



Seriál: Extrémy ve fyzice

Úvod

Hledání extrémů je ve fyzice velice důležitou disciplínou. Řešení fyzikální úlohy můžeme často najít tak, že jednoduše maximalizujeme či minimalizujeme nějakou veličinu. Dalo by se říct, že příroda je často líná¹ a snaží se minimalizovat potenciální energii či dojít z bodu A do B tím nejrychlejším způsobem.

Jiný pohled na extremalizaci je takový, že nám v kombinaci se zákony zachování dává omezení na to, kam se nám může těleso dostat za libovolnou dobu (pokud nedojde k vnějšímu zásahu do systému). Například když tělesu na Zemi udělíme menší než první kosmickou rychlost,² tak víme, že časem zase spadne na Zem. Samozřejmě za předpokladu, že jej dál neurychlujeme, jako tomu je u raket. Ti, kteří znají kosmické rychlosti, si mohou říct, že jim na to stačí i méně omezující druhá kosmická rychlost,³ ale u rychlostí o něco málo nižších než 2. kosmická se již můžeme docela snadno dostat do blízkosti dalších těles sluneční soustavy, kde se může pomocí gravitačního praku naše těleso urychlit či zpomalit.

V optice lze uvažovat, že světelné paprsky se pohybují po extrémálních drahách. V klasické optice se světlo pohybuje po drahách odpovídajících nejkratšímu času. Ve speciální teorii relativity se (ve vakuu) pohybuje po tzv. světelném kuželu a v obecné teorii relativity po potenciálně výrazně složitějších geodetikách. V obou teoriích relativity je pro pohyb světla ve vakuu specifické to, že prostorčasový interval mezi událostí vyzáření a událostí absorpce je nulový.

Nezapomínejme na zákony zachování

Podívejme se rovnou na konkrétní příklad. Jak nejlépe se může přiblížit nějaký asteroid k hvězdě o hmotnosti M , když přilétá z velké dálky s rychlostí v_0 a impaktním parametrem b ? Předpokládáme, že tuto rychlost má v „nekonečné vzdálenosti“. Impaktní parametr je odborný výraz pro vzdálenost od původní přímky pohybu našeho asteroidu a středu hvězdy. Jinak řečeno, je to vzdálenost jejich středů, kterou by tělesa měla v nejbližším bodě, pokud by gravitačně neinteragovala.

Pro jednoduchost budeme dále uvažovat, že můžeme obě tělesa považovat za hmotné body a že asteroid má zanedbatelně malou hmotnost oproti hvězdě. Dostáváme se k tomu, proč je tato úloha zařazena do zákonů zachování. Na počátku má totiž asteroid nenulový moment hybnosti vůči hvězdě a jeho velikost zůstává konstantní v průběhu celého pohybu, je dána jeho velikostí na počátku

$$L = mbv_0, \quad (1)$$

kde jsme hmotnost asteroidu označili m . Jaká bude situace v okamžiku největšího přiblížení? V tu chvíli bude vektor vzdálenosti r kolmý na vektor rychlosti tělesa. Můžeme opět psát vztah pro velikost momentu hybnosti

$$L = mrv, \quad (2)$$

¹Možná ještě více než autor tohoto seriálu či ti řešitelé, kteří si seriál stejně nechtou.

²První kosmická rychlost odpovídá kruhové dráze kolem planety.

³Minimální úniková rychlost z povrchu planety, která je $\sqrt{2}$ násobkem první kosmické rychlosti.

kde v je rychlost při průchodu nejbližším bodem k hvězdě. Máme také zákon zachování energie, který využijeme

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}, \quad (3)$$

kde G je gravitační konstanta. Z dvou výrazů (1) a (2) pro moment hybnosti dostáváme

$$v = \frac{b}{r}v_0,$$

což dosadíme do vztahu pro energii (3). Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici pro r , kterou vyřešíme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_0^2 &= \frac{1}{2}\frac{b^2}{r^2}v_0^2 - \frac{GM}{r}, \\ 0 &= r^2 + \frac{2GM}{v_0^2}r - b^2, \\ r_{1,2} &= -\frac{GM}{v_0^2} \pm \sqrt{\frac{G^2M^2}{v_0^4} + b^2}. \end{aligned}$$

Vybereme řešení s kladným znaménkem, protože to je jediné kladné. Nejbližší vzdálenost, do které se asteroid dostane, je

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{G^2M^2}{v_0^4} + b^2} - \frac{GM}{v_0^2}.$$

Částečně si můžeme ověřit výsledek tak, že se podíváme na případ $b = 0$ m. Vzdálenost r_{\min} vyjde nulová, což bychom čekali. Zkusme do výsledku dosadit také nějaké potenciálně zajímavé hodnoty. Uvažujme hvězdu podobnou Slunci s hmotností $M = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg a asteroid, který má impaktní parametr $b = 1,0$ au a rychlost v nekonečnu odpovídající třetí kosmické rychlosti $v_0 = 42 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Potom vychází $r_{\min} = 0,62$ au. Pro tuto kombinaci parametrů tedy dávají použitá přiblížení dobrý smysl – asteroid neskončí ve hvězdě, předpokládáme-li že se na své cestě nesblíží s nějakou planetou.

