

Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

šestá brožurka k vám netradičně dorazí pouze internetově. Věříme ale, že když teď máte volno od školy, najdete si tím víc času na řešení FYKOSu. A jaké jsou úlohy tentokrát?

V šesté sérii budete napouštět vanu, vyvažovat ramínka na šaty nebo přemýšlet o světě Terryho Pratchetta (samozřejmě pouze nad knížkou). Prostě ideální úlohy na řešení z pohodlí domova. V rámci problémové úlohy budete vymýšlet alternativní vesmíry a experimentovat budete zase jednou v kuchyni – tentokrát s olejem. A ať si trochu odpočínáte, v seriálové úloze vám bude stačit řešení pouze odhadnout.

Organizátory zaskočila opatření z půlky března stejně jako vás. Soustředění se bohužel zrušilo a spolu s ním i spousta dalších akcí. Pokud jste se na něj těšili, nezuofejte – až to bude možné, uspořádáme alespoň nějakou víkendovku.

Přejeme hodně štěstí u maturit, ve fyzikální olympiádě, v matematické olympiádě, u přijímacích zkoušek na vysoké školy a na podobných akcích – snad se uskuteční dřív, než vám dojde příští brožurka.

Buďte zdraví a řešte FYKOS!

Organizátoři



Zadání VI. série

Termín uploadu: 28. 4. 2020 23.59

Termín odeslání: 27. 4. 2020

Úloha VI.1 ... gravitační urychlovač

3 body

Jakou energii v elektronvoltech by získal proton při pádu z nekonečna na povrch Země? Neuvažujte vliv jiných vesmírných těles.

Úloha VI.2 ... pod tlakem

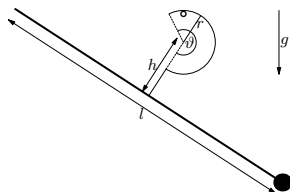
3 body

Ve vaně je napuštěna voda do výšky 15,0 cm. Špunt má tvar komolého kužele, který dokonale padne do otvoru ve dně (čili výška špuntu je stejná, jako tloušťka dna). Poloměry jeho podstav jsou 16,0 mm a 15,0 mm a jeho hmotnost je 11,0 g. Jakou silou působí dno vany na špunt? Předpokládejte, že v trubce pod ním je vzduch s atmosférickým tlakem.

Úloha VI.3 ... ověšená

5 bodů

Jak těžké závaží můžeme zavěsit na konec ramínka věšáku bez toho, aby se převrhl? Věšák je tvořen háčkem z velmi lehkého drátu, který je připevněn ke středu rovné dřevěné tyčky o délce $l = 30$ cm a o hmotnosti $m = 200$ g. Háček má tvar kružnicového oblouku s poloměrem $r = 2,5$ cm a s úhlovým rozpětím $\vartheta = 240^\circ$. Vzdálenost středu oblouku a středu tyčky je $h = 5$ cm. Veškeré tření zanedbejte.



Úloha VI.4 ... zděšené vlasy

7 bodů

Z radosti nad koncem zkouškového začaly Dance přibývat vlasy konstantní rychlostí. Po nějaké době si všimla, že jí jeden vypadl, a zděsila se. Čím více vlasů jí vypadlo, tím větší cítí stres a o to rychleji jí vypadávají další. Přesněji, rychlost vypadávání vlasů je přímo úměrná počtu již vypadnutých vlasů. Rychlost přibývání vlasů zůstává stejná. Opět nás zajímá, kdy Dance vypadne poslední vlas?

Úloha VI.5 ... nazlátlý sirup

10 bodů

Magické pole Zeměplochy je natolik silné, že v něm světlo úplně ztratí smysl pro rychlost. To ovšem platí pouze v blízkosti povrchu, kde má index lomu magického pole hodnotu $n_0 = 2,00 \cdot 10^6$. S rostoucí výškou h index lomu klesá podle vztahu $n(h) = n_0 e^{-kh}$, kde $k = 1,00 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$. Určete, pod jakým úhlem vůči svislému směru musíme z jednoho konce Zeměplochy vyslat světelný signál, aby na druhý konec dorazil v co nejkratším čase. Průměr disku Zeměplochy je $d = 15\,000 \text{ km}$ a rychlost světla ve vakuu je $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Úloha VI.P ... vesmír ve 4D

10 bodů

Pravděpodobně už jste slyšeli, že planety i libovolná jiná tělesa se v centrálním gravitačním poli pohybují po kuželosečkách (v případě Sluneční soustavy jsou to elipsy s malou výstředností). Prozkoumejte, jak by vypadaly trajektorie planet ve vesmíru, kde by gravitační síla závisela na převrácené třetí mocnině vzdálenosti místo na druhé.

Nápověda Může se vám hodit Binetův vzorec.

Úloha VI.E ... viskozita

12 bodů

Změřte dynamickou viskozitu dvou různých olejů Stokesovou metodou.

Úloha VI.S ... být Sibylou ze Sáby...

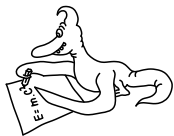
10 bodů

U všech částí této úlohy po vás chceme, abyste hodnoty následujících veličin alespoň řádově odhadli a svoje odhady náležitě zdůvodnili. Pokud byste někde našli správné hodnoty, můžete je uvést pro srovnání, ale samotné nebudou akceptované jako řešení. Hodnotit se bude především dobře popsany postup.

1. Jaký nejmenší objem potřebujeme k uchování 1 GB opakovaně čitelných informací při použití stávajících technologií?
2. Kolik uhlí spotřebuje ročně uhelná elektrárna, pokud má stálý elektrický výkon 100 MW?
3. Jak velké musí být těleso, aby dokázalo rozbít planetu podobnou Zemi na několik kusů tím, že do ní narazí?
4. Kolik energie celkem člověk „spotřebuje“ za celý život? Včetně jídla, dopravy a všech dalších vymožeností, které využívá.
5. Jak dlouho bychom museli svítit laserem na sirku, aby vzplála?

Bonus Co nejpřesněji odhadněte průměrný čas odeslání finální verze této úlohy přes webový upload FYKOSu. Řešení zasláná poštou neuvážíte. Určující čas je dle serveru.

Bonus II Připomínáme, že můžete získat body za korektury zadání a řešení úloh tohoto ročníku. Navíc můžete získat jeden bod za to, když ke svému řešení připojíte zpětnou vazbu k letošnímu seriálu. Přišla vám lepší forma ne-zcela navazujících témat? Chybělo vám něco, co bychom mohli dodatečně doplnit na web? Jaké téma byste chtěli v příštím ročníku?



Řešení V. série

Úloha V.1 ... vlak na mostě

3 body; průměr 2,87; řešilo 69 studentů

Na mostě dlouhém 300 m stojí nákladní vlak, jehož váha je rovnoměrně rozložena na plochu všech devíti ocelových pilířů mostu. Každý pilíř má podstavu tvaru čtverce se stranou $a = 2,0$ m a je vysoký $h = 10$ m. O kolik sa vlivem tíhy vlaku stlačí ocelové pilíře? Modul pružnosti oceli v tlaku je $E = 200$ GPa, celková hmotnost vlaku je $m = 574$ t.

Danka pozorovala vlaky z okna pokoje.

Nech Δh je zmena výšky každého piliera. Podľa Hookovho zákona platí

$$\sigma = E\varepsilon,$$

kde $\sigma = \frac{F}{S}$ je napätie v tlaku a $\varepsilon = \frac{\Delta h}{h}$ je relatívne skrátene.

Plocha jedného piliera je jednoducho $S_0 = a^2$. Počet pilierov označíme n , celkovo teda stláčame materiál o kolmom priereze $S = nS_0$. Celková tiažová sila, ktorou vlak pôsobí rovnomerne na všetky piliere, je $F = mg$. Z Hookovho zákona vyjadríme hľadanú zmenu výšky

$$\Delta h = \frac{Fh}{SE} = \frac{mgh}{na^2E} \doteq 7,8 \mu\text{m}.$$

Dostávame teda, že každý pilier sa vplyvom tiaže vlaku stlačí asi o $7,8 \mu\text{m}$.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha V.2 ... pohne se?

3 body; průměr 2,03; řešilo 64 studentů

Jáchym chce doma nakládat zelí, a tak si kúpil válcový sud. Z obchodu ho však musí niejak dostať metrom domú. Sud i s víkmi si môžeme predstaviť ako dutý valec s vnějším polomerom r a s vnějšou výškou h . Šírka stěn, podstavy i víka je t . Sud je vyrobený z materiálu s hustotou ρ . S jakým největším zrychlením se může souprava metra pohybovat, aby se volně stojící sud vůči ní nijak nepohnul? Koeficient tření mezi podlahou vagónu a sudem je f .

Dodo zase poslouchá Jáchymovy výmluvy.

Najprv si musíme rozmyslieť, ako sa môže sud uviesť do pohybu. Máme dve možnosti - buď sa začne šmýkať po podlahe, alebo sa prevrhne. Na sud pôsobia v neinerciálnej sústave vlaku tiažová sila $F_g = mg$ pôsobiaca v ťažisku zvislo nadol, sila zotrvačná $F_z = ma$, pôsobiaca v ťažisku vodorovne, a sila trecia F_t pôsobiaca v strede dotykovej plochy vo vodorovnom smere. Ťažisko dutého valca sa nachádza v jeho strede.

Aby sa sud nehýbal, musí byť výsledná sila vo vodorovnom smere nulová. Musí teda platiť

$$ma \leq F_t = fmg,$$

kde sme použili podmienku statického trenia. Po zjednodušení dostávame $a \leq fg$. Ak táto podmienka nie je splnená, sud sa začne šmýkať dozadu.

Aby sa sud neprevrhol, musí byť výsledný moment síl pôsobiaci na sud nulový. Ak výslednica zotrvačnej a tiažovej sily smeruje do podstavy, reakčná sila podložky tento moment vykompenzuje. Problém nastane v okamihu, keď začne výslednica pôsobiť smerom k okraju podstavy. Pre väčšiu zotrvačnú silu, a teda vyššie zrýchlenie metra, sa sud prevrhne. Pre tento hraničný stav máme z podobnosti trojuholníkov

$$\frac{a}{g} = \frac{2r}{h}.$$

Pro zachování stability sudu tak platí

$$a \leq \frac{2r}{h}g.$$

Sud sa teda prevrhne pri menšom z dvojice spočítaných zrýchlení. Všimnime si, že veľkosť tohto zrýchlenia nezávisí na hustote ani hrúbke stien sudu a bola by rovnaká aj pre sud plný kapusty.

Jozef Lipták

liptak.j@fykos.cz

Úloha V.3 ... Matějova vysněná koule 6 bodů; průměr 2,34; řešilo 53 studentů

Přesně na hraně stolu leží homogenní koule o poloměru r . Jelikož je to „polovratká“ poloha, začne koule padat ze stolu. Na jakou úhlovou rychlost se roztočí? Předpokládejte, že koule neprokluzuje. Matějovi se ztratil tenisák.

Jakmile koule začne padat, začne se roztáčet okolo bodu dotyku se stolem (tedy přesně na hraně stolu). V určitém okamžiku ale odstředivá síla převáží a koule se od stolu oddělí a dál se bude od stolu vzdalovat. To může nastat ještě předtím, než se otočí o 90° . Úhel, o který se koule pootočí kolem hrany stolu vůči původní poloze, označme φ .

Budeme se zabývat situací před oddělením koule od stolu. Jelikož je tření dostatečně velké, můžeme vyjít ze zákona zachování energie.¹ Změna potenciální energie při náklonu o úhel φ je

$$\Delta E = mgr(1 - \cos \varphi).$$

Kinetická energie koule otáčející se kolem bodu na jejím povrchu je

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{7}{10}mr^2\omega^2,$$

kde ω je úhlová rychlost a J je moment setrvačnosti vůči bodu otáčení, který jsme spočítali pomocí Steinerovy věty

$$J = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2.$$

Z rovnosti energií můžeme vyjádřit vztah mezi úhlem náklonu φ a úhlovou rychlostí

$$\omega = \sqrt{\frac{10g}{7r}(1 - \cos \varphi)}.$$

¹Energie se nikde neztrácí, nic neprokluzuje ani nedochází k žádným nepružným srážkám.

Koule se odpojí ve chvíli, kdy odstředivé zrychlení $r\omega^2$ překoná dostředivé zrychlení způsobené složkou tíhového zrychlení $g \cos \varphi$. Z rovnosti zrychlení dostáváme

$$g \cos \varphi = r\omega^2 = \frac{10g}{7} (1 - \cos \varphi) ,$$

$$\cos \varphi = \frac{10}{17} .$$

Dosazením do vztahu pro ω už snadno spočítáme úhlovou rychlost v okamžiku odpojení

$$\omega = \sqrt{\frac{10g}{17r}} .$$

Tato úhlová rychlost kouli zůstane po celou dobu pádu, protože na ní už nebude působit žádný další moment sil.

Matěj Mezera

m.mezera@fykos.cz

Úloha V.4 ... podivná smyčka

7 bodů; průměr 1,60; řešilo 30 studentů

Kruhová kovová smyčka s poloměrem $r = 15$ cm má hmotnost $m = 18$ g. Pokud bychom ji rozstřihli, vznikl by drát s odporem $R = 3,5$ m Ω . Na počátku je smyčka v klidu. V čase $t = 0$ zapneme homogenní magnetické pole kolmé k rovině smyčky s časovým průběhem $B(t) = \alpha t$, kde $\alpha = 1$ mT \cdot s $^{-1}$ je konstanta. Smyčka se v důsledku přítomnosti nestacionárního magnetického pole začne nepatrně otáčet kolem své osy. Určete velikost úhlové rychlosti ω v čase $t = 0,1$ s. Deformaci smyčky neuvažujte. Vašek se rád zabývá bizarními jevy.

