

Úloha II.E ... listopad

12 bodů; (chybí statistiky)

Změřte průměrnou vertikální rychlost padajícího listí. Použijte listy z několika různých stromů a diskutujte, jaký vliv má tvar listu na rychlost pádu. Jak by měl vypadat ideální list, pokud bychom chtěli, aby padal co nejpomaleji?

Napadla Jáchyma, když se ptal kamaráda, jestli nezná nějaký zajímavý experiment.

Teória

Ak padá teleso v homogénnom gravitačnom poli, ktoré sa nachádza pri povrchu Zeme, zvyčajne uvažujeme voľný pád. Aby boli splnené predpoklady voľného pádu, musí byť odporová sila vzduchu, ktorá pôsobí na padajúce teleso, zanedbateľne malá oproti tiažovej sile. V prípade padajúceho listu však toto neplatí.

List má príliš veľkú plochu v pomere k svojej hmotnosti. Pri analýze pádu listu teda nemôžeme zanedbať odporovú silu. Pre turbulentné prúdenie vzduchu okolo listu platí vzorec pre odporovú silu

$$F_o = \frac{1}{2} C_{\rho} S v^2 .$$

C je činiteľ odporu, ktorý zohľadňuje tvar a kvalitu povrchu telesa, ρ je hustota vzduchu, S je plocha prierečného prierezu telesa kolmá na smer pohybu a v je rýchlosť pohybu telesa.

Ak by mal list vhodný tvar, aby sa netočil počas pádu, v istom okamihu by sa tiažová sila vyrovnala odporovej a list by padal rovnomerne priamočiario. Avšak keďže listy majú rôzne zvláštne tvary, ktoré nie sú ani zďaleka ideálne na nastolenie dynamickej rovnováhy síl, list sa počas pádu otáča, mení svoju rýchlosť a pohybuje sa po veľmi zložitej trajektórii.

Rýchlosť pádu tiež závisí od toho, ako veľmi je list suchý, či je skrútený a či môže bez poškodenia meniť svoj tvar pri páde. Trajektória pádu, otáčanie listu a teda aj priemerná rýchlosť bude pre konkrétny list závisieť na jeho počiatočnom natočení, spôsobe vypustenia, prípadných záchvevov vzduchu a ďalších faktoroch, ktoré nemôžeme spoľahlivo ovplyvniť. Budeme sa teda spoliehať na to, že meranie pre každý list bude dostatočne početné, aby sme získali rozumnú štatistiku, z ktorej dostaneme priemernú rýchlosť s primeranou odchýlkou.

Postup pri experimente

Natrhali sme si listy zo stromov, prípade nazbierali už opadané, ale zachované. Vyberali sme listy z 8 stromov a kríkov, pričom sme sa snažili o diverzitu veľkostí.

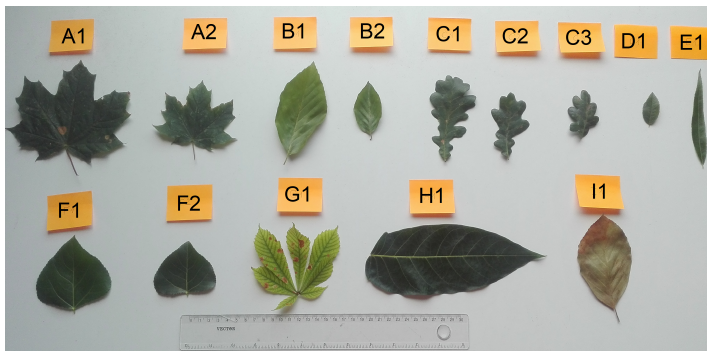
Potom sme listy odvážili na laboratórnych váhach, výsledky sú v tabuľke 2. Zdokumentovali sme ich rozmery pomocou obrázku 1.

Jednotlivé listy sú označené písmenami, pričom písmenom im priradujeme druh podľa legendy v tabuľke 1.

