

Úloha IV.3 ... uuu-trubice

5 bodů; průměr 3,58; řešilo 50 studentů

Jakou periodu malých kmitů bude mít voda ve skleněné trubici na obrázku? Uvažujte pokojovou teplotu a normální tlak a předpokládejte, že voda je dokonale nestlačitelná.

Karel zase přemýšlel nad U-trubicemi.

Harmonické kmity nastanou tehdy, když síly v systému působí proti výchylce (neboli vrací jej zpět do rovnovážné polohy) a zároveň je jejich velikost přímo úměrná velikosti výchylky. Tuto podmínku můžeme zapsat rovnicí $F = -kx$, kde k je tuhost systému. Ukážeme-li, že pohyb v uuu-trubici se řídí touto rovnicí, máme vyhráno, protože periodu kmitů harmonického systému lze snadno spočítat jako

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (1)$$

kde m je hmotnost, na kterou síla F působí.

Pokud v jednom rameni zvedneme hladinu vody o x , ve druhém rameni hladina klesne o x . Zvýšená hladina bude působit svou tíhou na celý vodní sloupec a bude se jej snažit navrátit do rovnovážné polohy. Můžeme si to představit tak, že nad sníženou hladinou se teď nachází sloupec vody o výšce $2x$, má hmotnost $m_x = 2\pi r^2 \rho x$. Tomu odpovídá síla

$$F = -m_x g = -2\pi r^2 \rho g x = -kx.$$

Teď před námi stojí těžší úkol, musíme spočítat celkový objem vody. Výpočet nám trochu komplikuje tvar uuu-trubice. Rozdělme ji na celkem 6 přímých úseků a 5 půltorů (polovin toru). Bez odvození uvedeme vztah pro objem toru¹

$$V_{\text{torus}} = 2\pi^2 r^2 R,$$

kde v našem případě je hlavní poloměr kolen v trubici $R = 2r$. Objem jednoho kolena tak bude $V_k = 2\pi^2 r^3$. Přímé úseky uuu-trubice mají celkovou délku $56r$. Celkový objem vody potom vychází

$$V = 56r \cdot \pi r^2 + 5 \cdot 2\pi^2 r^3 = 2\pi(28 + 5\pi)r^3.$$

Hmotnost bude jednoduše $m = \rho V$. Po dosazení do rovnice (1) dostaneme pro periodu malých kmitů vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(28 + 5\pi)r}{g}}.$$

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

¹Vztah pro objem toru lze odvodit například z Guldinovy věty https://cs.wikipedia.org/wiki/Guldinovy_vety. Jiné odvození využívající Cavalieriho princip naleznete zde <http://whistleralley.com/torus/torus.htm>, nebo si jej můžete odvodit sami jako cvičení na integrály.