Doplnění na čtverec

Pod heslem „pro jednoduché případy můžeme použít jednoduché metody“ se nejdříve podívejme na metodu, kterou najdeme extrém u polynomu druhého stupně, neboli u funkce

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

kde a , b a c jsou konstanty a x je proměnná. Doplnění na čtverec spočívá v tom, že funkci upravíme na tvar

$$f(x) = k(x - x_0)^2 + y_0. \quad (4)$$

Jak to uděláme? Ukažme si obecný postup

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c. \end{aligned}$$

Získali jsme tak požadovaný tvar. Konstanty z rovnice (4) odvodíme snadno

$$\begin{aligned} k &= a, \\ x_0 &= -\frac{b}{a}, \\ y_0 &= c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Co ale náš výsledek znamená? Hledali jsme extrém. Parabola s kladným koeficientem a jde z $+\infty$ pro $x = -\infty$ do $+\infty$ pro $x = +\infty$. Mezi těmito limitními hodnotami má právě jedno minimum, které najdeme v bodě $x = x_0$. Proč je to extrém? Pokud se podíváme na vztah (4), vidíme, že y_0 je konstanta a pro $x = x_0$ je $f(x)$ rovna právě y_0 , ale pro jiné hodnoty x je vždy vyšší. Současně v tomto tvaru snadno vidíme, jestli by měla kvadratická rovnice $f(x) = 0$ řešení. V případě, že $y_0 = 0$, má rovnice právě jedno řešení v x_0 . Pokud $y_0 < 0$, má rovnice dvě řešení. Pokud $y_0 > 0$, pak rovnice nemá žádné řešení. Sami si rozmyslete, co by se na těchto úvahách změnilo, pokud by byl koeficient k záporný.

Tato metoda je dobrá v tom, že nemusíte znát vysokoškolskou matematiku. Její nevýhodou je, že se nedá nějak snadno zobecnit ani na vyšší stupně polynomů, natož na další složitější funkce.

Derivace

Úvod k derivacím

Ti, kteří derivace znají, mohou přeskóčit až k poslední části této podkapitoly.

Základní metodou hledání extrémů v matematice je derivování. Derivace funkce je vlastně jenom jiná funkce, která má hodnotu směrnice tečny k původní funkci v daném bodě. Jinak řečeno nám říká, jak moc se nějaká funkce mění. Pokud je derivace nulová, pak v daném bodě funkce neroste ani neklesá. Kladná derivace znamená, že funkce roste a to tím víc, čím je hodnota derivace vyšší. V oblasti, kde je derivace záporná, funkce klesá.

Podrobnější texty o derivacích naleznete například v archivu maturitního semináře,⁴ který pořádal FYKOS v minulosti, ve středoškolské učebnici Diferenciální a integrální počet (Dag Hrubý a Josef Kubát, Prometheus) či na různých dalších webech.⁵ Zde se v rámci stručnosti výkladu omezíme na polynomiální funkce, tedy

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (5)$$

⁴https://fykos.cz/_media/akce/rseminar/derivace_1_.pdf

⁵Například <https://matematika.cz/derivace>.

Silně však doporučujeme, pokud ještě derivace neovládáte, začněte se je učit, protože ve vysokoškolské fyzice (nebo v některých příkladech z FYKOSu) se jim nevyhnete. Navíc nám mohou výrazně usnadnit řešení úloh, kde bychom se k výsledku jinak dostávali velice pracně.

Tab. 1: Příklady vztahů ve fyzice, ve kterých vystupují derivace.