Úloha je obtížná především tím, že není na první pohled zřejmý mechanismus roztáčení smyčky. Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce se ve smyčce indukuje elektrický proud, který je realizován tokem elektronů nesoucích záporný náboj. Tok těchto elektronů má vůči ose smyčky nenulový moment hybnosti. Vzhledem k tomu, že výsledný moment síly elektromagnetického pole od zdroje působící na smyčku vůči její ose je nulový, zachovává se nulová hodnota celkového momentu hybnosti smyčky vůči její ose. Nenulový moment hybnosti vodivostních elektronů je proto kompenzován momentem hybnosti smyčky, což znamená, že se smyčka začne otáčet.

Přesvědčme se, že je výsledný moment síly elektromagnetického pole od zdroje působící na smyčku vůči její ose nulový. Nestacionární magnetické pole zdroje generuje elektrické pole, které se na smyčce projevuje jako indukované napětí, což vyplývá z Faradayova zákona elektromagnetické indukce. Toto elektrické pole má nulovou tangenciální složku, a proto na nabitě částice smyčky bude působit nenulový moment síly. V elektricky neutrální smyčce je však stejné množství záporného a kladného náboje, které jsou makroskopicky stejně prostově rozloženy. Moment síly elektrického pole zdroje je nulový. Jakmile smyčkou začne protékat elektrický proud, působí na smyčku v daném místě magnetická síla kolmá na směr elektrického proudu a na směr magnetické pole. Magnetická síla je proto v daném místě radiální a dává nulový příspěvek k silovému momentu. Efekt magnetické síly se vyruší až pro celou smyčku, neboť na opačných stranách smyčky má magnetická síla opačnou orientaci. Poznamenejme na tomto místě, že magnetická síla, která je v daném místě smyčky radiální, má snahu smyčku deformovat, a to tak, že změní její poloměr. Tento efekt je i v naší úloze zanedbatelný.

Nyní provedeme výpočet. Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce se na smyčce indukuje elektrické napětí U dané časovou změnou toku Φ magnetického pole smyčkou o velikosti

$$U = \frac{d\Phi}{dt} = S \frac{dB}{dt}, \quad (1)$$

kde S je plocha části roviny ohraničené smyčkou. Tímto napětím U rozumíme změnu elektrického potenciálu při jednom oběhu smyčky. Podle Ohmova zákona bude smyčkou procházet elektrický proud

$$I = \frac{U}{R}. \quad (2)$$

Označme N počet volných (vodivostních) elektronů ve smyčce. Proud I je roven velikosti náboje, který proteče průřezem smyčky za jednotku času, neboli

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{Nev}{l}, \quad (3)$$

kde e je elementární náboj, v je driftová (střední) rychlost elektronů tvořících elektrický proud a l značí délku smyčky (její obvod). Dosazením elektrického proudu I (rovnice (3)) do Ohmova zákona (rovnice (2)) a úpravou dostaneme vztah pro napětí U ,

$$U = \frac{NRev}{l}. \quad (4)$$

Srovnáním napětí ze vztahu (1) se vztahem (4) a opět jednoduchou úpravou dostáváme rovnost

$$Nv = \frac{Sl}{Re} \frac{dB}{dt}. \quad (5)$$

Velikost momentu hybnosti L vodivostních elektronů ve smyčce je rovna

$$L = Nm_evr,$$

kde m_e je hmotnost elektronu. Po dosazení z rovnice (5) dostáváme

$$L = \frac{Slm_e r}{Re} \frac{dB}{dt}.$$

Na smyčku působí nulový výsledný moment síly, a proto se celkový moment hybnosti zachovává. Na počátku byl moment hybnosti smyčky vzhledem k ose smyčky nulový, a proto je moment hybnosti vodivostních elektronů kompenzován stejně velkým, opačně orientovaným momentem hybnosti otáčející se smyčky. Velikost momentu hybnosti L' smyčky je rovna

$$L' = m\omega r^2.$$

Srovnáním velikosti momentu hybnosti smyčky a vodivostních elektronů vzhledem k ose smyčky dostáváme rovnost

$$\frac{Slm_e r}{Re} \frac{dB}{dt} = m\omega r^2.$$

Odtud pro velikost úhlové rychlosti ω platí

$$\omega = \frac{Slm_e}{mRe r} \frac{dB}{dt}.$$

Časová změna proudu je v našem případě rovna

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d(\alpha t)}{dt} = \alpha.$$

Plocha S je rovna $S = \pi r^2$ a délka l smyčky je rovna $l = 2\pi r$. Pro velikost úhlové rychlosti v libovolném čase (a tedy i v čase $t = 0,1$ s) dostáváme vztah

$$\omega = \frac{2\pi^2 r^2 \alpha m_e}{m R e}.$$

Po číselném dosazení hodnot ze zadání a fyzikálních konstant dostáváme číselný výsledek

$$\omega = 4,0 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1}.$$

Uvědomme si ještě, že při výpočtu jsme zanedbali elektrický proud tvořený otáčením kladně nabitě smyčky. Tento proud je však vzhledem k poměru hmotnosti smyčky a vodivostních elektronů asi o 4 řády menší než proud elektronů.

Dodejme ještě poznámku pro pokročilé. Tvrzení na začátku řešení o zachování momentu hybnosti smyčky není správně odůvodněno. Vysvětlíme proč. Samotné elektromagnetické pole nese hybnost (v teorii elektromagnetismu se používá hustota hybnosti elektromagnetického pole v daném místě), a proto má také moment hybnosti vzhledem ke vztažné ose. Potom to, co se v naší úloze ve skutečnosti zachovává, je celkový moment hybnosti smyčky a elektromagnetického pole generovaného proudem ve smyčce. Z výpočtu výše plyne, že elektrický proud je v naší úloze konstantní. Tomu odpovídá stacionární magnetické pole, které negeneruje netriviální elektrické pole. A až fakt, že samotné magnetické pole bez pole elektrického má nulovou hybnost, nás ospravedlňuje tvrdit, že je moment hybnosti smyčky konstantní.

Václav Mikeska

v.mikeska@fykos.cz

Úloha V.5 ... opticko-relativistická

9 bodů; průměr 3,71; řešilo 21 studentů

Určete, jaký fázový posun $\Delta\Phi$ vznikne přechodem laserového svazku s vlnovou délkou λ_0 přes skleněnou desku s klidovou tloušťkou h a s indexem lomu n , která se pohybuje ve směru svazku rovnoměrně rychlostí v , oproti případu, kdy je deska vůči zdroji i pozorovateli v klidu. Zajímá nás především první nenulový člen rozvoje podle rychlosti desky. *Dodo a optické praktikum.*

Najprv si treba rozmyslieť, akým spôsobom sa daný experiment na meranie fázového posuvu dá realizovať. Majme pevný zdroj laserového (tj. koherentného a monochromatického) svetla a voči nemu nepohyblivý detektor. Medzi ne vložíme sklenenú dosku. Keď s doskou začneme pohybovať, daná fáza vlnenia bude prichádzať do zdroja v o trochu posunutom čase. Tento posun označme $\Delta\tau$. Fázový posun potom určíme jednoducho ako

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi c \Delta\tau}{\lambda_0}.$$

Nech sa doska pohybuje od zdroja. V okamihu vniku sledovanej fázy svetelnej vlny do dosky položíme

$$\begin{aligned} t_0 &= t'_0 = 0, \\ x_0 &= x'_0 = 0, \end{aligned}$$

kde čiarokované, resp. nečiarokované veličiny popisujú čas a polohu v inerciálnej sústave spojenej s rovnomerne sa pohybujúcou doskou, resp. v inerciálnej sústave spojenej so zdrojom.

V okamihu opustenia skla bude svetlo v sústave spojenej so sklom mať súradnice

$$(t', x') = \left(\frac{nh}{c}, h \right),$$

keďže v skle sa svetlo pohybuje rýchlosťou $v = c/n$. Toto môžeme pomocou inverznej Lorentzovej transformácie previesť na čas a polohu v sústave spojenej so zdrojom

$$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) = \gamma \left(\frac{nh}{c} + \frac{vh}{c^2} \right),$$

$$x = \gamma (x' + vt') = \gamma \left(h + \frac{vnh}{c} \right),$$

kde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ je Lorentzov faktor.

Určme najprv časový posun medzi lúčom, ktorý prechádza pohybujúcou sa doskou, a lúčom, ktorý doskou vôbec neprechádza (napr. realizujeme paralelne ďalší experiment). Je zrejmé, že stačí tento posun určiť v mieste výstupu prvého lúča z dosky, keďže ďalej vo vákuu zostáva tento rozdiel stály. V mieste x bude druhý lúč v čase

$$t_2 = \frac{x}{c} = \frac{\gamma}{c} (x' + vt') = \gamma \left(\frac{h}{c} + \frac{vnh}{c^2} \right).$$

Rozdiel času prechodu detektorom bude

$$\begin{aligned} \Delta t(v) &= t - t_2 = \gamma \left(\frac{nh}{c} + \frac{vh}{c^2} \right) - \gamma \left(\frac{h}{c} + \frac{vnh}{c^2} \right) = \frac{\gamma h}{c} \left(n + \frac{v}{c} - 1 - \frac{vn}{c} \right) = \\ &= \frac{\gamma h}{c} (n - 1) \left(1 - \frac{v}{c} \right). \end{aligned}$$

Otázka sa pýta na rozdiel medzi pohybujúcou sa a statickou doskou, teda

$$\begin{aligned} \Delta \tau &= \Delta t(v) - \Delta t(0) = \frac{\gamma h}{c} (n - 1) \left(1 - \frac{v}{c} \right) - \frac{h}{c} (n - 1) = \frac{h}{c} (n - 1) \left(\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \right) - 1 \right) = \\ &= \frac{h}{c} (n - 1) \left(\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Pre výsledný fázový rozdiel potom dostávame

$$\Delta \Phi = \frac{2\pi h (n - 1)}{\lambda_0} \left(\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} - 1 \right).$$

Môžeme vidieť, že spĺňa rozumné predpoklady, ktoré na výsledok kladieme – je úmerný hrúbke dosky a je nulový pre $v = 0$ (nepohyblivú dosku) a pre $n = 1$ (dosku z vákuua). Na záver vykonáme rozvoj v premennej v/c . Pre funkciu

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$

môžeme napísať Taylorov rad

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = 1 + \frac{-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{1+x} \Bigg|_{x=0} x + O(x^2) =$$

$$= 1 - x + O(x^2) \approx 1 - x.$$

Teraz už iba dosadíme do vzťahu pre fázový rozdiel

$$\Delta\Phi \approx -\frac{2\pi h\nu(n-1)}{\lambda_0 c}.$$

Jedná sa teda o efekt prvého rádu, ktorý by dokonca mohol byť pozorovateľný. Pre pohyb dosky s hrúbkou rádo vo decimetroch rýchlosťou v jednotkách metrov za sekundu a pre UV laser dostávame hodnotu fázového posunu v ráde 10^{-2} . V praktickej realizácii ale budú asi prevažovať ostatné vplyvy nedokonalosti dosky a disperzia jej indexu lomu. V doske má totiž svetlo vlnovú dĺžku posunutú Dopplerovým javom (v sústave spojennej s doskou, v ktorej sa popisuje interakcia svetla s látkou, ktorá dáva vznik indexu lomu) a na tejto inej vlnovej dĺžke teda môže byť o trochu iný index lomu.

Jozef Lipták

liptak.j@fykos.cz

Úloha V.P ... budiž svetlo

10 bodů; průměr 8,69; řešilo 29 studentů

Odhadněte čas, který uplyne mezi stlačením vypínače a rozsvícením světelného zdroje. Zvlášť vyřešte pro žárovku, zářivku, LED a neonovou trubici. Diskutujte co nejmíc faktorů, které tento čas ovlivňují.

Dodo vyhodil jističe.

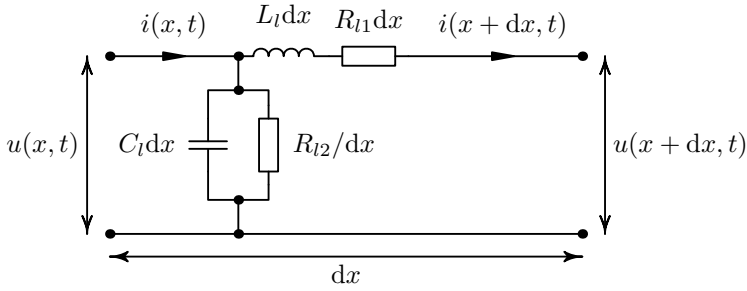
To, ako rýchlo sa rozsvieti svetelný zdroj od stlačenia vypínača, závisí na dvoch základných dejoch:

- ako rýchlo sa preniesie informácia o zopnutí obvodu do svetelného zdroja,
- ako rýchlo je svetelný zdroj schopný premeniť elektrickú energiu na svetlo.

Pri prenose informácie je dôležité uvedomiť si, čo to je a ako sa to šíri. Svetelný zdroj potrebuje pre svoju činnosť energiu, ktorú sme do teraz nazývali informáciou o zopnutí. Energia sa v elektrických obvodoch šíri prostredníctvom elektromagnetického poľa. Nesprávnou úvahou by bolo skúmať rýchlosť šírenia samotných elektrónov, musíme skúmať rýchlosť šírenia elektromagnetickej vlny vo vedení.

