<i>Viktor Fukala</i>	G Jana Keplera, Praha	3	3	4	8	8	8	–	10	44	<i>94</i>	<i>12</i>	44
5.	<i>Dominik Farhan</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	3	3	5	6	7	5	9	5	43	<i>72</i>	<i>12</i>	43
6.	<i>Šimon Kurz</i>	G Ludka Pika, Plzeň	3	3	4	6	–	9	12	2	39	<i>75</i>	<i>10</i>	39
7.	<i>Matěj Dvořák</i>	G Jana Keplera, Praha	2	3	2	8	5	4	8	3	35	<i>58</i>	<i>9</i>	35
8.	<i>Tomáš Tuleja</i>	G L. Svobodu, Humenné	3	3	4	6	7	8	–	–	31	<i>84</i>	<i>8</i>	31
9.	<i>Viduranga Landers</i>	D.S.Senanayake College	3	3	1	6	–	8	8	1	30	<i>58</i>	<i>8</i>	30
10.	<i>Tomáš Volf</i>	G Jura Hronca, Bratislava	1	3	4	4	2	4	10	–	28	<i>56</i>	<i>7</i>	28
11.–13.	<i>Mona Alizadeh</i>	St Paul's GS	3	3	3	4	3	10	–	–	26	<i>70</i>	<i>7</i>	26
11.–13.	<i>Marika Kosohorská</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	3	3	4	–	8	8	–	–	26	<i>90</i>	<i>7</i>	26
11.–13.	<i>Štěpán Prossl</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	3	3	–	–	8	8	–	4	26	<i>76</i>	<i>7</i>	26
14.–15.	<i>Lubor Čech</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	3	–	6	–	2	10	–	24	<i>65</i>	<i>6</i>	24
14.–15.	<i>Daniěl Foušek</i>	G, Špitálská, Praha	3	3	0	4	–	8	6	–	24	<i>57</i>	<i>6</i>	24
16.	<i>Andrew Pun</i>	M. Garneau Collegiate Institute	3	2	4	6	8	–	–	–	23	<i>85</i>	<i>6</i>	23
17.	<i>Martin Opat</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	3	4	7	–	–	–	4	21	<i>72</i>	<i>5</i>	21
18.–19.	<i>Log Franc</i>	Cumberland Valley HS, USA	3	3	4	–	7	3	–	–	20	<i>69</i>	<i>5</i>	20
18.–19.	<i>Agra Navaratne Navaratne</i>	D.S.Senanayake College	3	3	4	6	–	–	2	2	20	<i>48</i>	<i>5</i>	20
20.–22.	<i>Aahana Aahana</i>	CHIREC International School	3	3	3	2	3	4	–	1	19	<i>40</i>	<i>5</i>	19
20.–22.	<i>Soňa Husáková</i>	G, Českolipská, Praha	3	3	4	–	–	9	–	–	19	<i>90</i>	<i>5</i>	19
20.–22.	<i>Ondřej Sladký</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	3	3	4	4	5	–	–	–	19	<i>70</i>	<i>5</i>	19
23.–25.	<i>Lívia Čerešňová</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	1	3	–	–	–	6	7	–	17	<i>59</i>	<i>4</i>	17
23.–25.	<i>Jaroslav Grulich</i>	Jiráskovo G, Náchod	3	3	4	–	–	7	–	–	17	<i>81</i>	<i>4</i>	17
23.–25.	<i>Konstantin Tripunovski</i>	American HS Skopje, Macedonia	3	3	0	4	1	3	–	3	17	<i>36</i>	<i>4</i>	17
26.	<i>Marek Broul</i>	G dr. V. Šmejkal, Ústí n. L.	3	3	–	–	8	–	–	–	14	<i>100</i>	<i>3</i>	14
27.–28.	<i>Robert Gemrot</i>	G Komenského, Havířov	3	3	4	–	–	–	–	–	10	<i>91</i>	<i>2</i>	10
27.–28.	<i>Matúš Kolenka</i>	G Konštantínova, Prešov	2	2	–	1	1	3	–	1	10	<i>24</i>	<i>2</i>	10
29.	<i>Gauri Shankar H</i>	Pondicherry University	2	3	1	2	–	1	0	–	9	<i>21</i>	<i>2</i>	9
30.–31.	<i>Zsolt Beke</i>	G H. Selyeho Komárno	–	3	–	–	–	5	–	–	8	<i>62</i>	<i>2</i>	8
30.–31.	<i>Aneta Pjatkanová</i>	G, Kralupy	3	3	1	–	–	1	–	–	8	<i>38</i>	<i>2</i>	8
32.	<i>Dávid Benko</i>	G L. Svobodu, Humenné	2	3	–	–	–	2	–	–	7	<i>44</i>	<i>2</i>	7
33.	<i>Patrik Kočan</i>	G M. Hattalu, Trstená	1	2	–	–	–	3	–	–	6	<i>38</i>	<i>1</i>	6
34.	<i>Martina Daňková</i>	Gymnázium Brno-Bystrc	2	3	–	–	–	–	–	–	5	<i>83</i>	<i>1</i>	5
35.–37.	<i>Youssef Abdelmoneim</i>	STEM High School, Egypt	0	3	–	–	–	–	–	–	3	<i>50</i>	<i>0</i>	3
35.–37.	<i>Philopater Gabra</i>	STEM High School, Egypt	0	3	0	0	0	0	0	0	3	<i>5</i>	<i>0</i>	3
35.–37.	<i>Le Vu Neumann</i>	G Opatov, Praha	–	3	–	–	–	–	–	–	3	<i>100</i>	<i>0</i>	3
38.–41.	<i>Hussein Hassan</i>	STEM High School, Egypt	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<i>0</i>	<i>0</i>	0
38.–41.	<i>Islam Hassan</i>	STEM High School, Egypt	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<i>0</i>	<i>0</i>	0
38.–41.	<i>Andrew Henin</i>	STEM High School, Egypt	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<i>0</i>	<i>0</i>	0
38.–41.	<i>Ahmed Jaheen</i>	STEM High School, Egypt	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<i>0</i>	<i>0</i>	0



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
18000 Praha 8

www: <https://fykos.cz>
e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/FYKOS>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.