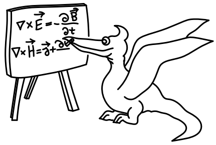

Seriál: Odhady

Úvod

Tento díl je věnován odhadům všeho druhu. Již jsme se s tímto tématem průběžně setkávali v předchozích dílech. Jde ale o důležitý základní princip ve fyzice. Proto jsme pro něj vyhradili speciální díl, abychom jej mohli probrat dostatečně podrobně.

Extremální odhady na základě zákonů zachování a jednoduchých úvah

Jak jsme zmiňovali již ve třetím dílu seriálu, můžeme využít zákony zachování k tomu, abychom provedli alespoň spodní či horní odhad hledané hodnoty. O zákonech zachování byl již jeden díl, proto se pouze stručně podívejme na jednu historickou úlohu.

Příklad – vody Zeměplochy jednoduše

Vybrali jsme problémovou úlohu 6. série 28. ročníku,[1] kterou nebudeme chtít řešit přesně, ale bude nám stačit alespoň hrubý spodní odhad. O co v úloze šlo? Na rovné kruhové desce o průměru 10 000 km se nachází voda do výšky 5 m. Máme zjistit, za jak dlouho by všechna voda stekla, pokud by na celé desce bylo konstantní tíhové zrychlení g. Jedná se o velice náročnou úlohu, pokud chceme výsledek přesně.

V případě že nechceme používat nic tak složitého jako v autorském řešení a chceme provést alespoň, zjevně silně podhodnocený, spodní odhad, pak můžeme vyjít ze zákona zachování energie. Určeme, jakou rychlost by mohla nabrat voda po pádu z 5 m a jak dlouho by jí s touto rychlostí trvalo, než by dosáhla okraje plochy. Rychlost po pádu je $v = \sqrt{2gh} \doteq 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Nejvzdálenější místo od okraje je střed desky. Od středu k okraji je to 5 000 km, tedy zhruba 140 h. Úplně minimalistický odhad tedy je, že by odtok vody trval 6 dní. Zanedbali jsme ale to, že voda ani nemůže nejdříve o tolik poklesnout, právě protože může odtékat pouze z okraje. Tedy celková doba bude jistě řádově delší.

Pokud by nás zajímalo, jestli i po jednom dni zůstane na ploše dost vody na to, abyste si mohli nalít skleničku – víme jistě, že ano. Pokud by se někdo ptal na dobu za měsíc, tak na to už takto snadno odpovědět nedokážeme a museli bychom použít složitější metody. Pro dokonalé řešení by bylo potřeba uvážit viskozitu vody, povrchové napětí a další parametry. Museli bychom také určit, jakou výšku vody v jakém místě považujeme za to, že voda zde ještě neodtekla. Voda totiž v tomto modelu zcela neodteče nikdy, protože nějaké menší množství se udrží povrchovým napětím.

Fermiho úlohy

Stručně řečeno, Fermiho úlohy[2] jsou relativně komplexní odhady, ve kterých se obvykle nepoužívá složitá matematika, ale dospějeme k řádově rozumnému výsledku pomocí logických úvah a snadných výpočtů. Seriálové úlohy této série jsou zadané právě ve stylu Fermiho úloh.

[1] `https://fykos.cz/_media/rocnik28/ulohy/pdf/uloha28_6_p.pdf`

[2] V České republice existuje stejnojmenná soutěž organizovaná pro středoškoláky Přírodovědeckou fakultou Univerzity Palackého v Olomouci – viz. `http://isouteze.upol.cz/fermi/`.

Enrico Fermi byl vědcem z první poloviny 20. století, který se věnoval jadernému výzkumu. Úlohy se po něm nazývají právě proto, že byl tímto způsobem myšlení proslulý. Prý při jednom jaderném testu pustil na zem arch papíru a na základě toho, jak daleko dopadl, během pár okamžiků odhadl relativně přesně sílu jaderného výbuchu.