Prenosová sústava

Uvažujme, že vypínač je spojený so svetelným zdrojom prostredníctvom homogénneho vedenia. Takéto vedenie má rovnaké vlastnosti po celej svojej dĺžke a jednotlivé druhy energie elektromagnetického poľa sú spojito rozprestreté pozdĺž jeho vodičov. Elementárny úsek jeho náhradného zapojenia je znázornený na obrázku 1. Ide o element celkovej dĺžky vedenia dx , kde C_l je merná kapacita, L_l je merná indukcia a R_{l1}, R_{l2} je merný odpor vedenia. Veličiny L_l a R_{l1} sú merané pozdĺž vedenia a sú vzťahované na jednotkovú dĺžku, zatiaľ čo C_l a R_{l2} sú merané priečne a tiež sú vzťahované na jednotkovú dĺžku vodiča. Avšak odpor R_{l2} je potrebné deliť dĺžkou elementu



Obr. 1: Schéma obvodu.

(pri nulovej dĺžke by bol zrejme priečný odpor nekonečný, jednotka R_{l2} je $\Omega \cdot \text{m}$ narozdiel od klasického dĺžkového odporu).

Obvodové veličiny vo vedení sú funkciami času t a pozdĺžnej vzdialenosti x . Pomocou Kirchhoffových zákonov dostávame pre element vedenia nasledujúce vzťahy

$$u(x, t) = i(x + dx, t)R_{l1}dx + \frac{\partial i(x + dx, t)}{\partial t}L_l dx + u(x + dx, t),$$

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + \frac{u(x, t)}{R_{l2}}dx + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}C_l dx.$$

Uvažovaním limity

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

a analogicky pre prúd, dostávame základné rovnice vedenia

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_{l1}i + L_l \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= \frac{u}{R_{l2}} + C_l \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

Ich deriváciou a vzájomnou elimináciou premenných získavame vlnovú rovnicu napätia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_l C_l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(\frac{L_l}{R_{l2}} + C_l R_{l1} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{R_{l1}}{R_{l2}} u.$$

Keďže skúmame vlastnosti vedenia z časového hľadiska, zaujímajú nás predovšetkým časovo zotrvačné vlastnosti ako sú kapacita a indukčnosť (prvky C_l a L_l). Pre zjednodušenie preto môžeme uvažovať bezstratové vedenie a rezistivitu v pozdĺžnom smere vodiča položiť rovnú nule ($R_{l1} = 0$). Ďalej uvažujeme, že priečna rezistivita je veľmi veľká ($R_{l2} \rightarrow \infty$), inak by si priečna kapacita v rovniciach nezahrála. Potom dostávame vzťah

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_l C_l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &\Rightarrow \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} = \frac{1}{L_l C_l}, \\ \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}} = v, \end{aligned}$$

kde v je rýchlosť šírenia elektromagnetickej vlny vodičom. Zaujíma nás, aký odpor kladie vedenie (vodič) pohybu elektromagnetickej vlny. Môžeme preto písať $L = \tilde{\mu}_r \mu_0$ a $C = \tilde{\epsilon}_r \epsilon_0$, kde $\tilde{\mu}_r$ je relatívna permeabilita a $\tilde{\epsilon}_r$ je relatívna permitivita vedenia. Sú to číselné faktory závislé na geometrii a materiáli konkrétneho vedenia. Dosadením získame

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}_r \mu_0 \cdot \tilde{\epsilon}_r \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\tilde{\mu}_r \tilde{\epsilon}_r}}.$$

Zistili sme, že rýchlosť v závisí iba na relatívnej permeabilite a permitivite vodiča a platí $v \leq c$. Z elektrotechnickej praxe je známe, že v dobrých vodičoch sa signál šíri rýchlosťou $0.9c$ a v horších vodičoch $0.8c$.² Taktiež platí, že pri dostatočne vysokých frekvenciách sa kapacitory začínajú správať ako rozpojené obvody a indukty ako skraty. V takýchto prípadoch sa so zvyšujúcou frekvenciou bude rýchlosť v limitne blížiť c .

Uvažujme bežný vodič s rýchlosťou šírenia $v = 0.85c$ a typické sieťové napätie o frekvencii 50 Hz. Pri takto malej frekvencii môžeme jej účinky na rýchlosť šírenia elektromagnetickej vlny zanedbať. Čas potrebný pre prenos informácie o zopnutí obvodu do svetelného zdroja je $t = \frac{l}{0.85c}$, kde l je dĺžka vedenia a c je rýchlosť svetla vo vákuu. Pre dĺžku vodiča 10 m dostávame odchýlku $t = 3,9 \cdot 10^{-9}$ s, teda rádovo nanosekundy.

Svetelné zdroje

Žiarovka je jednoduchý svetelný zdroj, ktorý emituje svetlo rozžeravením odporovej špirály umiestnenej vo vákuu alebo inertnom plyne. V tomto prípade má skutočne zmysel hovoriť o čase ohrevu (angl. heating-time). Ten závisí na konkrétnej technológii výroby žiarovky, menovite na realizácii tvaru a materiálu odporovej špirály. Keďže žiarovka sa v čase rozsvetuje plynulo, za rozsvietený stav sa bežne považuje dosiahnutie 90 % svietivosti. Z technickej dokumentácie rôznych výrobcov je možné dohľadať, že žiarovky rôznych typov dosahujú 90 % svojej svietivosti v časovom intervale 0,05 s až 0,7 s.³ Žiarovky vyšších výkonov majú tendenciu potrebovať dlhší čas ohrevu.

Žiarivka patrí medzi nízkotlaké výbojky a funguje na princípe fluorescencie. Elektrický prúd tečie vnútri žiarivky vzlácnym plynom s parami ortute. Dochádza pritom k ich excitácii a vyžarovaniu krátkovlnného ultrafialového žiarenia. To dopadá na fosforový plášť, na ktorom dochádza k excitácii viditeľného svetla. Tieto zdroje svetla potrebujú pre svoju funkčnosť štartér, ktorý je priamou súčasťou zariadenia. Jeho úlohou je po zopnutí napájania žiarivky zabezpečiť vznik a udržanie toku elektrického prúdu plynom. Práve táto súčiastka spôsobuje skúmané časové zdržanie. Na základe jeho veľkosti môžeme štartéry rozdeliť do troch skupín:

1. Mechanické štartéry často využívajú bimetalový pásik, ktorý pre štart žiarovky potrebuje niekoľko cyklov. Tie môžeme pozorovať po zopnutí ako po sebe nasledujúcu sériu zábleskov doprevádzanú autentickým zvukovým efektom. Tento druh štartéra sa v súčasnosti používa len zriedka a pre štart potrebuje rádovo jednotky sekúnd. Tento čas závisí na druhu bimetalu, veku štartéra a celkovej technickej kondícii žiarivky.
2. Elektronické predradníky sú rôzne druhy zapojení aktívnej elektroniky zabezpečujúce funkčnosť žiariviek. Medzi najpoužívanejšie patria polo-rezonančný predradník, quick-

² William D. Walker: *Superluminal Propagation Speed of Longitudinally Oscillating Electrical Fields, Causality and Locality in Modern Physics*, Springer Netherlands, 1998

³ Dulli Agrawal: *Heating-times of tungsten filament incandescent lamps*, World News of Natural Sciences, Vol. 15 11/2017 dostupné online https://www.researchgate.net/publication/320835572_Heating-times_of_tungsten_filament_incandescent_lamps

start predradník alebo rapid-start predradník. Ich spoločnou vlastnosťou je dĺžka štartu blízko (no stále pod) hranicou jednej sekundy.

- Instant-start predradník patrí medzi štandardné elektronické predradníky, no odlišuje sa od nich veľmi rýchlym štartom. Elektrický prúd žiarivkou je stabilizovaný už po prvých desatinách sekundy.

Neónová trubica je druh nízkotlakej výbojky, ktorý používa ako vzácny plyn neón. So žiarivkou zdieľa spôsob štartu a platia pre ňu vyššie diskutované časové vlastnosti žiaroviek. Dôležité je nesplieť si neónovú trubicu s neónovou lampou - tlejivkou. Tá nepotrebuje štartovací obvod a pracuje na inom princípe.

LED svetidlá sú moderným zdrojom svetla. Jedná sa o polovodičové súčiastky využívajúce jav elektroluminiscencie. Kvalitné LED sú veľmi rýchle a dokážu operovať vo frekvenciách až 50 Mhz. Čipy používané vo väčšine bežných svetidiel sú ale pomalšie a dokážu pracovať v oblasti 1 MHz až 5 MHz. Ich reakčný čas sú preto jednotky mikrosekúnd. V praxi sa však LED nepripájajú na rozvodnú sieť priamo, ale prostredníctvom ovládača. Na trhu existuje množstvo variánt tejto elektroniky od jednoduchých zapojení pasívnych súčiastok až po integrované čipy. Čas potrebný pre inicializáciu takéhoto obvodu sa môže pohybovať od stotín až po desatiny sekundy.

Vo všetkých vyššie uvedených zdrojoch svetla je rozumné uvažovať aj priebeh sieťového napätia v čase ich zopnutia. To má sínusový priebeh o frekvencii 50 Hz, no vyššie popísané zdroje svetla a ich ovládače nerozlišujú svojou technickou realizáciou kladnú a zápornú polvlnu. Môžeme preto uvažovať sieťové napätie zložené z kladných polvln o frekvencii 100 Hz. Ak zopneme vypínač v momente, kedy je priebeh napätia mimo blízkeho okolia amplitúdy, prejaví sa to na svetelnom zdroji ako časové zdržanie. Vlákno žiaroviek sa nestihne dostatočne rozžhaviť a riadiaca elektronika štartérov nedobije kapacity na potrebnú úroveň. Tieto chyby sa však napravia hneď na ďalšej polvlně. Ak uvažujeme funkčnú oblasť okolo amplitúdy ako $\frac{1}{3}$ z dĺžky periódy, môžeme hovoriť o časovom oneskorení až $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{100 \text{ Hz}} \doteq 6,7 \text{ ms}$.

Záver

Elektromagnetická vlna je nosičom energie pre svetelný zdroj a vedením sa pohybuje rýchlosťou blízkou rýchlosti svetla. Takto spôsobené oneskorenie je typicky v nanosekundách. Pridáva sa k nemu oneskorenie spôsobené priebehom sieťového napätia v momente zopnutia intervale 0 – 0,006 s. Napokon prichádza v úvahu rýchlosť samotného svetelného zdroja. Tu to veľmi závisí na jeho druhu a technickej realizácii. Oneskorenie môže byť v rozsahu od pár milisekúnd (LED) až po niekoľko sekúnd (žiarivka).

Filip Geib
geib@fykos.cz

Úloha V.E ... nenaolejuje-li Jáchym, naolejuje Matěj 12 bodů; průměr 7,50;
řešilo 38 studentů

Změřte závislost teploty kapaliny v otevřeném hrnku na čase. Jako kapalinu použijte nejdříve vodu, potom olej a nakonec vodu s malou vrstvou oleje na povrchu. Vrstva by měla být co nejtenčí, ale zároveň musí pokrývat celý povrch vody. Měřte v rozsahu od 90 °C do 50 °C. Dávejte pozor na to, aby veškeré podmínky byly při všech experimentech stejné (použijte stejný hrnek se stejnou počáteční teplotou, teploměr ponechte celou dobu v kapalině pokaždé na stejném

místě atd.). Popište co nejlépe experimentální aparaturu, srovnajte chladnutí v jednotlivých případech a výsledky diskutujte.

Karel měl v tropickém vedru horkou polévku v přehřáté misce.

Teoretický úvod

Teplotu můžeme pro běžné tělesa v našem okolí charakterizovat jako istú mieru pohybu častíc v látke. Čím vyššia teplota, tým viac sa častice v látke pohybujú. Chladnutie telesa môže mať niekoľko príčin. Teplo sa vo všeobecnosti šíri vedením, žiarením alebo prúdením. Pri vedení sa povrchy s rozdielnou teplotou navzájom dotýkajú, a tak si častice postupne vymieňajú kinetickú energiu, čo pozorujeme ako ohrievanie chladnejšieho materiálu a chladnutie teplejšieho. Táto tepelná energia sa šíri látkou ďalej. Pri žiarení sa pri bežných teplotách uvoľňuje tepelná energia hlavne ako infračervené žiarenie, ktoré odnáša zo systému energiu pomocou fotónov. Pri prúdení sa oblasti kvapaliny alebo plynnej látky navzájom miešajú a tým postupne dochádza k rovnomernému rozptýleniu tepelnej energie.

Ďalším javom, ktorý sa podieľa na zmene teploty telesa, je aj skupenská premena. Pri vyparovaní sa spotrebuje veľké množstvo energie na premenu kvapaliny na plyn. Tým sa daná kvapalina ochladí.

Najpomalší pokles teploty tak očakávame pri vode s vrstvou oleja. Odparovanie vody spôsobí, že voda samotná sa kvôli efektu vyparovania svojou krivkou viac priblíži chladnutia oleja, ktorý obsahuje najmenej tepelnej energie.