Vztah	Popis
$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$	Rychlost v je derivace polohy x podle času t .
$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$	Zrychlení a je derivací rychlosti v podle času t .
$\mathbf{j} = \dot{\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} = \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3}$	Ryvn j (anglicky <i>jerk</i>) je derivací zrychlení a podle času t .
$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$	Úhlová rychlost ω je derivací úhlu rotace φ podle času t .
$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$	Úhlové zrychlení ε je derivací úhlové rychlosti ω podle času t .
$\frac{dE_k}{dt} = -\frac{dE_p}{dt}$	V konzervativních systémech je změna potenciální energie E_p v čase stejně velká, ale opačného znaménka jako změna kinetické energie E_k . Na tento vztah se můžeme také dívat jako na diferenciálně zapsaný zákon zachování mechanické energie.
$P = \frac{dW}{dt}$	Výkon P je derivace práce W podle času t .
$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{a}$	Pro situace s konstantní hmotností tělesa je síla F úměrná hmotnosti m a zrychlení tělesa a .
$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$	Síla F je derivací hybnosti p podle času t .
$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$	analogie předchozího pro otáčivý pohyb, moment síly M je derivací momentu hybnosti L .
$\mathbf{F} = -\nabla V$	Síla F je mínus gradient potenciálu V . Derivace jsou schované ve znaku ∇ nazývaném nabra, který je definovaný jako vektor $\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$.
$I = \dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$	Elektrický proud I je změna elektrického náboje Q za čas t .
$U_i = -\dot{\Phi} = -\frac{d\Phi}{dt}$	Elektrické napětí U_i indukované ve smyčce vodiče je mínus derivace magnetického toku Φ .
$I(t) = C\dot{U}(t) = C\frac{dU(t)}{dt}$	Proud $I(t)$ kondenzátorem o kapacitě C určíme v případě jiného, než stejnosměrného proudu, pomocí derivace přivedeného napětí $U(t)$,
$U(t) = L\dot{I} = L\frac{dI(t)}{dt}$	napětí $U(t)$ na cívce o indukčnosti L z derivace procházejícího proudu $I(t)$.

Rovnou si řekneme, že polynom ze vztahu (5) má derivaci

$$f'(x) = a_n n x^{n-1} + a_{n-1} (n-1) x^{n-2} + \dots + a_1.$$

Všimněte si, že derivace konstantního polynomu je všude identicky nulová. To je z logiky věci správně, protože konstantní funkce se nikde nemění.

Kde hledat extrémy?

Předně si vždy musíme uvědomit, na jakém intervalu je vůbec má smysl hledat. Například – má v úloze smysl záporná délka? Pokud jde o prodloužení tyče, třeba při změně teploty, tak to

může dávat smysl. Ale pokud by vyšlo minimum pro zápornou délku tyče, pak to zjevně reálné minimum nebude. Kromě toho si musíme uvědomit samotný rozsah intervalu, na kterém jsou výsledky rozumné. Například těžiště tyče metr za jejím koncem by nás mělo upozornit na to, že je něco špatně.

Proto bychom měli vždy zvážit, jaké hodnoty nabývá funkce, jejíž extrém hledáme, na krajích intervalu. Pokud jde o funkci klesající na celém intervalu, její maximum bude na začátku a minimum na konci intervalu. U rostoucí funkce to bude právě naopak.

Když toto jednoduché pozorování nestačí, zkusíme hledat extrém pomocí derivace. Pokud narazíme na bod, který nelze zderivovat, tak je podezřelý z extrému a musíme jej prozkoumat podrobněji⁶. Další podezřelé body budou ty, kde je derivace nulová. Nulovost derivace pro diferencovatelnou funkci je totiž nutným předpokladem pro extrém mimo okraj intervalu. Není to ale postačující podmínkou. Příkladem může být funkce $f(x) = x^3$, která má derivaci $f'(x) = 3x^2$, která je v $x = 0$ nulová. Přitom ale víme, že funkce je neklesající. V bodě $x = 0$ má pouze inflexní bod, kde dojde ke změně z konkávní funkce na konvexní.

Jedním způsobem, jak ověřit, jestli jde skutečně o minimum či maximum, je dosadit do funkce hodnotu v daném bodě a nějaké hodnoty v blízkosti potenciálního extrému. Například u $f(x) = x^3$ víme, že jediný nulový bod derivace ($3x^2$) je v $x = 0$. Dosadíme např. $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$. Ihned vidíme, že nepůjde o extrém – hodnoty se pro rostoucí x zvětšují. Jiným příkladem je funkce $g(x) = x^2$, která má derivaci $g'(x) = 2x$. Ta je opět nulová v nule, což je také jediný podezřelý bod, kromě okrajů intervalu. Dosazením stejných bodů jako předtím dostáváme $g(-1) = 1$, $g(0) = 0$ a $g(1) = 1$. Vidíme, že před podezřelým bodem musela funkce klesat a potom zase růst, takže se jedná o minimum.