Následne sme si pripravili bod na stene vo výške $h = 1,95$ m nad podložkou a nahrávaciu aparatúru s kamerou. Z výšky určenej značkou na stene sme voľne púšťali list (snažili sme sa neudelieť listu žiadnu počiatočnú rýchlosť) a celý pád nahrávali. Potom sme postup opakovali, približne desať krát pre každý list.

Nahrávky pádov listov sme spracovali pomocou programu Tracker. Jeho použitím sme zistili počet snímkov n , na ktorých bol list v stave pádu. Zo znalosti snímkovacej frekvencie kamery f^1 sme vypočítali dobu trvania jedného snímku T podľa vzťahu $T = f^{-1}$. Pomocou nej sme

¹Počet snímok za sekundu. Hodnoty použité pre každé meranie sú uvedené v tabuľke 3.



Obr. 1: Listy aj s meradlom dĺžky.

Tab. 1: Legenda označenia stromov.

označení	strom
A	javor
B	buk
C	dub
D	šípka
E	víba
F	topoľ
G	pagaštan
H	pajaseň
I	buk (suchý)

Tab. 2: Hmotnosti použitých listov.

list	$\frac{m}{g}$
A1	0,89
A2	0,31
B1	0,29
C1	0,31
D1	0,07
E1	0,18
F1	0,79
G1	0,53
H1	2,00
I1	0,28

dopočítali celkový čas pádu ako $t = nT$. Zo znalosti výšky h , z ktorej list padal, sme podľa vzťahu

$$v = \frac{h}{t} = \frac{h}{nT} = \frac{hf}{n}$$

vypočítali rýchlosť pádu.

Priemernú rýchlosť pádu každého listu sme vypočítali rovnakým spôsobom, akurát sme namiesto n dosadzovali priemerný počet snímkov \bar{n} . Zkúste si rozmyslieť, prečo sme dostali mierne odlišné (ale presnejšie) výsledky, ako kebyže vypočítame aritmetický priemer rýchlostí.

Výsledky merania

V tabulke 4 sú uvedené namerané počty snímkov, cez ktoré padali jednotlivé listy. Rovno sme z nich vypočítali aritmetický priemer a štandardnú odchýlku podľa vzťahu

$$u_{nA} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (n_i - \bar{n})^2},$$

Tab. 3: Použité frekvencie merania.

list	\bar{f} Hz
A1	29,7
A2	29,7
B1	29,8
C1	29,7
D1	29,6
E1	29,7
F1	29,8
G1	29,7
H1	29,8
I1	29,7

kde N označuje počet meraných pádov daného listu. Celková neistota merania sa vypočíta zo štatistickej odchýlky u_{n_A} a systematickej odchýlky u_{n_B} spôsobenej nepresnosťou meracích prístrojov, prípadne ľudským faktorom ako

$$u_n = \sqrt{u_{n_A}^2 + u_{n_B}^2}.$$

Neistota určenia presnej snímky, na ktorej bol list vypustený a na ktorej dopadol na podložku, vyústila v nepresnosť určenia počtu snímok zachytávajúcich pád na $u_{n_B} = 3$.

Nás však zaujíma, ako sa táto chyba prejavila v chybe merania rýchlosti. Podľa zákona šírenia neistôt máme

$$u_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial n} u_n\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial n} u_h\right)^2} = v \sqrt{\left(\frac{u_n}{n}\right)^2 + \left(\frac{u_h}{h}\right)^2},$$

kde neistota merania výšky vypustenia nad podložkou bola $u_h = 2$ cm.

Vypočítané priemerné hodnoty rýchlosti pádu jednotlivých listov a celkové neistoty merania rýchlostí sú uvedené v tabuľke 5.