Popis experimentu

Našou úlohou bolo sledovanie teploty sústavy hrnčeka spolu s určitou kvapalinou. Zo zadania sme pre náš experiment použili keramický hrnček s valcovým tvarom. Hrnček sme mali umiestnený na kuchynskej doske, materiálové vlastnosti podložky môžeme odhadovať ako blízke drevu. Hmotnosť a rozmery hrnčeka sme zmerali pomocou digitálnych váh, resp. šuplery. Teplotu sme merali pomocou aplikácie Logger Lite a pomocou senzora STS-BTA Vernier s presnosťou (v nami sledovanom rozsahu) 0,4 °C. Períodu jedného merania sme nastavili na 5 sekúnd. Keďže samotný hrnček má pomerne vysokú tepelnú kapacitu, zohriali sme ho najprv naliatím kvapaliny, až potom sme kvapaliny vymenili a prebehlo meranie. Vodu sme zohrievali v rýchlovarnej kanvici. Použitý bol repkový olej, ktorý sme zohrievali na plynovom sporáku, jeho teplotu sme kontrolovali pomocou teplotného senzora počas zahrievania. Použili sme približne rovnaké množstvo jednotlivých tekutín (teda nalievali sme plný hrnček).

Výsledky merania

V tabuľke 1 máme dôležité údaje k meraniu, tabuľka 2 obsahuje parametre hrnčeka. Všimnime si, že kým hustoty vody a oleja sú si relatívne podobné, tak merné tepelné kapacity sa značne líšia. Preto istý objem oleja obsahuje ani nie polovicu tepelnej energie rovnakého objemu vody. Výsledná závislosť teploty od času je znázornená v grafe 2

Diskusia

Samotné tabuľky s hodnotami nám vedú povedať zopár zaujímavých údajov. Celková kapacita sústav (tekutina a hrnček) sa v prípade oleja od sústav s vodou výrazne líši. Kapacita sústavy oleja je približne o 40 % nižšia oproti ostatným dvom.

Tab. 1: Laboratorné podmienky a konštanty. Vlastnosti vody resp. oleja sa vzťahujú k teplote 70 °C.

Teplota vzduchu	$(21,1 \pm 0,2)$ °C
Tlak vzduchu	(930 ± 2) hPa
Vlhkosť vzduchu	(41 ± 1) %
Hustota vody	(998 ± 1) kg·m ⁻³
Hustota repkového oleja	(916 ± 1) kg·m ⁻³
Merná tepelná kapacita vody	4190 J·kg ⁻¹ ·K ⁻¹
Merná tepelná kapacita oleja	2050 J·kg ⁻¹ ·K ⁻¹

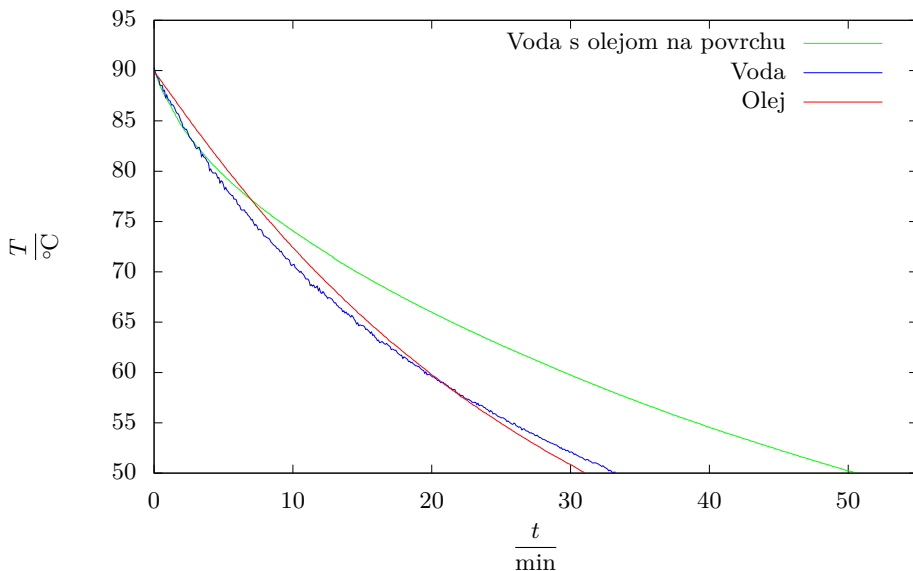
Tab. 2: Parametre hrnčeka.

Výška	(97 ± 1) mm
Hrúbka steny v strede hrnčeka	$(7,4 \pm 0,1)$ mm
Vonkajší priemer podstavy hrnčeka	(83 ± 1) mm
Hmotnosť	$(414,10 \pm 0,02)$ g
Merná tepelná kapacita keramiky (70 °C)	850 J·kg ⁻¹ ·K ⁻¹
Objem použitých tekutín	(300 ± 5) cm ³
Kapacita vody s hrnčekom	1609 J·K ⁻¹
Kapacita oleja s hrnčekom	915 J·K ⁻¹

Keď sa pozrieme na priebeh funkcií jednotlivých teplôt, môžeme si všimnúť, že samotná voda a voda s olejom sa správajú na začiatku merania relatívne podobne, čo je dosť neintuitívne. Pri nezávislom pozorovaní správania sa tekutín sme si všimli, že rozdiel teploty medzi povrchom a dolnou časťou tekutiny v hrnčeku pri vyšších, ale aj nižších teplotách, dosahoval niekoľko stupňov, čo skreslovalo celkový obraz o množstve tepelnej energie v sústave. Aj preto bola nutná podmienka jedného statického miesta merania. Pri položení na studenú dosku tekutina vie rýchlejšie strácať teplo v počiatočnej fáze práve cez veľký rozdiel teplôt vedením. V tomto prípade sú podstatné vlastnosti väčšiny tekutiny v hrnčeku, teda vody. Táto podobnosť kriviek chladnutia trvala približne prvých 5 minút merania, pravdepodobne kým sa ustanovil stacionárny stav rozloženia teplôt v blízkom okolí hrnčeka. V sústave s čistým olejom bol rozdiel medzi dnom a vrchom hrnčeka veľký, a teda počiatočné odoberanie tepla bolo menšie. Faktor, ktorý pravdepodobne tiež zohral rolu, bolo aj nie úplne dokonalé zohriatie hrnčeka, ktorý sám mohol odoberať teplo inak v rôznych prípadoch.

Ak si pozrieme bližšie krivku vody, tak môžeme vidieť, že jednotlivé merania, ktoré sú pri sebe, majú často rozdielne hodnoty. Tieto odchýlky sú síce v rámci systematickej chyby prístroja a môžeme ich pokojne zanedbať, avšak pravdepodobne za nimi stojí buď nedokonalý kontakt v meriacom zariadení pri danom meraní, alebo istý typ mikroprúdenia v tekutine vytvorený rôznymi teplotami v tekutine. Preto pozorujeme isté rozdiely po 5 sekundách nášho vzorkovania. Je potrebné mať ďalej na pamäti aj zmenšovanie objemu vody v hrnčeku odparovaním. Pri vode s olejom sme to nepozorovali, keďže z povrchu sa významne neodparovalo.

Počas väčšiny času merania sa však sústava s vodou správala podobne ako sústava s olejom. To môžeme vysvetliť tým, že olej má síce menšiu tepelnú kapacitu, ale zase, ako už bolo spomenuté, stráca menej energie vyparovaním. Najpomalšie chladla voda s olejom na povrchu,



Obr. 2: Závislost teploty jednotlivých tekutin na čase

ktorá kombinuje veľkú tepelnú kapacitu vody s malými stratami vypracovaním vďaka oleju.

Nutnou pripomienkou je ešte aj to, že jednotlivé hodnoty uvedené v tabuľkách sú poväčšine stredné hodnoty, keďže veličiny ako napríklad merná teplotná kapacita oleja sa s teplotou výrazne menia. To platí aj pre keramické materiály.

Záver

Z pozorovaných vzoriek najpomalšie chladne voda s olejom na povrchu. Voda a olej v tomto rozmedzí chladnú približne rovnako rýchlo, avšak pre iný hrniec a iné podmienky merania sa môžu líšiť. V našom meraní sa tak teploty zmenili z 90°C na 50°C pre olej za 31 minút, vodu za 33 minút a vodu s olejom na povrchu za 51 minút.

Ivan Hudák
hudakivan@fykos.cz

Úloha V.S ... mini a maxi

10 bodů; průměr 4,52; řešilo 44 studentů

1. Máme PET lahev s vodou, která stojí na nekonečné rovině. V jaké výšce bychom měli vytvořit v lahvi malý otvor, aby voda dostříkla co nejdále od lahve? Lahev po celou dobu nehybně stojí na rovině a otvor prochází kolmo stěnou. Průřez otvoru je výrazně menší než průřez lahve.
2. Kam bychom měli umístit otvor (viz předchozí podúloha), pokud chceme, aby byl dostřík nejdělsí po jedné minutě? Předpokládejte, že lahev má konstantní průřez S a otvor má výrazně menší průřez s . Pro numerické řešení odhadněte rozumné hodnoty konstant.

3. Jaký může mít baterie maximální výkon na spotřebiči, pokud má elektromotorické napětí U_e a vnitřní odpor R_i ? Pro jaký odpor spotřebiče to nastane? Popřípadě, pro jakou impedanci to nastane, pokud bude obvod tvořen rezistorem, cívkou a kondenzátorem?
4. Jak nejlépe se k sobě mohou dostat dvě jádra dusíku 14, která se pohybují se střední kvadratickou rychlostí odpovídající plynu za normálních podmínek?
5. Najděte maximální možnou teplotu, kterou by mohl mít plyn, ve kterém by probíhal děj $p = p_0 e^{-\alpha V}$, kde α je kladná konstanta a p_0 je tlak plynu v počátečním stavu.

Karel napínal až do poslední chvíle.

Předně poznamenejme, že jsme akceptovali jak numerická, tak analytická řešení, a to jak s použitím derivací, tak bez nich. Ve vzorovém řešení jsou vybrána ta řešení, která jsme považovali za nejvhodnější pro daný problém, ale nejsou jediná možná.

Dostřik vody

Otvor je dle zadání malý. Můžeme tedy uvažovat, že v celém jeho průřezu vytéká voda stejnou rychlostí. Dále předpokládáme, že dno nádoby je zanedbatelně tlusté. To je pouze z praktických důvodů, aby otvor mohl být libovolně nízko. Voda, která je pod otvorem, totiž experiment nijak neovlivní. Zanedbáváme také všechny odporové síly a povrchové napětí vody. Láhev předpokládáme za shora otevřenou.

Označme výšku hladiny v nádobě H a výšku otvoru nad stolem h . Rychlost výtoku vody je dána výškou vody nad otvorem $H - h$. Díky přenosu tlaku sloupcem vody si můžeme představit, jako by se voda urychlila pádem o odpovídající výšku. Rychlost dostaneme ze zákona zachování mechanické energie

$$mg(H - h) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2g(H - h)}.$$

Použili jsme standardní značení m pro hmotnost malého objemu vody, g pro tíhové zrychlení a v pro rychlost. S touto rychlostí voda opustí nádobu kolmo na její povrch. Následuje vodorovný vrh, který si můžeme rozložit na volný pád ve svislé ose a rovnoměrný pohyb ve vodorovné ose. Doba pádu je

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Za tento čas se v druhé ose proud vody posune o vzdálenost

$$x = vt = \sqrt{2g(H - h)} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{(H - h)h}.$$

Proud vody tedy dostříkne na vzdálenost $2\sqrt{(H - h)h}$. Zajímavé je, že to nezávisí na tom, jak velké je tíhové zrychlení. Jediné, co stačí předpokládat, je, že tíhové zrychlení je nenulové a konstantní v celé oblasti, kde experiment provádíme.

Vraťme se k původní otázce, a to k maximalizaci vzdálenosti x . Odmocnina je funkcí, která je rostoucí. Jinak řečeno, pokud je maximální její argument, tak je maximální i odmocnina. Stačí proto maximalizovat funkci $f = (H - h)h$, kde H považujeme za fixní a měníme h . Funkci upravíme na čtverec

$$f = Hh - h^2 = -\left(h - \frac{H}{2}\right)^2 + \frac{H^2}{4}.$$

Z této rovnice je zřejmé, že maximum nastane pro $h = \frac{H}{2}$. Největšího dostřiku tak dosáhneme pro otvor v poloviční výšce lahve. Konkrétně, voda dostřikne do vzdálenosti $x_{\max} = H$. Tím máme odpověď na první otázku.

Druhá otázka je komplikovanější. Tu budeme řešit už pro nějaké konkrétní odhadnuté hodnoty numericky. Už v zadání jsme naznačili, že by mohlo být vhodné využít numerickou simulaci a odhadnout parametry. Necht počáteční výška hladiny je $H = 25 \text{ cm} = 0,25 \text{ m}$. Plochu průřezu lahve odhadneme jako $S = 60 \text{ cm}^2 = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Průřez otvoru pak můžeme řádově odhadnout na $s = 2,0 \text{ mm}^2$.

Pro numerickou simulaci využijeme nástroj, který je dostupný téměř všem, a to Microsoft Excel. Není to sice prostředí, které by se běžně používalo pro profesionální fyzikální simulace (popravdě se ve fyzice nepoužívá skoro vůbec), ale v tomto jednoduchém případě nám postačí. Využijeme doplněk „Řešitel“ (v anglické verzi „Solver“), který se sice skrývá v instalaci, ale musíte si ho před prvním použitím zavést (hledejte postup v nápovědě). Alternativně je možné pracovat s nějakým volně dostupným tabulkový procesorem a také není nutné používat nějaký doplněk, který ale nejspíš bude stejně existovat, protože jeden parametr zvládnete optimalizovat manuálně.