Pro ty, co se najdou v derivování, je vhodný alternativní postup. Ten se může hodit i u zobecnění na vícedimenzionální problémy, i když v tom případě se to také o něco zkomplikuje. Jde o to podívat se na druhou derivaci, například $g''(x) = 2$. Vidíme, že druhá derivace je v bodě $x = 0$ kladná a proto půjde o minimum. Pokud by byla druhá derivace záporná, šlo by o maximum. Pokud ale vyjde 0, jako například $f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0$, pak tento postup nerozhodne o tom, jestli jde o maximum, minimum, nebo inflexní bod a je potřeba použít něco jiného.

Měli bychom poznamenat, že důležité je řešit i to, jestli je extrém pouze lokální, například jeden vrcholek z mnoha vrcholků – nebo jestli je globální, tedy jde o zcela maximální (či minimální) hodnotu funkce na intervalu a nikde jinde vyšší (či nižší) nenajdeme.

Příklady derivací

Příklad 1: Nalezněte extrémy funkce $f(x) = x^3 - 12x$ na intervalu $\langle 0, 5 \rangle$.

Můžeme začít tím, že se podíváme na hodnoty na okraji intervalu, které jsou $f(0) = 0$ a $f(5) = 65$. Tím jsme získali dva body podezřelé z extrému. Funkce je definovaná na celém intervalu, a tak ji můžeme zderivovat a dostáváme $f'(x) = 3x^2 - 12$. Podezřelé body z extrému jsou nulové body derivace. Rovnice $3x^2 - 12 = 0$ má dvě řešení, z nichž -2 leží mimo interval. Zajímáme se tedy pouze o hodnotu v bodě 2, která je $f(2) = -16$.

Již v tuto chvíli bychom mohli říct, že maximum je $f(5) = 65$ a minimum je $f(2) = -16$, protože funkce f je spojitá (jinak řečeno, nejsou v ní přítomny žádné skoky). Z cvičných důvodů ale spočítáme druhou derivaci funkce $f''(x) = 6x$. Druhá derivace v podezřelém bodu, který

⁶Třeba v případě $1/x$ víme, že v nule funkce skočí z mínus nekonečna do plus nekonečna. Derivace tady není definována, stejně jako funkční hodnota. Tento případ je specifický tím, že v jednom bodě zleva dostáváme minimum a v tom samém bodě zprava maximum.

jsme získali derivováním, je $f''(2) = 12$. Hodnota druhé derivace je kladná, a proto jde o lokální minimum. Protože je naše funkce omezená na zadaný interval $\langle 0, 5 \rangle$, můžeme prohlásit, že jde o globální minimum.

Pokud by byla funkce f definována na celých reálných číslech, pak by byl postup obdobný, ale prozkoumali bychom ještě $f(-2) = 16$, což by bylo lokální maximum. Globální extrémy by ovšem byly nevlastní⁷ v nevlastních bodech,⁸ totiž $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Příklad 2: Nalezněte extrémy funkce $f(x) = x^5 + x$ na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.

Začněme tentokrát s derivací $f'(x) = 5x^4 + 1$. Rovnice $5x^4 + 1 = 0$ nemá v reálných číslech žádné řešení, proto není žádný bod podezřelý z extrému. Funkce by rostla na celých reálných číslech. My ji máme omezenou na interval $\langle 0, 2 \rangle$. Proto bude minimum v počátečním bodě a maximum v koncovém bodě intervalu, přičemž budou mít hodnoty $f(0) = 0$ a $f(2) = 34$.

Kde ve fyzice nalezneme derivace?

Jednoduše řečeno, všude. V tabulce 1 jsou nejnámější příklady i s ukázkou toho, jak derivace značíme ve fyzice. Pokud místo čárek použijeme tečky, dáváme tím najevo, že jde o úplnou derivaci podle času.

Znakem ∂ (místo d) značíme parciální derivace – tedy takové, kdy naše funkce závisí na více proměnných, ale my se zajímáme pouze o to, jak se mění podle jedné proměnné.

Opačnou, čili inverzní operací k derivaci je integrace. S tou se také budete setkávat často. Derivace a integrály se uplatňují ve všech možných dalších vztazích, které pak mají formu diferenciálních rovnic.

Řešení pomocí počítače

Využití počítačového programu, který extremalizaci provede za vás, se může hodit v následujících případech:

- Sami neumíte derivovat.
- Funkce je příliš složitá na to, co umíte zderivovat.
- Chcete výsledek získat rychleji, zejména u komplexnějšího problému.
- Pokud si chcete ověřit výsledek.