Asi nejznámějším příkladem úlohy tohoto typu je odhadnout počet ladičů pian v nějakém americkém městě (které se podle autora liší). Postup může být následující. Nejprve odhadneme počet osob v daném městě, třeba 10 milionů. Pak odhadneme, na kolik osob pravděpodobně připadá jedno piano. Například, že zhruba každá desátá rodina by mohla mít piano. Na rodinu mohou připadat průměrně 4 osoby. To by znamenalo, že se v daném městě vyskytuje 250 000 pian. Kolikrát pak může být průměrný počet ladění ročně? Opět mohou být rozdíly mezi jednotlivými případy. Někdo ladí každý měsíc a někdo nikdy. Předpokládejme, že průměrně to bude jednou ročně. Pokud pak jeden ladič naladí za pracovní den 4 piána a má průměrně 200 pracovních dnů ročně, pak zvládne obsloužit 800 pian. To odpovídá tomu, že by mělo být v tomto městě zhruba 300 ladičů pian. Přesněji řečeno bychom asi měli říct, že považujeme za nejpravděpodobnější, že v desetimilionovém městě jsou řádově stovky ladičů pian. I když tato úloha postupně zastarává. Dnes už lidé spíš nakupují více elektronické klávesy, pro které ladiči pian nejsou potřeba.

Tento příklad byl spíše z oblasti ekonomie. Stejný přístup ale lze použít u otázek různé povahy. Dalo by se říct, že jde o inteligentní aplikaci selského rozumu.

Fermiho paradox

Zajímavým tématem týkajícím se odhadů je tzv. Fermiho paradox. Jde o to, že pokud je ve vesmíru nějaký další inteligentní život, proč jsme ho ještě nezaznamenali? Tzv. Drakeova rovnice[3] by nám měla říct, kolik současně existuje komunikace schopných mimozemských civilizací v naší galaxii. Nicméně ta samotná je souborem odhadů, které nejsou nijak podložené tvrdými daty. Další možností směru uvažování je skrze odhad rychlosti šíření civilizace v rámci galaxie s využitím hypotetického mezihvězdného pohonu mezi soustavami. Často nám ale vyjde čas, který je velice krátký ve srovnání s „dobou života vesmíru“. Proto se vědci snaží nalézt zdůvodnění, proč jsme ještě žádnou takovou civilizaci nepotkali. Námětů na takové odůvodnění je mnoho,[4] ale pravděpodobně nám nezbývá než jako běžným smrtelníkům počkat, jestli se dožijeme nějakého prvního kontaktu. Nebo se můžete zapojit do výzkumů s tím spojených, např. jako byl/je SETI,[5] či do návazných projektů.

[3]Velice stručný popis najdete na Wikipedii `https://cs.wikipedia.org/wiki/Drakeova_rovnice`. V anglické verzi najdete, jako obvykle, trochu více. Jde však o rovnici, která je diskutovaná a někteří vědci s ní nesouhlasí. V zásadě ale shrnuje parametry, které bychom měli odhadnout, abychom dostali alespoň nějaký odhad. Tedy na výsledek se v současnosti nedá vůbec spoléhat, ale je dobrým zamyšlením nad touto problematikou.

[4]Například 75 jich můžete nalézt v knize, která je celá věnovaná Fermiho paradoxu od Stephena Webba „If the Universe Is Teeming with Aliens ... WHERE IS EVERYBODY?: Seventy-Five Solutions to the Fermi Paradox and the Problem of Extraterrestrial Life“ (2. edice, 2015, Springer, ISBN 978-3319132358).

[5]Projekt SETI@home na `https://setiathome.berkeley.edu/`, který spočíval v tom, že kdokoliv mohl poskytnout výpočetní výkon svého počítače pro náročné výpočty, byl akorát v březnu 2020 pozastaven. Ale pokud budou dostatečné finance na provoz, pak bude probíhat analýza již získaných a zpracovaných dat. Pokud vás ale zaujala možnost pomoci vědcům poskytnutím výkonu svého počítače, pak vám můžeme doporučit Folding@home `https://foldingathome.org/`, v jehož rámci můžete pomoci při výzkumu nemocí, například aktuálně COVID-19.

Jak dlouho bude trvat …?

Zajímavou úlohou je, jak odhadnout okamžik, kdy něco zanikne, pokud máme k dispozici pouze dobu dosavadní existence dané věci, instituce apod. Předně je potřeba říct, že tento odhad vychází z Koperníkova principu. Ten předpokládá, že okamžik pozorování je náhodný. Pozorovatel, který činí tento odhad, by neměl být nějak význačný. Což samozřejmě není například ten, kdo navštívil slavnostní otevření. S odhady tohoto typu přišel John Richard Gott III,[6] když navštívil v roce 1969 Berlínskou zeď. Položil si otázku: „Jak dlouho asi ještě bude stát?“ Uvážil, že má 50 % šanci, že se přišel podívat v době, kdy zeď stála čtvrtinu až tři čtvrtiny ze své celkové doby. Učinil tak odhad, že zeď, která stála již 8 let (od roku 1961), bude zbořena s 50 % pravděpodobností někdy mezi lety 1971 ($1961 + 8 \cdot 4/3$) a 1993 ($1961 + 8 \cdot 3$). Při svém odhadování měl štěstí a zeď padla v roce 1989.