Připravíme si list, kde uvedeme definované počáteční hodnoty a konstanty. Sestavíme vzorce na změnu výšky hladiny v láhvi. Odhadli jsme, že časový krok 0,01 s bude postačující pro naše potřeby. To by mělo stačit pro přesnost výsledku na tři platné cifry. Náš algoritmus je následující. V daném čase vypočítáme z výšky hladiny rychlost výtoku kapaliny. Na základě rychlosti výtoku určíme objem kapaliny, který vyteče, a následně i pokles hladiny v láhvi.⁴ Pokles hladiny použijeme pro změnu aktuální výšky hladiny vody v láhvi. Pomocí doplňku Řešitel pak maximalizujeme hodnotu v buňce s vzdáleností dostřiku vody podle změn buňky s výškou otvoru nad podložkou. Výpočet si můžete prohlédnout v souboru⁵ Pokud byste se zajímali o lepší metody numerických výpočtů, podívejte se na seriál 31. či 21. ročníku FYKOSu.

Pro námi odhadnuté hodnoty a pro otevřený vršek lahve je optimální vytvořit otvor 11,7 cm nad povrchem stolu. Po minutě bude dostřik z této výšky 21,9 cm.

V rámci zadání byl v úloze skrytý bonus, a to prozkoumat i variantu s uzavřenou láhví. Pro ideální láhev s atmosférickým tlakem vzduchu je dostřik na počátku stejný. Nedošlo totiž ještě k poklesu hladiny, a tedy ani k poklesu tlaku nad kapalinou. V případě, že sledujeme výtok po minutě, je situace výrazně složitější. Předpokládáme, že na počátku byl u hladiny vody atmosférický tlak. Rychlost výtoku pak počítáme z rozdílu tlaků uvnitř na úrovni otvoru ve stěně a atmosférického tlaku venku. Když bude rozdíl nulový, výtok z lahve se zastaví. Pro potřeby úlohy budeme předpokládat, že vnitřní průřez lahve je konstantní až do výšky, kterou zvolíme jako $H_1 = 30 \text{ cm}$.

Hlavním problémem, na který narazíme pro takto nastavené parametry, je, že výtok po nějakých pár sekundách přestane. Konkrétně, pokud se pak snažíme alespoň maximalizovat dobu výtoku, dosáhneme 3,4 s pro nulovou výšku otvoru nad podložkou. Pokud otvor umístíme výše, pak je doba ještě kratší. Můžeme zmenšit otvor v láhvi či zvětšit prostor v láhvi nad hladinou. Obě tyto změny mohou vést k tomu, že voda z jinak dokonale těsné lahve bude vytékat déle. Láhev moc zvětšovat nechceme, tak upřednostníme zmenšení otvoru. Zmenšení plochy na desetinu nepostačí, zmenšíme ji proto na setinu, neboli na $0,02 \text{ mm}^2$. Potom výsledný maximální

⁴Mohli bychom nějaké kroky vynechat, jeden z těchto dvou údajů je vlastně zbytečný. Ale je dobré sledovat ve výpočtu i nějaké vedlejší veličiny, když hledáte chybu. Také je vhodné optimalizovat postup, když chcete výsledky zpřesnit a jste omezeni výpočetním výkonem. Nicméně s použitím běžného dnešního notebooku a Excelu není problém si dovolit „luxus“ pár sloupečků navíc.

⁵https://fykos.cz/_media/rocnik33/uholy/prilohy/5/s/reseni-r33s5p8-simulace.xlsx?cache=

dostřík po jedné minutě vyjde 18,8 cm pro otvor ve výšce 10,8 cm nad povrchem stolu.

Pro úplnost si ještě uvedme analytické řešení. Necht y je výška hladiny v čase t , potom rychlost výtoku bude

$$v = \sqrt{2g(y-h)}.$$

Změna objemu kapaliny v lahvi za nějaký malý čas dt bude $dV = -svdt$, čemuž odpovídá změna výšky hladiny

$$dy = -\frac{s}{S}vdt = -\frac{s}{S}\sqrt{2g(y-h)}dt.$$

Tuto jednoduchou diferenciální rovnici snadno vyřešíme a dostaneme výraz

$$y = h + \left(\sqrt{H-h} - \sqrt{\frac{g}{2} \frac{s}{S} t}\right)^2,$$

který je samozřejmě platný pouze do času

$$t = 2\sqrt{2g} \frac{S}{s} \sqrt{H-h}.$$

Nyní známe výšku hladiny v zadaném čase. Z předchozí úlohy víme, že voda dostříkne do vzdálenosti

$$x = 2\sqrt{(y-h)h} = 2\sqrt{h} \left(\sqrt{H-h} - \sqrt{\frac{g}{2} \frac{s}{S} t}\right) = 2\sqrt{h} (\sqrt{H-h} - K),$$

kde jsme několik parametrů úlohy schovali do konstanty K . Tento výraz chceme maximalizovat podle výšky otvoru h , a to znamená spočítat derivaci

$$\frac{dx}{dh} = \frac{\sqrt{H-h} - K}{\sqrt{h}} - \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{H-h}},$$

kterou položíme rovnou nule. Po pár jednoduchých úpravách dostaneme kvadratickou rovnici, jejíž řešením je

$$h = \frac{4H - K^2 \pm K\sqrt{8H + K^2}}{8}.$$

Všimněme si jedné důležité skutečnosti – v čase $t = 0$ platí $K = 0$, čímž bychom získali stejné řešení jako v předchozím případě. Vraťme se ale k výsledné rovnici. Pokud bychom zvolili kořen s $+$, potom by h vyšlo větší než v případě pro $t = 0$. Snadno nahlédneme, že h mělo vyjít menší, čili správně je kořen s $-$. Dosazením číselných hodnot dostaneme

$$h \doteq 11,7 \text{ cm},$$

což je stejně jako u numerického řešení. Analytické řešení uzavřené lahve ponecháváme čtenáři jako cvičení.

Výkon baterie

Nejdříve se zaměříme na situaci s rezistorem s odporem R a stejnosměrným proudem. Proud protékající obvodem bude

$$I = \frac{U_e}{R_i + R}.$$

Napětí se rozdělí na vnitřní odpor a na spotřebič. Konkrétně napětí na rezistoru bude

$$U = U_e R = U_e \frac{R}{R_i + R}.$$

Výkon na spotřebiči je součin proudu a napětí na součástce

$$P = UI = \frac{R}{(R_i + R)^2} U_e^2.$$

Vidíme, že pro R blížící se k nule jde výkon také k nule. Stejně tak i pro velmi velký odpor R bude výkon téměř nulový. Maximum proto nastane pro nějakou konečnou hodnotu. V tomto případě budeme extrém hledat analyticky pomocí derivace. Zajímá nás maximum P v závislosti na R , tedy derivujeme

$$\frac{dP}{dR} = \frac{(R_i + R)^2 - 2R(R_i + R)}{(R_i + R)^4} U_e^2 = \frac{R_i - R}{(R_i + R)^3} U_e^2.$$

Abychom našli extrém, položíme derivaci rovnou nule

$$\frac{dP}{dR} = 0 \quad \Rightarrow \quad R = R_i.$$

Maximální výkon nastane pro odpor, který je stejný jako vnitřní odpor zdroje a bude mít hodnotu $P_{\max} = \frac{U_e^2}{4R_i}$.

Podívejme se na verzi úlohy se střídavým proudem. Budeme předpokládat, že prvky RLC jsou zapojeny sériově. Pak je velikost celkové impedance obvodu

$$Z = \sqrt{(R + R_i)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

kde ω je úhlová frekvence proudu. Zajímá nás užitečný výkon na spotřebiči, tedy činný výkon $P = UI \cos \varphi$, kde $\cos \varphi$ je účinník. Ten určíme z fázového rozdílu, pro který platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Po troše práce zjistíme, že výsledek je stejný jako ve stejnosměrném případě. Pouze je potřeba doplnit podmínku pro vztah mezi kapacitou, indukčností a úhlovou frekvencí, a sice

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

S touto podmínkou je účinník rovný 1, tedy maximální možné hodnotě, a obvod se, co se výkonu týká, chová jako rezistor.

Jádra dusíku

Normální podmínky odpovídají tlaku $p_0 = 10^5$ Pa a teplotě $t = 0^\circ\text{C}$, resp. $T = 273,15$ K. Střední kvadratická rychlost částice v plynu, kterou si můžeme najít v tabulkách, je

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}},$$

kde $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J·K⁻¹ je Boltzmannova konstanta a m_0 je hmotnost částice. Ta byla zadána tím, že jde o atomární dusík 14, tedy $m_0 = 2,33 \cdot 10^{-26}$ kg. Rychlost obou částic bude $v \doteq 700$ m·s⁻¹.

Pokud by někdo vzal molekulu dusíku, pak by hmotnost byla dvojnásobná a rychlost molekuly nižší. Zadána byla ale úmyslně pouze jádra, aby byla další část úlohy jednoznačnější. Když máme jádra, tak je můžeme brát daleko snadněji jako bodové náboje. Molekuly jsou složitější tím, že je v nich přítomno více jader a může pak záležet i na orientaci. Také bylo v zadání uvedeno pouze jádro, abychom nemuseli uvažovat elektronový obal.

Dusík má atomové číslo 7, takže náboj každého jádra je $Q = 7e$, kde vystupuje elementární náboj $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C. Pokud chceme jádra dostat k sobě co nejbliže, pak je pošleme proti sobě čelně. Rychlost, kterou jsme již určili, mají ale někde ve velké (nekonečné) vzdálenosti od sebe a jak se začnou přibližovat, rychlost se začne snižovat, protože na sebe jádra působí odpudivou elektrostatickou silou. Gravitační přitažlivá síla je v tomto případě vůči té elektrostatické zcela zanedbatelná. Otázkou je, kdy se všechna kinetická energie přemění na potenciální elektrostatickou, kterou můžeme v závislosti na vzdálenosti r vyjádřit jako

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r} = \frac{49e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r},$$

kde $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F·m⁻¹ je permitivita vakua. Předpokládáme-li, že obě jádra měla v nekonečnu stejnou rychlost, můžeme psát

$$\frac{49e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = E_p = 2E_k = 2 \cdot \frac{1}{2} m_0 v_k^2,$$

$$r = \frac{49e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{3kT} \doteq 1,00 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

Je dobré si všimnout, že hmotnost částice ani nepotřebujeme znát, pouze teplotu – hmotnost jsme použili pouze pro mezivýpočet rychlosti částic. Vidíme, že zjednodušení, která jsme provedli, jsme získali situaci, která se ani zdaleka neblíží běžné situaci v plynu, který dýcháme. Zde jsou molekuly k sobě mnohem blíže než $1 \mu\text{m}$. Je to dáno zejména tím, že jsme uvažovali zcela ionizovaný plyn, zatímco ve vzduchu kolem nás jsou neutrální molekuly. Ve vzdálenostech výrazně větších než je poloměr atomu, řádově $10 \cdot 10^{-10}$ m, se atom zvnějšku obvykle chová neutrálně a odpudivá elektromagnetická síla se projeví až ve větší blízkosti. V běžném neionizovaném plynu se tedy atomy dostávají daleko blíže k sobě, což je nutné i kvůli tomu, kolik jader se obvykle vejde do jednotkového objemu vzduchu. Kvůli silnému odpuzování jader elektromagnetickou silou je také tak těžké přimět je k jaderné fúzi.

Teplota děje v plynu

Máme zadaný děj v plynu

$$p = p_0 e^{-\alpha V}.$$

Plyn považujeme za ideální a můžeme tedy psát

$$pV = nRT,$$

kde n je látkové množství plynu, $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ je molární plynová konstanta a T je jeho teplota. Vyjádříme si teplotu jako funkci ostatních veličin

$$T = \frac{pV}{nR} = \frac{p_0 V}{nR} e^{-\alpha V}.$$

Teplota je nyní vyjádřena pomocí objemu, který je proměnný, a dalších konstant, které jsou pro uzavřený systém konstantní. Podobně jako u výkonu rezistoru, vidíme, že pro nulový objem a nekonečně velký objem by byla teplota nulová. Zderivujeme teplotu podle objemu

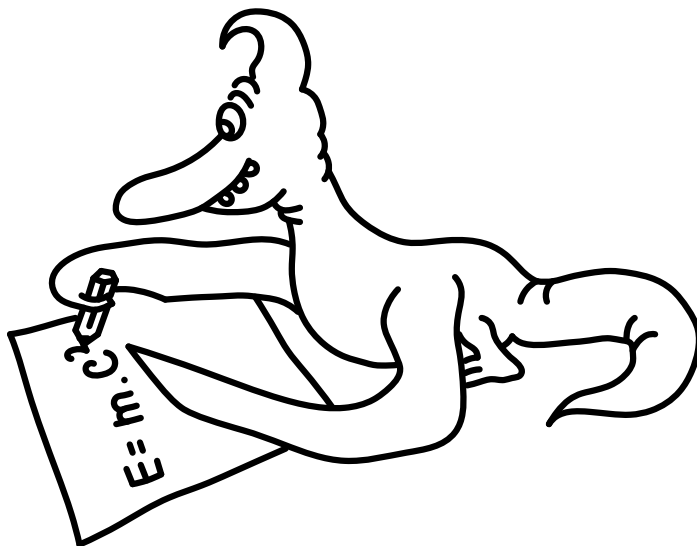
$$\frac{dT}{dV} = \frac{p_0}{nR} e^{-\alpha V} (1 - \alpha V).$$

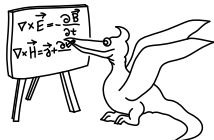
Nyní položíme derivaci rovnou nule. Pouze poslední člen součinu může být nulový, čili pro extrém platí

$$1 - \alpha V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{\alpha}.$$

Maximální teploty $T_{\max} = \frac{p_0}{\alpha n R e}$ dosáhne plyn pro objem $V = \frac{1}{\alpha}$.

