Úloha III.4 ... destrukce smyčky

8 bodů; průměr 6,00; řešilo 25 studentů

Představme si měděnou smyčku o poloměru r, která je určena rovinou, na níž je kolmé magnetické pole s magnetickou indukcí B. Maximální povolené tahové napětí ve smyčce je σ_p. Nyní začneme měnit magnetický tok ve smyčce z původní hodnoty Φ_0 podle vzahu $\Phi(t) = \Phi_0 + \alpha t$, kde α je kladná konstanta. Určete, za jak dlouho dosáhneme ve smyčce maximálního tahového napětí.
Nápověda: Napěťovou sílu ve smyčce můžeme spočítat jako $T = |BIr|$.

Vítek vzpomíná na AP Physics.

Zamysleme se nad tím, co se v úloze děje. V okamžiku, kdy začneme měnit magnetický tok procházející smyčkou, se v ní začne indukovat napětí a tedy i proud. Tuto skutečnost nám popisuje Lenzův zákon, který říká, že indukovaný elektrický proud v uzavřeném obvodu má takový směr, že svým magnetickým polem působí proti změně magnetického indukčního toku, která je jeho příčinou. Systém se snaží jakoby vrátit do původního stavu, a proto má Lenzovská indukce směr opačný původnímu B. Řečí matematiky

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = -\alpha\,.$$

Indukovaný proud ve smyčce pak určíme snadno pomocí Ohmova zákona. Označíme-li odpor smyčky jako R, pak

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{\alpha A}{\varrho 2\pi r}\,,$$

kde A je průřez smyčky a ϱ rezistivita materiálu. Je zřejmé, že T závisí na B, a to závisí na čase. Pro moment t_0, kdy dosáhneme maximálního tahového napětí, musí platit následující podmínka

$$\sigma_p = \frac{T(t_0)}{A} = \frac{B(t_0)I\ r}{A} = \frac{B(t_0)\alpha}{2\varrho\pi}\,.$$

Dále musíme určit $B(t_0)$, z definice[1] získáme

$$B(t_0) = \frac{\Phi(t_0)}{\pi r^2} = \frac{\Phi_0 + \alpha t_0}{\pi r^2}.$$

Nyní stačí dosadit za $B(t_0)$ do vztahu pro tahové napětí, to pak přejde na

$$\sigma_p = \frac{(\Phi_0 + \alpha t_0)\alpha}{2\varrho\pi^2 r^2}.$$

Cílem úlohy bylo zjistit, za jaký čas se toto stane. Proto ze vztahu výše vyjádříme t_0, finální výraz pak je

$$t_0 = \frac{2\pi^2\varrho r^2\sigma_p}{\alpha^2} - \frac{\Phi_0}{\alpha}.$$

V řešení jsme mlčky zanedbali vlastní magnetické pole indukovaného proudu. Z průřezu A bychom si mohli dopočítat vlastní poloměr vodiče a odhadnout velikost intenzity vlastního magnetické pole, nicméně typická smyčka má vlastní poloměr mnohem menší než poloměr R a tudíž můžeme tuto skutečnost zanedbat. Při řešení jsme taktéž zanedbali vlastní změnu rozměrů smyčky.

[1] Magnetický indukční tok vytvářený magnetickou indukcí $\boldsymbol{B}$ na libovolně orientované ploše S je definován jako $\Phi = \int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$. Pro homogenní pole a rovinou plochu platí $\Phi = BS\cos\alpha$ (úhel α svírá normálový vektor plochy s vektorem magnetické indukce). V našem případě jsou na sebe vektory kolmé.

Pro zájemce

Tyto řádky jsou věnované řešitelům, kteří by rádi věděli, jak si odvodit nápovědu v zadání. Jak již víme z textu výše, v uzavřené smyčce se začne indukovat proud. Proto začne na vodič působit síla ve směru do středu smyčky (viz. obrázek) podle Ampérova zákona síla dána jako

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\ \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B},$$

kde d$\boldsymbol{l}$ je malý element smyčky. Ten si můžeme vyjádřit pomocí malého úseku $\mathrm{d}\Theta$ jako $r\mathrm{d}\Theta$. Protože jsou na sebe vektory v rovnici kolmé, tak se vztah zjednoduší na

$$\mathrm{d}F = I\ Br\mathrm{d}\Theta.$$

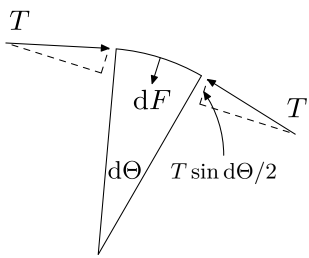
Z obrázku nyní můžeme vyjádřit tahovou sílu ve smyčce v závislosti na malém úhlu $\mathrm{d}\Theta$. Horizontální složky se vyruší (jsou rovny $T\cos\mathrm{d}\Theta/2$) a výsledná síla dovnitř smyčky (působící proti $\mathrm{d}F$) je dána součtem dvou vertikálních složek, získáme tedy

$$\mathrm{d}T = 2T\sin\frac{\mathrm{d}\Theta}{2} \approx T\mathrm{d}\Theta\,,$$

kde jsme použili aproximaci pro malé hodnoty argumentu funkce sinus. Z podmínky rovnováhy pak máme

$$I\ Br\mathrm{d}\Theta = T\mathrm{d}\Theta \qquad \Rightarrow \qquad T = I\ Br.$$

A máme dokázáno. Tento princip je ve fyzice velmi častý a doporučuji ho řádně prostudovat.[2]



Obr. 1: Obrázek k nápovědě

Vít Beran
vit.beran@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[2] Dalším typickým příkladem na něj je např. capstan equation.