Tento intervalový odhad se dá ale upravit i např. na 95 % pravděpodobnost či i tzv. 5 sigma, tedy 99,9999 % pravděpodobnost. Nicméně čím vyšší pravděpodobnosti chceme dosáhnout, tím se intervaly rozšiřují a stávají se až neužitečně široké.

Podobným způsobem a mírně složitějšími úvahami můžeme odhadnout, že jsme se narodili na planetě, která má mezi osídlenými nadprůměrnou velikost, protože má i nadprůměrný počet jedinců. Tedy za předpokladu, že jsme měli stejnou pravděpodobnost se narodit jako jakýkoliv inteligentní druh. Ale jde samozřejmě pouze o odhad založený na statistickém modelu za současné znalosti 0 mimozemských civilizací. Ale lepší alespoň nějaký odhad než žádný.

Intrapolace a extrapolace

Ve fyzice často odhadujeme průběhy závislostí, kdy neznáme přesně teorii, ale dokážeme naměřit mnoho jiných dat v okolí. **Intrapolace** je označení pro situaci, kdy provádíme odhad uvnitř intervalu, kde máme okolní data – tedy máme změřeny jak nižší tak vyšší hodnoty. Příkladem intrapolace je to, jak byly odhadnuty vlastnosti chemických prvků při sestavování periodické tabulky. Mendělejev si tehdy uvědomil, že se vlastnosti prvků opakují s určitými periodami. Na základě toho jednak správně předpověděl existenci několika chemických prvků jako eka-aluminia (gallia) a eka-silicia (germania). Současně také předpověděl jejich základní vlastnosti na základě již známých prvků.

Extrapolace je již odvážnější proces, protože při něm odhadujeme mimo naměřený interval. Je zde proto větší pravděpodobnost, že náš odhad nebude přesný. Může se totiž stát, že se najednou výrazněji projeví nějaký jiný jev než ten, který byl dominantní na předchozím intervalu. Příkladem toho, kdy víme, že s extrapolací úplně dobře nepochodíme, je odpor vzduchu. Pro velice malé rychlosti můžeme uvažovat, že jde o laminární obtékání a síla je přímo závislá na první mocnině rychlosti (Stokesův odpor). Pro běžné rychlosti, kterých dosahuje třeba automobil, je dobré přiblížení pomocí turbulentního odporu, který je závislý na druhé mocnině rychlosti (Newtonův vztah pro odporovou sílu). Pro rychlosti blížící se rychlosti zvuku ve vzduchu pak odporová síla stoupá rychleji. Naopak po překročení rychlosti zvuku v daném prostředí dochází k tomu, že s dále rostoucí rychlostí klesá koeficient odporu a odporová síla neroste již tak rychle.

Ukázkou extrapolace je problémová úloha 2. série 31. ročníku FYKOSu,[7] kdy byly na základě metod pochopitelných pro středoškoláky odhadovány vlastnosti 118. prvku – oganessonu. Jsou zde použity standardní metody prokládání závislosti polynomem. Obecně je vhodné se omezovat

[6] `https://en.wikipedia.org/wiki/J._Richard_Gott`

[7] `https://fykos.cz/_media/rocnik31/ulohy/pdf/uloha31_2_p.pdf`

na polynomy nižšího řádu, protože s rostoucím stupněm polynomu nám funkce rychleji „ujede“, protože při výběru polynomu se snažíme minimalizovat jeho vzdálenost (resp. kvadráty rozdílů funkčních hodnot) od námi naměřených bodů, ale nijak neošetřujeme to, aby se choval rozumně i dále. Pokud to tedy data naznačují, pak je vhodné zůstat u lineární či kvadratické funkce.

Pokud funkce nevypadá na lineární, ale spíše na exponenciální či logaritmickou, můžeme fitovat na tu právě lépe odpovídající funkci. Pokud nemáme k dispozici počítač, můžeme využít vhodné transformace – např. převést jednu či obě osy na logaritmické a v té provést přibližné proložení graficky lineární funkcí, tedy pravítkem.