Karel Kolář
karel@fykos.cz





Seriál: Odhady

Úvod

Tento díl je věnován odhadům všeho druhu. Již jsme se s tímto tématem průběžně setkávali v předchozích dílech. Jde ale o důležitý základní princip ve fyzice. Proto jsme pro něj vyhradili speciální díl, abychom jej mohli probrat dostatečně podrobně.

Extremální odhady na základě zákonů zachování a jednoduchých úvah

Jak jsme zmiňovali již ve třetím dílu seriálu, můžeme využít zákony zachování k tomu, abychom provedli alespoň spodní či horní odhad hledané hodnoty. O zákonech zachování byl již jeden díl, proto se pouze stručně podíváme na jednu historickou úlohu.

Příklad – vody Zeměplochy jednoduše

Vybrali jsme problémovou úlohu 6. série 28. ročníku⁶, kterou nebudeme chtít řešit přesně, ale bude nám stačit alespoň hrubý spodní odhad. O co v úloze šlo? Na rovné kruhové desce o průměru 10 000 km se nachází voda do výšky 5 m. Máme zjistit, za jak dlouho by všechna voda stekla, pokud by na celé desce bylo konstantní tíhové zrychlení g . Jedná se o velice náročnou úlohu, pokud chceme výsledek přesně.

V případě že nechceme používat nic tak složitějšího jako v autorském řešení a chceme provést alespoň, zjevně silně podhodnocený, spodní odhad, pak můžeme vyjít ze zákona zachování energie. Určíme, jakou rychlost by mohla nabrat voda po pádu z 5 m a jak dlouho by jí s touto rychlostí trvalo, než by dosáhla okraje plochy. Rychlost po pádu je $v = \sqrt{2gh} \doteq 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Nejvzdálenější místo od okraje je střed desky. Od středu k okraji je to 5 000 km, tedy zhruba 140 h. Úplně minimalistický odhad tedy je, že by odtok vody trval 6 dní. Zanedbali jsme ale to, že voda ani nemůže nejdříve o tolik poklesnout, právě protože může odtékat pouze z okraje. Tedy celková doba bude jistě řádově delší.

Pokud by nás zajímalo, jestli i po jednom dni zůstane na ploše dost vody na to, abyste si mohli nalít skleničku – víme jistě, že ano. Pokud by se někdo ptal na dobu za měsíc, tak na to už takto snadno odpovědět nedokážeme a museli bychom použít složitější metody. Pro dokonalé řešení by bylo potřeba uvážit viskozitu vody, povrchové napětí a další parametry. Museli bychom také určit, jakou výšku vody v jakém místě považujeme za to, že voda zde ještě neodtekla. Voda totiž v tomto modelu zcela neodteče nikdy, protože nějaké množství se udrží povrchovým napětím.

Fermiho úlohy

Stručně řečeno, Fermiho úlohy⁷ jsou relativně komplexní odhady, ve kterých se obvykle nepoužívá složitá matematika, ale dospějeme k řádově rozumnému výsledku pomocí logických úvah a snadných výpočtů. Seriálové úlohy této série jsou zadané právě ve stylu Fermiho úloh.

⁶https://fykos.cz/_media/rocnik28/ulohy/pdf/uloha28_6_p.pdf

⁷V České republice existuje stejnojmenná soutěž organizovaná pro středoškolské Přírodovědeckou fakultou Univerzity Palackého v Olomouci – viz. <http://isouteze.upol.cz/fermi/>.

Enrico Fermi byl vědcem z první poloviny 20. století, který se věnoval jadernému výzkumu. Úlohy se po něm nazývají právě proto, že byl tímto způsobem myšlení proslulý. Prý při jednom jaderném testu pustil na zem arch papíru a na základě toho, jak daleko dopadl, během pár okamžiků odhadl relativně přesně sílu jaderného výbuchu.

Asi nejznámějším příkladem úlohy tohoto typu je odhadnout počet ladičů pian v nějakém americkém městě (které se podle autora liší). Postup může být následující. Nejprve odhadneme počet osob v daném městě, třeba 10 milionů. Pak odhadneme, na kolik osob pravděpodobně připadá jedno piano. Například, že zhruba každá desátá rodina by mohla mít piano. Na rodinu mohou připadat průměrně 4 osoby. To by znamenalo, že se v daném městě vyskytuje 250 000 pian. Kolikrát pak může být průměrný počet ladění ročně? Opět mohou být rozdíly mezi jednotlivými případy. Někdo ladí každý měsíc a někdo nikdy. Předpokládejme, že průměrně to bude jednou ročně. Pokud pak jeden ladič naladí za pracovní den 4 piána a má průměrně 200 pracovních dnů ročně, pak zvládne obsloužit 800 pian. To odpovídá tomu, že by mělo být v tomto městě zhruba 300 ladičů pian. Přesněji řečeno bychom asi měli říct, že považujeme za nejpravděpodobnější, že v desetimilionovém městě jsou řádově stovky ladičů pian. I když tato úloha postupně zastarává. Dnes už lidé spíš nakupují více elektronické klávesy, pro které ladiči pian nejsou potřeba.

Tento příklad byl spíše z oblasti ekonomie. Stejný přístup ale lze použít u otázek různé povahy. Dalo by se říct, že jde o inteligentní aplikaci selského rozumu.

Fermiho paradox

Zajímavým tématem týkajícím se odhadů je tzv. Fermiho paradox. Jde o to, že pokud je ve vesmíru nějaký další inteligentní život, proč jsme ho ještě nezaznamenali? Tzv. Drakeova rovnice⁸ by nám měla říct, kolik současně existuje komunikace schopných mimozemských civilizací v naší galaxii. Nicméně ta samotná je souborem odhadů, které nejsou nijak podložené tvrdými daty. Další možností směru uvažování je skrze odhad rychlosti šíření civilizace v rámci galaxie s využitím hypotetického mezihvězdného pohonu mezi systavy. Často nám ale vyjde čas, který je velice krátký ve srovnání s „dobou života vesmíru“. Proto se vědci snaží nalézt zdůvodnění, proč jsme ještě žádnou takovou civilizaci nepotkali. Námětů na takové odůvodnění je mnoho,⁹ ale pravděpodobně nám nezbyvá než jako běžným smrtelníkům počkat, jestli se dožijeme nějakého prvního kontaktu. Nebo se můžete zapojit do výzkumů s tím spojených, např. jako byl/je SETI,¹⁰ či do návazných projektů.

⁸Velice stručný popis najdete na Wikipedii https://cs.wikipedia.org/wiki/Drakeova_rovnice. V anglické verzi najdete, jako obvykle, trochu více. Jde však o rovnici, která je diskutovaná a někteří vědci s ní nesouhlasí. V zásadě ale shrnuje parametry, které bychom měli odhadnout, abychom dostali alespoň nějaký odhad. Tedy na výsledek se v současnosti nedá vůbec spoléhat, ale je dobrým zamyšlením nad touto problematikou.

⁹Například 75 jich můžete nalézt v knize, která je celá věnovaná Fermiho paradoxu od Stephena Webba „If the Universe Is Teeming with Aliens ... WHERE IS EVERYBODY?: Seventy-Five Solutions to the Fermi Paradox and the Problem of Extraterrestrial Life“ (2. edice, 2015, Springer, ISBN 978-3319132358).

¹⁰Projekt SETI@home na <https://setiathome.berkeley.edu/>, který spočíval v tom, že kdokoliv mohl poskytnout výpočetní výkon svého počítače pro náročné výpočty, byl akorát v březnu 2020 pozastaven. Ale pokud budou dostatečné finance na provoz, pak bude probíhat analýza již získaných a zpracovaných dat. Pokud vás ale zaujala možnost pomoci vědcům poskytnutím výkonu svého počítače, pak vám můžeme doporučit Folding@home <https://foldingathome.org/>, v jehož rámci můžete pomoci při výzkumu nemocí, například aktuálně COVID-19.

Jak dlouho bude trvat ...?

Zajímavou úlohou je, jak odhadnout okamžik, kdy něco zanikne, pokud máme k dispozici pouze dobu dosavadní existence dané věci, instituce apod. Předně je potřeba říct, že tento odhad vychází z Koperníkova principu. Ten předpokládá, že okamžik pozorování je náhodný. Pozorovatel, který činí tento odhad, by neměl být nějak význačný. Což samozřejmě není například ten, kdo navštívil slavnostní otevření. S odhady tohoto typu přišel John Richard Gott III,¹¹ když navštívil v roce 1969 Berlínskou zeď. Položil si otázku: „Jak dlouho asi ještě bude stát?“ Uvážil, že má 50 % šanci, že se přišel podívat v době, kdy zeď stála čtvrtinu až tři čtvrtiny ze své celkové doby. Učinil tak odhad, že zeď, která stála již 8 let (od roku 1961), bude zbořena s 50 % pravděpodobností někdy mezi lety 1971 ($1961 + 8 \cdot 4/3$) a 1993 ($1961 + 8 \cdot 3$). Při svém odhadování měl štěstí a zeď padla v roce 1989.

Tento intervalový odhad se dá ale upravit i např. na 95 % pravděpodobnost či i tzv. 5 sigma, tedy 99,9999 % pravděpodobnost. Nicméně čím vyšší pravděpodobnosti chceme dosáhnout, tím se intervaly rozšiřují a stávají se až neuzitečně široké.

Podobným způsobem a mírně složitějšími úvahami můžeme odhadnout, že jsme se narodili na planetě, která má mezi osídlenými nadprůměrnou velikost, protože má i nadprůměrný počet jedinců. Tedy za předpokladu, že jsme měli stejnou pravděpodobnost se narodit jako jakýkoliv inteligentní druh. Ale jde samozřejmě pouze o odhad založený na statistickém modelu za současné znalosti 0 mimozemských civilizací. Ale lepší alespoň nějaký odhad než žádný.

Intrapolace a extrapolace

Ve fyzice často odhadujeme průběhy závislostí, kdy neznáme přesně teorii, ale dokážeme naměřit mnoho jiných dat v okolí. **Intrapolace** je označení pro situaci, kdy provádíme odhad uvnitř intervalu, kde máme okolní data – tedy máme změřeny jak nižší tak vyšší hodnoty. Příkladem intrapolace je to, jak byly odhadnuty vlastnosti chemických prvků při sestavování periodické tabulky. Mendělejev si tehdy uvědomil, že se vlastnosti prvků opakují s určitými periodami. Na základě toho jednak správně předpověděl existenci několika chemických prvků jako eka-alumínia (gallia) a eka-silicia (germania). Současně také předpověděl jejich základní vlastnosti na základě již známých prvků.

Extrapolace je již odvážnější proces, protože při něm odhadujeme mimo naměřený interval. Je zde proto větší pravděpodobnost, že náš odhad nebude přesný. Může se totiž stát, že se najednou výrazněji projeví nějaký jiný jev než ten, který byl dominantní na předchozím intervalu. Příkladem toho, kdy víme, že s extrapolací úplně dobře nepochodíme, je odpor vzduchu. Pro velice malé rychlosti můžeme uvažovat, že jde o laminární obtékání a síla je přímo závislá na první mocnině rychlosti (Stokesův odpor). Pro běžné rychlosti, kterých dosahuje třeba automobil, je dobré přiblížení pomocí turbulentního odporu, který je závislý na druhé mocnině rychlosti (Newtonův vztah pro odporovou sílu). Pro rychlosti blížící se rychlosti zvuku ve vzduchu pak odporová síla stoupá rychleji. Naopak po překročení rychlosti zvuku v daném prostředí dochází k tomu, že s dále rostoucí rychlostí klesá koeficient odporu a odporová síla neroste již tak rychle.

Ukázkou extrapolace je problémová úloha 2. série 31. ročníku FYKOSu,¹² kdy byly na základě metod pochopitelných pro středoškoláky odhadovány vlastnosti 118. prvku – oganessonu. Jsou zde použity standardní metody prokládání závislosti polynomem. Obecně je vhodné se

¹¹https://en.wikipedia.org/wiki/J._Richard_Gott

¹²https://fykos.cz/_media/rocnik31/ulohy/pdf/uloha31_2_p.pdf

omezovat na polynomy nižšího řádu, protože s rostoucím stupněm polynomu nám funkce rychleji „ujede“, protože při výběru polynomu se snažíme minimalizovat jeho vzdálenost (resp. kvadráty rozdílů funkčních hodnot) od námi naměřených bodů, ale nijak neošetřujeme to, aby se choval rozumně i dále. Pokud to tedy data naznačují, pak je vhodné zůstat u lineární či kvadratické funkce.

Pokud funkce nevypadá na lineární, ale spíše na exponenciální či logaritmickou, můžeme fitovat na tu právě lépe odpovídající funkci. Pokud nemáme k dispozici počítač, můžeme využít vhodné transformace – např. převést jednu či obě osy na logaritmické a v té provést přibližné proložení graficky lineární funkcí, tedy pravítkem.

Taylorův rozvoj

Taylorův rozvoj (či polynom či řada) je způsob, jak převést jakoukoliv rozumnou funkci na polynom. S polynomy se nám totiž pracuje dobře, tak proč taky ne, že? Pokud nás pak zajímá chování funkce jenom blízko vybraného bodu, tak je Taylorův polynom to pravé.