Ačkoli v dnešní době už některé programy počítají derivace analyticky, i tak si vždy musíme dát pozor. U numerických metod může být kromě nižší přesnosti problémem to, že metoda nalezne pouze některý z lokálních extrémů, zatímco my hledáme globální extrém. Proto je vždy vhodné si například zobrazit graf funkce.

Nástroj, který můžeme nejvíce doporučit a který je pro jednodušší úlohy zdarma na internetu, je WolframAlpha.⁹

⁷ Jejich hodnoty jsou $\pm\infty$, což nejsou reálná čísla, čili jich funkce f nemůže nabývat.

⁸ Opět, $\pm\infty$ nejsou reálná čísla a proto v nich funkce f není definována.

⁹ <https://www.wolframalpha.com>

Příklad – výlet

Fykosák si vyšel na výlet, během kterého chtěl popsat nadmořskou výšku na základě uražené vzdálenosti. Výlet byl dlouhý 5,0 km a funkce, která dostatečně dobře popisuje nadmořskou výšku terénu, je

$$f(x) = -\frac{x^4}{6 \cdot 10^{13} \text{ m}^3} + \frac{x^3}{5,7 \cdot 10^9 \text{ m}^2} - \frac{x^2}{20\,000 \text{ m}} + \frac{10x}{42} + 260 \text{ m}.$$

Zajímalo by nás, jaké vertikální převýšení Fykosák musel překonat a kde byl nejvyšší a nejnižší bod jeho cesty.

Taková dlouhá čísla se nám určitě nechce přepisovat. Navíc bychom je stejně nemohli bezmyšlenkovitě „vrazit do kalkulačky“, protože první člen má příliš mnoho cifer. Proto využijeme WolframAlpha. Zadáme-li do něj

```
-x^4/6e13+x^3/5.7e9-x^2/20000+10x/42+260 on (0,5000)
```

vykreslí se nám funkce a získáme alespoň nějakou představu. Vidíme, že minimum bude na konci výletu a maximum někde po cestě. Mimochodem nám WolframAlpha vypíše i „Arc length of curve“, tedy délku křivky, což je i pěší délka výletu, která je přibližně 5 051 m.

Podívejme se na koncový bod – zadáme

```
-x^4/6e13+x^3/5.7e9-x^2/20000+10x/42+260 for x=5000
```

a dostáváme $f(5,0 \text{ km}) \doteq 212 \text{ m}$. Obdobně můžeme zjistit, že $f(0,0 \text{ km}) = 260 \text{ m}$. Nadmořská výška místa, odkud Fykosák vyšel, je tedy 260 m a místo, kde výlet skončil, má nadmořskou výšku zhruba 212 m.

Funkci na našem intervalu zderivujeme

```
derivative -x^4/6e13+x^3/5.7e9-x^2/20000+10x/42+260 on (0,5000)
```

a zjistíme, že v celém intervalu derivace klesá a nulová je pro nějaký bod uvnitř intervalu. Tento bod určíme pomocí vyhledání řešení rovnice

```
(derivative -x^4/6e13+x^3/5.7e9-x^2/20000+10x/42+260) = 0 on (0,5000)
```

Jediný reálný kořen je pro $x \doteq 2\,402 \text{ m}$. Tuto hodnotu opět dosadíme do funkce a dostaneme $f(2,402 \text{ km}) \doteq 545 \text{ m}$.

Celkově můžeme shrnout, že Fykosák nejdříve vystoupal 285 m z nadmořské výšky 260 m do 545 m. Od vrcholu pak už stále klesal, celkem 333 m do nadmořské výšky 212 m.

Závěr a upoutávka na příště

V tomto dílu seriálu jsme se vás snažili přesvědčit o tom, jak je ve fyzice důležité hledání extrémů. Také doufáme, že se nám podařilo naučit vás některé metody, které se při extremalizaci používají. Nedá se ale říct, že by témata seriálu byla separovaná – opět jsme se vrátili například k zákonům zachování.

V příštím dílu čekejte odhady, odhady a odhady. Fyzika není vždycky o tom dokázat něco spočítat přesně. Často je důležité provést alespoň řádový odhad, abychom zjistili, jestli se nějaký jev v našem experimentu projeví. Naopak nezbytné je umět odhadnout, zda může být

naše řešení reálné či nikoli. Schopnost odhadovat se ale hodí i v ekonomii a v dalších vědách, kde pro nedostatek vstupních dat nebo díky příliš složitým modelům není možné počítat přesně.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.