Taylorův rozvoj

Taylorův rozvoj (či polynom či řada) je způsob, jak převést jakoukoliv rozumnou funkci na polynom. S polynomy se nám totiž pracuje dobře, tak proč taky ne, že? Pokud nás pak zajímá chování funkce jenom blízko vybraného bodu, tak je Taylorův polynom to pravé.

Definice Taylorova rozvoje

Taylorův rozvoj je vlastně polynomiální řada, která nám přibližuje nějakou funkci pomocí polynomů. Námi vybranou funkci $f(x)$ můžeme zapsat alternativně jako

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{'''}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \,. \end{aligned}$$

Pokud tedy známe funkci – přesněji řečeno její hodnotu a hodnoty všech derivací v jednom bodě, můžeme určit i hodnotu funkce v jakémkoliv jejím dalším bodě. Je to možná překvapivé tvrzení, ale opravdu stačí, aby se dvě funkce rovnaly v jednom bodě ve funkční hodnotě a všech derivacích a měly stejný definiční obor, a jsou zcela identické.[8]

Pokud si zvolíme bod, ze kterého budeme vycházet jako $x_0 = 0$, což provádíme například u definice funkcí, nazývá se tato řada **Maclaurinova** a dá se zapsat ještě o něco jednodušeji jako

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{'''}(0)}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{k!}x^k \,.$$

Síla této řady spočívá v tom, že pokud nás zajímá pouze přibližné chování blízko bodu rozvoje této funkce, stačí nám započítat pouze několik prvních členů. Tyto řady využíváme hojně ve fyzice, když se snažíme pozorovanou závislost zjednodušit a na základě pár členů Taylorova rozvoje určit chování v nějaké oblasti. Například lineární aproximace není vlastně nic jiného než Taylorova řada prvního řádu. Čím více členů vezmeme, tím více se budeme blížit funkci, kterou takto přibližujeme a pro tím širší oblast bude naše aproximace platná.

[8] Za předpokladu, že dané fuknce jsou na celém vyšetřovaném intervalu hladké, neboli že se dají na celém intervalu libovolně krát derivovat.

Pokud byste potřebovali Taylorovu řadu pro více proměnných, tentokrát v okolí bodu $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, pak vypadá takto

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(x_1 - a_1)^{k_1}(x_2 - a_2)^{k_2} \dots (x_n - a_n)^{k_n}}{k_1! k_2! \dots k_n!} \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} f(a_1, a_2, \dots, a_n) \,.$$

Funkce můžeme rozkládat i do jiných řad – například do sinových a kosinových funkcí pro periodické funkce (Fourierovy řady), exponenciálních funkcí nebo zobecněných Taylorových řad pro komplexní čísla (Laurentovy řady).

Některé řady, které se mohou hodit

Abychom si nemuseli Taylorovu řadu odvozovat u každého příkladu znovu od začátku, je vhodné mít tabulku se základními řadami. Pokud byste si chtěli procvičit derivování, tak si je můžete zkusit sami odvodit. Některé užitečné a často používané odhady plynoucí z příslušných Taylorových polynomů, platící nejlépe v blízkém okolí $x = 0$, jsou zde

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &\approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \,, & \ln(1+x) &\approx x - \frac{1}{2}x^2 \,, \\ \frac{1}{1-x} &\approx 1 + x \,, & (1+x)^n &\approx 1 + nx \,, n \in \mathbb{R} \,, \\ \sin x &\approx x - \frac{1}{6}x^3 \,, & \sinh x &\approx x + \frac{1}{6}x^3 \,, \\ \cos x &\approx 1 - \frac{1}{2}x^2 \,, & \cosh x &\approx 1 + \frac{1}{2}x^2 \,, \\ \mathrm{tg}\, x &\approx x + \frac{1}{3}x^3 \,, & \mathrm{tgh}\, x &\approx x - \frac{1}{3}x^3 \,. \end{aligned}$$

Ačkoli to nesouvisí s Taylorovými řadami, často se hodí aproximovat faktoriál. Proto si zde uvedeme Stirlingův vzorec

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \,.$$

Limita relativistické energie

Podívejme se na praktický příklad využití Taylorova rozvoje. Ověříme, že když vyjdeme ze vztahu pro energii ve Speciální teorii relativity, dostaneme pro malé rychlosti klidovou energii plus kinetickou energii odpovídající klasické newtonovské mechanice.