Definice Taylorova rozvoje

Taylorův rozvoj je vlastně polynomiální řada, která nám přibližuje nějakou funkci pomocí polynomů. Námi vybranou funkci $f(x)$ můžeme zapsat alternativně jako

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \end{aligned}$$

Pokud tedy známe funkci – přesněji řečeno její hodnotu a hodnoty všech derivací v jednom bodě, můžeme určit i hodnotu funkce v jakémkoliv jejím dalším bodě. Je to možná překvapivé tvrzení, ale opravdu stačí, aby se dvě funkce rovnaly v jednom bodě ve funkční hodnotě a všech derivacích a měly stejný definiční obor, a jsou zcela identické.¹³

Pokud si zvolíme bod, ze kterého budeme vycházet jako $x_0 = 0$, což provádíme například u definice funkcí, nazývá se tato řada **Maclaurinova** a dá se zapsat ještě o něco jednodušeji jako

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Síla této řady spočívá v tom, že pokud nás zajímá pouze přibližné chování blízko bodu rozvoje této funkce, stačí nám započítat pouze několik prvních členů. Tyto řady využíváme hojně ve fyzice, když se snažíme pozorovanou závislost zjednodušit a na základě pár členů Taylorova rozvoje určit chování v nějaké oblasti. Například lineární aproximace není vlastně nic jiného než Taylorova řada prvního řádu. Čím více členů vezmeme, tím více se budeme blížit funkci, kterou takto přibližujeme a pro tím širší oblast bude naše aproximace platná.

¹³Za předpokladu, že dané funkce jsou na celém vyšetřovaném intervalu hladké, neboli že se dají na celém intervalu libovolně krát derivovat.

Pokud byste potřebovali Taylorovu řadu pro více proměnných, tentokrát v okolí bodu $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, pak vypadá takto

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(x_1 - a_1)^{k_1} (x_2 - a_2)^{k_2} \dots (x_n - a_n)^{k_n}}{k_1! k_2! \dots k_n!} \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} f(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Funkce můžeme rozkládat i do jiných řad – například do sinových a kosinových funkcí pro periodické funkce (Fourierovy řady), exponenciálních funkcí nebo zobecněných Taylorových řad pro komplexní čísla (Laurentovy řady).

Některé řady, které se mohou hodit

Abychom si nemuseli Taylorovu řadu odvozovat u každého příkladu znovu od začátku, je vhodné mít tabulku se základními řadami. Pokud byste si chtěli procvičit derivování, tak si je můžete zkusit sami odvodit. Některé užitečné a často používané odhady plynoucí z příslušných Taylorových polynomů, platící nejlépe v blízkém okolí $x = 0$, jsou zde

$$\begin{aligned} e^x &\approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2, & \ln(1+x) &\approx x - \frac{1}{2}x^2, \\ \frac{1}{1-x} &\approx 1 + x, & (1+x)^n &\approx 1 + nx, \quad n \in \mathbb{R}, \\ \sin x &\approx x - \frac{1}{6}x^3, & \sinh x &\approx x + \frac{1}{6}x^3, \\ \cos x &\approx 1 - \frac{1}{2}x^2, & \cosh x &\approx 1 + \frac{1}{2}x^2, \\ \operatorname{tg} x &\approx x + \frac{1}{3}x^3, & \operatorname{tgh} x &\approx x - \frac{1}{3}x^3. \end{aligned}$$

Ačkoli to nesouvisí s Taylorovými řadami, často se hodí aproximovat faktoriál. Proto si zde uvedeme Stirlingův vzorec

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Limita relativistické energie

Podívejme se na praktický příklad využití Taylorova rozvoje. Ověříme, že když vyjdeme ze vztahu pro energii ve Speciální teorii relativity, dostaneme pro malé rychlosti klidovou energii plus kinetickou energii odpovídající klasické newtonovské mechanice.

Zavedme obvyklé označení $\beta = \frac{v}{c}$, kde v je rychlost tělesa, c je rychlost světla, a označme

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Vezměme známý Einsteinův vzoreček pro energii tělesa/částice

$$E = mc^2,$$

kde m je relativistická hmotnost částice, pro kterou platí $m = \gamma m_0$, kde m_0 je klidová hmotnost. Potom můžeme psát

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} m_0 c^2.$$

Nyní provedeme Taylorův rozvoj γ pro $\beta \rightarrow 0$ s tím, že se budeme zajímat o první tři členy

$$\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} = 1 + \frac{d}{d\beta} \left(\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} \right) \Big|_{\beta=0} \beta + \frac{d^2}{d\beta^2} \left(\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} \right) \Big|_{\beta=0} \frac{1}{2} \beta^2 + O(\beta^3).$$

Značení $O(\beta^3)$ znamená, že máme ještě nějaký zbytek, který je řádově úměrný β^3 či vyšším mocninám. To je právě to, co budeme chtít zanedbat. Dále

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} \left(\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} \right) \Big|_{\beta=0} &= \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \Big|_{\beta=0} = 0, \\ \frac{d^2}{d\beta^2} \left(\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} \right) \Big|_{\beta=0} &= \frac{d}{d\beta} \left(\frac{\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \Big|_{\beta=0} = \frac{1+2\beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{5}{2}}} \Big|_{\beta=0} = 1. \end{aligned}$$

Při malých rychlostech ve srovnání s rychlostí světla dostáváme pro energii vztah

$$E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 + O(\beta^3) \right).$$

Pokud se tedy omezíme na přiblížení β^2 , pak má celková energie tělesa, po přepsání na středoškolsky užívané veličiny, tvar

$$E \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Skutečně dostáváme dva členy odpovídající jednak klidové energii tělesa $m_0 c^2$, která se nám v klasické fyzice nijak neprojevuje, a jednak klasické kinetické energii $\frac{1}{2} m_0 v^2$.

Závěr a upoutávka na příště?

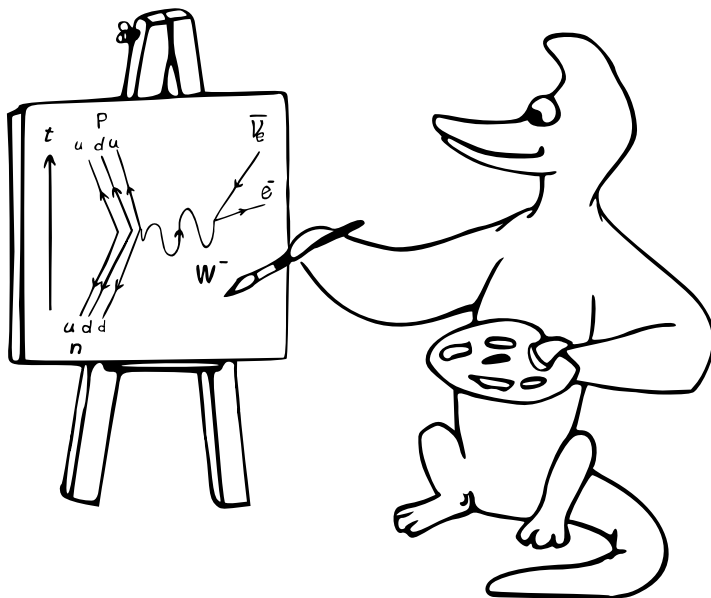
Prošli jsme vybrané metody, jak relativně rychle dostat alespoň přibližný výsledek. Snad by se z nich dost dalo označit za triky. Nezapomínejte ale i na aplikaci selského rozumu. Zmínili jsme také pár tipů, jak psát řešení úloh lépe. Určitě se vám aspoň něco bude hodit při řešení FYKOSu či dalších soutěží, nebo při formálních záležitostech, třeba i během psaní protokolů či závěrečných prací.

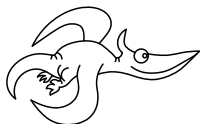
Právě teď by bylo zajímavou úlohou odhadnout okamžik, kdy dojde v České republice či celosvětově ke kulminaci počtu nově nakažených SARS-CoV-2 či kdy dojde k poklesu počtu aktuálně nakažených. Nechtěli jsme být ale příliš zlomyslní. Současně doufáme, že tyto okamžiky nastanou ještě před odesílacím termínem série. Negativními faktory pro předpovědi šíření tohoto viru je třeba i to, že není ještě moc přesně známo, jaký podíl nakažených může překonat nemoc bez nějakých výraznějších příznaků. Také se situace mění den ze dne díky opatřením, která jsou neustále upravována. Tím pádem se dá očekávat, že jednoduché předpovědní modely ani nemohou být úspěšné s dostatečnou přesností.

Co bude příště? Tak to ještě nevíme. V době, kdy se psala tato kapitola seriálu, ještě nebylo známé téma dalšího ročníku. Určitě se můžete těšit na další zajímavé úlohy. Pokud se nemůžete

dočkat dalšího čtení a máte trochu času, připomínáme, že se můžete podívat na minulé ročníky seriálu a úloh ve FYKOSu či na knihovničku Fyzikální olympiády.

Uvítáme zpětnou vazbu k průběhu letošního seriálu. Můžete získat i bonusový bod, pokud nám napíšete, jak se vám líbily úlohy. Jestli vám vyhovovalo to, že seriál byl spíše roztržitější, co se týče oblastí fyziky a jednotlivé díly navazovaly jenom volně. Také můžete napsat, jestli vám něco chybělo – případně bychom mohli něco doplnit do textu seriálu na web. Rozhodně bychom pak chtěli vědět, pokud jste našli nějaké nepřesnosti v textu seriálu či ve vzorových úlohách (i mimo seriál). Za to nabízíme také bonusový bod či i více bodů, pokud najdete takových záležitostí větší množství.





Pořadí řešitelů po V. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%“	%	Σ
Student Pílný	MFF UK	6	6	6	7	9	10	12	10	66	100	91	330
1. Tomáš Patsch	Slovanské G, Olomouc	6	6	1	2	7	–	–	2	24	77	58	211
2. Pavel Provazník	G Dašická, Pardubice	6	2	2	2	3	10	5	5	35	59	48	173
3. Martin Kysela	G, Český Krumlov	6	2	3	–	–	–	6	–	17	65	40	143
4. Jakub Hadač	G V. Hlavatého, Louny	6	2	1	1	–	–	8	3	21	60	39	140
5. David Bálek	G Legionářů, Příbram	6	4	3	–	–	–	–	–	13	84	35	128
6. Barbora Čemanová	G, Park mládeže, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	65	30	108
7. David Mendl	G P. de Conbertina	6	2	–	–	–	–	7	–	15	77	28	101
8. Jonáš Dej	Wichterlovo G, Ostrava	6	6	3	2	3	–	10	10	40	77	25	93
9. Martin Švanda	Arcibiskupské G, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	54	23	83
10. Sandeep Kandi	IMSA, Aurora, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	62	20	72
11. Jan Cícha	Gymnázium Brno-Bystrc	4	2	–	–	–	–	–	–	6	53	18	67
12. Juraj Pavolko	G, P. Horova, Michalovce	6	2	0	1	–	–	–	–	9	63	16	61
13. Dominik Blaha	G, Uherský Hradiště	6	2	–	–	–	–	–	–	8	94	15	58
14. Otomar Miskolczi	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	10	40
15. Dalibor Očenášek	G Uničov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	10	38
16. Michaela Jarošová	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	6	25
17.–18. Kristýna Jencíková	G nám. E. Beneše, Kladno	6	6	–	–	–	–	–	–	12	100	6	24
17.–18. Ladislav Vávra	G, Rožnov pod Radhoštěm	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	6	24
19. Michael Křivan	G V. Hlavatého, Louny	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	6	23
20.–22. Andrej Bružerák	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	5	18
20.–22. Vojtěch Pluskal	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	5	18
20.–22. Matúš Páll	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	44	5	18
23. Anna Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	49	5	17
24.–25. Tadeáš Ďurčanský	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	34	4	15
24.–25. Daniel Franc	G, Roudnice nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48	4	15
26.–28. Adam J. Jerhot	ZŠ Weberova, Praha 5 - Košiče	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	3	12
26.–28. Julie Křimská	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	3	12
26.–28. Matej Repa	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	3	12
29. Patrik Jendele	SPŠ stavební Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	32	2	10
30. Aleš Chaloupka	G J. Blahoslava, Ivančice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	1	6
31. Michaela Jarošová	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	30	0	3
32. Anna Hýžová	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	33	0	2

Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student</i>	Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%“	%	Σ
			6	6	6	7	9	10	12	10	66	100	91	330
1.	<i>Aleš Opl</i>	Gymnázium Praha 3	6	6	6	–	5	10	12	6	51	91	77	280
2.	<i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	6	6	3	3	4	–	9	9	40	87	67	243
3.	<i>Jáchym Mraček</i>	Akademické G, Praha	6	6	1	–	10	8	3	34	68	54	196	
4.	<i>Adam Kozubek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	6	6	–	–	–	9	9	–	30	72	50	184
5.	<i>Hynek Jakeš</i>	Slovanské G, Olomouc	6	6	6	1	7	–	–	7	33	86	50	183
6.	<i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	4	6	3	–	–	–	–	1	14	76	49	176
7.	<i>Vojtěch Smola</i>	G Komenského, Havířov	6	4	3	–	3	10	7	0	33	73	48	174
8.	<i>Marie Lausová</i>	G, Jihlava	6	4	0	–	2	9	7	2	30	56	44	160
9.	<i>Jan Marjanko</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	6	2	1	2	–	9	–	3	23	57	44	158
10.	<i>Matěj Charousek</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	6	2	3	1	3	10	–	4	29	65	41	151
11.	<i>Jakub Pelc</i>	G, Benešov	6	4	–	–	–	8	5	–	23	63	41	149
12.	<i>Jan Pijáček</i>	Biskupské G, Brno	6	0	3	0	4	2	6	4	25	48	40	148
13.	<i>Václav Maštera</i>	G P. de Coubertina, Tábor	6	2	2	–	–	–	–	1	11	66	35	129
14.	<i>Ondřej Piroutek</i>	G, Českolipská, Praha	4	2	1	–	2	10	7	2	28	50	35	126
15.	<i>Marek Brodský</i>	G Jiřího z Poděbrad, Po- děbrady	2	–	1	2	2	–	–	–	7	54	31	115
16.	<i>Martin Fedorko</i>	G J. A. Raymana, Prešov	6	6	1	–	–	–	–	–	13	90	28	103
17.–18.	<i>Eliška Durstová</i>	G, Dvůr Králové n. L.	6	6	3	0	–	–	–	3	18	70	25	91
17.–18.	<i>Adam Hůstava</i>	European School Luxem- bourg II	6	6	2	–	–	5	8	2	29	71	25	91
19.	<i>Vojtěch Stránský</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	–	3	–	–	10	10	–	27	59	25	89
20.	<i>Antonín Kubík</i>	G, Roudnice nad Labem	4	2	0	–	–	–	–	–	6	55	24	87
21.	<i>Ondřej Grohmann</i>	G, Olomouc-Hejčín	6	2	1	1	–	–	–	–	10	52	23	85
22.–23.	<i>Monika Janderová</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovi- ce	6	2	–	–	–	–	9	1	18	43	22	81
22.–23.	<i>Aleš Manuel Papáček</i>	G, Třeboň	4	2	1	–	–	–	6	3	16	61	22	81
24.	<i>Luboš Bariak</i>	G Tajovského, B. Bystrica	4	2	0	–	–	8	5	0	19	33	22	80
25.	<i>Tomáš Heger</i>	Jiráskovo G, Náchod	6	–	–	–	–	–	–	4	10	82	21	79
26.	<i>Wiktor Macura</i>	G J. Slowackiego, Český Tě- šín	6	4	–	–	–	–	8	–	18	74	17	63
27.	<i>Paulína Dujavová</i>	G J. A. Raymana, Prešov	6	4	–	–	–	–	–	–	10	84	15	58
28.	<i>Jakub Jedlička</i>	G Christiana Dopplera, Pra- ha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	61	15	57
29.	<i>Anežka Karamonová</i>	G B. Hrabala	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	15	55
30.	<i>Jakub Mikeš</i>	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48	13	49
31.	<i>Marie Poláková</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42	13	47
32.	<i>Jakub Dubský</i>	G, Ostrov	6	–	–	–	–	–	–	–	6	39	11	41
33.	<i>Jan Hlavsa</i>	G J. Palacha, Mělník	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	10	39
34.	<i>Daniel Myšák</i>	Mendelovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	33	10	37
35.	<i>Jan Ptáček</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	10	36
36.	<i>Zuzana Lisztwanová</i>	G J. Slowackiego, Český Tě- šín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	61	8	31
37.	<i>Oto Ulrich</i>	G, Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	7	28
38.	<i>Jakub Ferenčík</i>	G Dašická, Pardubice	6	4	0	–	–	–	–	–	10	60	7	27
39.	<i>Tomáš Pecl</i>	VOŠ a SPŠ elektrotech., Pl- zeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	7	26
40.	<i>Karolína Zemene</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	89	6	25
41.	<i>Tomáš Zatloukal</i>	G, Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	71	5	20
42.–43.	<i>Filip Brutovský</i>	G Alejová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	4	15
42.–43.	<i>Adéla Kolembusová</i>	European School Luxem- bourg II	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38	4	15

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%“	%	Σ
		6	6	6	7	9	10	12	10	66	100	91	330
44.–45. <i>Barbora Cabalková</i>	G, Žamberk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	64	4	14
44.–45. <i>Matěj Prokopič</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	64	4	14
46.–47. <i>Jakub EL Mouhib</i>	Gymnázium Milady Horákové Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	3	12
46.–47. <i>Petr Šícho</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	3	12
48. <i>Bianka Tomaščíková</i>	G Varšavská, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	2	8
49. <i>Lukáš Šrol</i>	G Hubeného, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	1	6
50. <i>Eliška Štégelová</i>	G T. G. Masaryka, Litvínov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	9	0	3

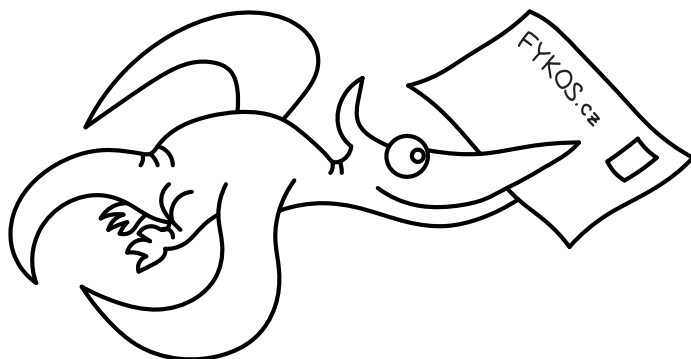
Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%	“%	Σ
Student	MFF UK	3	3	6	7	9	10	12	10	60	100	83	300
1. Robert Gemrot	G Komenského, Havířov	3	3	3	2	4	11	12	10	48	93	77	279
2. Vojtěch Kuchař	Wichterlovo G, Ostrava	3	3	3	2	4	10	9	8	42	81	65	238
3. Patrik Kašpárek	Katolické gymnázium Třebíč	3	3	3	1	–	13	11	7	41	75	53	192
4. Jakub Kliment	G Tajovského, B. Bystrica	3	3	3	3	4	–	–	11	27	85	52	190
5. Marek Milička	G dr. K. Polesného., Znojmo	2	3	3	1	3	9	8	9	38	72	45	165
6. Soňa Husáková	G, Českolipská, Praha	3	3	3	0	4	10	–	2	25	66	45	164
7. Jozef Csipes	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	92	43	156
8. Martin Opat	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	3	1	3	–	–	6	10	26	73	40	145
9. Martina Daňková	Gymnázium Brno-Bystrc	3	–	3	2	–	–	7	2	17	72	39	141
10. Elena Chocholaková	G L. Svobodu, Humenné	3	3	3	2	–	6	8	7	32	77	38	139
11. Lubor Čech	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	2	1	–	–	8	5	2	21	63	35	127
12. Dominik Farhan	G Mikulášské n. 23, Plzeň	3	2	0	–	–	–	–	–	5	64	30	112
13.–14. Mona Alizadeh	St Paul's GS	4	2	3	1	2	8	9	4	33	56	26	96
13.–14. Matěj Dvořák	G Jana Keplera, Praha	3	1	6	–	–	–	–	–	10	68	26	96
15. Karolína Letochová	G, Šternberk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	25	92
16.–17. Ondřej Sladký	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	64	25	90
16.–17. Tomáš Tuleja	G L. Svobodu, Humenné	3	3	3	–	–	–	–	5	14	86	25	90
18.–19. Jan Červeňan	G J. Pivečky, Slavičín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	84	19	68
18.–19. Josef Trojan	G Botičská, Praha	3	2	1	2	–	–	–	–	8	68	19	68
20. Aneta Pjatkanová	G, Kralupy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	18	65
21. Jan Klivan	G, Dačice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	62	15	53
22. Marco Souza de Joo	G Nad Štolou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	14	52
23. Alexandra Mészárosová	G Andreja Vrábľa, Levice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	13	48
24. Zsolt Beke	G H. Selyeho Komárno	3	1	6	–	–	–	–	3	13	62	11	42
25. Riley Lofgren	Lambert High School, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	11	41
26. Anna Marie Ortová	G Jana Nerudy, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	54	10	39
27. Matej Michalko	G Andreja Vrábľa, Levice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42	9	34
28. Zuzana Horváthová	G Andreja Vrábľa, Levice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	45	9	33
29. Adrián Šegeda	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	77	7	27
30.–32. Matyáš Háze	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	45	6	24
30.–32. Maroš Mešter	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	65	6	24
30.–32. Petr Skupien	Mendelovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	73	6	24
33.–35. Dávid Benko	G L. Svobodu, Humenné	3	3	3	–	6	7	–	–	22	65	5	22
33.–35. Marek Broul	G dr. V. Šmejkal, Ústí n. L.	3	1	–	–	–	–	–	–	4	50	5	22
33.–35. Martin Bucko	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	5	22
36.–37. Viktor Fukala	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	5	21
36.–37. Lucia Gintnerová	G Sv. Františka, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	95	5	21
38. Ondřej Chlubna	G Orlová	–	–	–	–	–	–	–	–	–	57	5	20
39. Jaroslav Grulich	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	46	5	19
40. Michal Žáček	G, Lovosice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	51	5	18
41. Marek Čermák	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	41	5	17
42.–43. Daniel Fousek	G, Špitálská, Praha	3	2	–	–	–	7	–	4	16	62	4	16
42.–43. Jaroslava Ježková	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	59	4	16
44.–45. Tomáš Jánský	G V. Hlavatého, Louny	–	–	–	–	–	–	–	–	–	21	4	14
44.–45. Petr Šolc	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	35	4	14
46.–47. Daniel Perout	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	3	13
46.–47. Daniel Theis	G, Cheb	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	3	13
48.–49. Martin Felkl	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	34	3	11
48.–49. Ondřej Hejna	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	44	3	11
50. Tomáš Foral	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	–	45	2	10

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%“	%	Σ
		3	3	6	7	9	10	12	10	60	100	83	300
51.–52. <i>Laura Hanousková</i>	G J. Wolker, Prostějov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	21	2	9
51.–52. <i>Václav Sedlák</i>	S/PŠ Jedovnice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	2	9
53.–55. <i>Lívia Čerešňová</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	5	3	8	36	2	8
53.–55. <i>Ondřej Galuščák</i>	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42	2	8
53.–55. <i>Jakub Krátký</i>	S/PŠ Jedovnice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42	2	8
56.–58. <i>Brian Chu</i>	AWS, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	1	6
56.–58. <i>Daniel Ježek</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	1	6
56.–58. <i>Martin Uždil</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	46	1	6
59. <i>Martin Polyácsko</i>	G Alejová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	3
60. <i>Daniel Kubrt</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	20	0	2
61.–62. <i>Duong Phan</i>	Cumberland Valley HS, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	33	0	1
61.–62. <i>Veronika Staňková</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	10	0	1


Kategorie čtvrtých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%“	%	Σ
	Student	MFF UK	3	3	6	7	9	10	12	10	60	100	83	300
	1. Jaroslav Herman	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	3	6	2	4	6	9	12	45	89	74	266
	2. Martin Schmied	G, Jihlava	3	1	3	4	4	10	8	9	42	85	62	226
	3. Radka Krížová	G J. Heyrovského, Praha	3	1	3	2	-	-	8	6	23	80	55	199
	4. Viktor Materna	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	3	3	-	-	-	8	9	2	28	79	161
	5. Mohamed Ahmed El-sayed	STEM High School, Egypt	3	3	-	1	-	-	10	6	2	25	40	90
	6. Martin Ormoš	G J. A. Raymana, Prešov	3	1	1	-	4	-	0	4	13	46	22	81
	7. Mostafa Ahmed	STEM High School, Egypt	-	-	-	1	-	-	10	6	-	17	36	76
	8. Tomasz Twardoch	XIII LO w Szczecinie, Poland	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	64	17
	9. Jiří Zelenka	G Z. Wintra, Rakovník	3	3	-	-	-	-	-	-	-	6	88	15
10.-11.	Jan Benda	G, Litoměřická, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	91	14
10.-11.	Matěj Holubička	Zemědělská akademie a Gymnázium	3	1	0	1	-	-	-	-	-	5	55	14
	12. Veronika Hendrychová	G, Turnov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	68	14
	13. Mohamed Ayman	STEM High School, Egypt	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	27	13
	14. Jan Stoklasa	Mendelovo G, Opava	3	2	-	-	-	-	-	-	-	5	69	13
	15. Jaroslav Scheinpflug	G Jiřovcova, České Budějovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	94	12
	16. Martin Vavřík	G, Šumperk	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	105	10
	17. Ondřej Tomášik	G J. G. Tajovského	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	93	10
	18. Adam Grunt	G, Trutnov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	103	10
	19. Peter Ehab	STEM High School, Egypt	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	29	9
	20. Václav Zvoníček	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	55	9
	21. Jan Divila	G, Lesní čtvrť, Zlín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	53	9
22.-23.	David Kománek	G, Špitálská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	91	8
22.-23.	Tereza Němcová	G a SOŠ, Jaroměř	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	41	8
	24. Jan Piroutek	G, Špitálská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	70	7
	25. Samuel Krempaský	G L. Svobodu, Humenné	3	3	3	-	-	-	-	2	11	55	5	22
	26. Jindřich Maňas	G J. Pivečky, Slavičín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	80	5
	27. Mohamed Tarek Abdelmohsen Heggi	STEM High School, Egypt	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	28	5
	28. Eva Vochozková	Biskupské G, Brno	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	39	3
	29. Štefan Evin	G, Bardejov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	55	3
	30. Mostafa Khalil	STEM High School, Egypt	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	25	2
31.-32.	Šimon Prudil	Jiráskovo G, Náchod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	28	2
31.-32.	Jan Vondra	G Týn nad Vltavou	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	69	2
	33. Kornel Howil	XIII LO w Szczecinie, Poland	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	1
34.-35.	Aleksander Lenart	AGH U of Technology, Poland	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	0
34.-35.	Šimon Prudil	Jiráskovo G, Náchod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	0



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
18000 Praha 8

www: <http://fykos.cz>
e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/FYKOS>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.