Zaveďme obvyklé označení $\beta = \frac{v}{c}$, kde v je rychlost tělesa, c je rychlost světla, a označme

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \,.$$

Vezměme známý Einsteinův vzoreček pro energii tělesa/částice

$$E = mc^2 \,,$$

kde m je relativistická hmotnost částice, pro kterou platí $m = \gamma m_0$, kde m_0 je klidová hmotnost. Potom můžeme psát

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} m_0 c^2\,.$$

Nyní provedeme Taylorův rozvoj γ pro $\beta \to 0$ s tím, že se budeme zajímat o první tři členy

$$\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} = 1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left(\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}\right)\Bigg|_{\beta=0} \beta + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\beta^2}\left(\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}\right)\Bigg|_{\beta=0} \frac{1}{2}\beta^2 + O(\beta^3)\,.$$

Značení $O(\beta^3)$ znamená, že máme ještě nějaký zbytek, který je řádově úměrný β^3 či vyšším mocninám. To je právě to, co budeme chtít zanedbat. Dále

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left(\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}\right)\Bigg|_{\beta=0} = \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{\beta=0} = 0\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\beta^2}\left(\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}\right)\Bigg|_{\beta=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left(\frac{\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\Bigg|_{\beta=0} = \frac{1+2\beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{5}{2}}}\Bigg|_{\beta=0} = 1\,.$$

Při malých rychlostech ve srovnání s rychlostí světla dostáváme pro energii vztah

$$E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + O\left(\beta^3\right)\right)\,.$$

Pokud se tedy omezíme na přiblížení β^2, pak má celková energie tělesa, po přepsání na středoškolsky užívané veličiny, tvar

$$E \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2\,.$$

Skutečně dostáváme dva členy odpovídající jednak klidové energii tělesa $m_0 c^2$, která se nám v klasické fyzice nijak neprojevuje, a jednak klasické kinetické energii $\frac{1}{2} m_0 v^2$.

Závěr a upoutávka na příště?

Prošli jsme vybrané metody, jak relativně rychle dostat alespoň přibližný výsledek. Snad by se z nich dost dalo označit za triky. Nezapomínejte ale i na aplikaci selského rozumu. Zmínili jsme také pár tipů, jak psát řešení úloh lépe. Určitě se vám aspoň něco bude hodit při řešení FYKOSu či dalších soutěží, nebo při formálních záležitostech, třeba i během psaní protokolů či závěrečných prací.

Právě teď by bylo zajímavou úlohou odhadnout okamžik, kdy dojde v České republice či celosvětově ke kulminaci počtu nově nakažených SARS-CoV-2 či kdy dojde k poklesu počtu aktuálně nakažených. Nechtěli jsme být ale příliš zlomyslní. Současně doufáme, že tyto okamžiky nastanou ještě před odesílacím termínem série. Negativními faktory pro předpovědi šíření tohoto viru je třeba i to, že není ještě moc přesně známo, jaký podíl nakažených může překonat nemoc bez nějakých výraznějších příznaků. Také se situace mění den ze dne díky opatřením, která jsou neustálě upravována. Tím pádem se dá očekávat, že jednoduché předpovědní modely ani nemohou být úspěšné s dostatečnou přesností.

Co bude příště? Tak to ještě nevíme. V době, kdy se psala tato kapitola seriálu, ještě nebylo známé téma dalšího ročníku. Určitě se můžete těšit na další zajímavé úlohy. Pokud se nemůžete dočkat dalšího čtení a máte trochu času, připomínáme, že se můžete podívat na minulé ročníky seriálu a úloh ve FYKOSu či na knihovničku Fyzikální olympiády.

Uvítáme zpětnou vazbu k průběhu letošního seriálu. Můžete získat i bonusový bod, pokud nám napíšete, jak se vám líbily úlohy. Jestli vám vyhovovalo to, že seriál byl spíše roztříštěný, co se týče oblastí fyziky a jednotlivé díly navazovaly jenom volně. Také můžete napsat, jestli vám něco chybělo – případně bychom mohli něco doplnit do textu seriálu na web. Rozhodně bychom pak chtěli vědět, pokud jste našli nějaké nepřesnosti v textu seriálu či ve vzorových úlohách (i mimo seriál). Za to nabízíme také bonusový bod či i více bodů, pokud najdete takových záležitostí větší množství.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.