Diskusia

Relatívna odchýlka merania rýchlosti sa pohybuje v rozmedzí od 5 do 11 %, čo považujeme za rozumné presné. Väčší podiel na celkovej odchýlke mala systematická chyba merania. Aby bola menšia, museli by sme napríklad zabezpečiť vypúšťanie listu zo stále rovnej výšky. Najväčší problém bolo však určenie presnej snímky, na ktorej bol list vypustený, resp. na ktorej už dopadol. V počiatkových fázach pádu sa totiž list hýbe veľmi pomaly a je ťažké rozoznať zmenu jeho polohy na jednotlivých snímkach. Taktiež na konci pohybu je náročné presne určiť, kedy sa už list nehýbe. Ako riešenie tohto problému vidíme sledovať len fázu pádu mimo jeho začiatok a koniec. V praxi to znamená vyznačiť si polohu pár centimetrov pod výškou vypustenia a pár nad podložkou a do úvahy brať len pád medzi nimi. V tomto prípade môžeme naraziť na problém, že list sa bude hýbať príliš rýchlo, aby sme zachytili presne jeho prechod vyznačenou polohou. Vtedy by pomohla len vysokorýchlostná kamera. Otázkou by ale ostalo rozhodnúť, ktorú časť listu vlastne chceme merať.

Tab. 4: Namerané počty snímkov pre pády jednotlivých listov a ich priemery a smerodajné odchýlky priemerov.

list	n										\bar{n}	$u_{n\Lambda}$
A1	61	74	63	57	55	56	69	63	51	66	61,5	2,2
A2	74	71	62	59	70	59	47	55	54	65	61,6	2,7
B1	62	65	58	66	60	60	61	62	59		61,4	0,9
C1	50	43	48	51	53	48	43	46			47,8	1,3
D1	32	36	41	33	36	41	32	33	38	38	36,0	1,1
E1	47	44	40	34	40	33	38	42	34	37	38,9	1,5
F1	41	43	46	46	37	41	37	45	45	45	42,6	1,1
G1	58	51	54	57	59	54	58	51	41	48	53,1	1,8
H1	38	42	50	46	40	41	42	40	36	37	41,2	1,3
I1	71	61	63	61	67	61	65	67	58	61	63,5	1,2

Tab. 5: Priemerné rýchlosti pádu a ich neistoty.

list	\bar{v} $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	u_v $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
A1	0,94	0,06
A2	0,94	0,06
B1	0,95	0,05
C1	1,21	0,08
D1	1,60	0,14
E1	1,49	0,13
F1	1,36	0,10
G1	1,09	0,07
H1	1,41	0,11
I1	0,91	0,05

Ak sa pozrieme na veľkosť relatívnej odchýlky rýchlosti v závislosti na samotnej rýchlosti, vidíme, že vo väčšine prípadov s rastúcou rýchlosťou rastie aj jej relatívna odchýlka. Príčinou je menší počet snímok zachycujúcich pohyb, čo zvyšuje relatívnu odchýlku n .

Keď porovnáme priemerné rýchlosti pádu jednotlivých listov, dospejeme k záveru, že najmenšiu rýchlosť má list I1. Tento list je ako jediný z použitých listov už vysušený. Zaujímavé je porovnanie s listom B1, ktorý je toho istého druhu, veľmi podobnej veľkosti a má zhruba rovnakú hmotnosť. Pravdepodobne sa však počas pádu ohýbal menej, čo mohlo spôsobiť väčší odpor vzduchu.

Najväčšiu rýchlosť má list H1, ktorý mal tiež najväčšiu hmotnosť, no zároveň aj plochu. Pravdepodobne jeho hmotnosť a tiež poddajnosť tvaru pri páde spôsobili, že padal najrýchlejšie. Len o niečo pomalšie padal list F1, ktorý je ale podstatne menší a ľahší. S listom H1 má spoločnú veľkú ohotu sa ohýbať. Budí to v nás dojem, že tento faktor do značnej miery ovplyvňuje rýchlosť pádu. Je ale pravda, že listie padajúce zo stromov samovolne je zväčša už vyschnuté, a teda tvar počas pádu mení len minimálne.

Keď porovnáme rýchlosti pádu listov A1 a A2, ktoré sa líšia vo veľkosti a hmotnosti, môžeme vidieť, že rozdiel rýchlostí je v rámci odchýlky naozaj takmer zanedbateľný. Je logické uvažovať, že ich hustota bude zrejme podobná. Vedie nás to k záveru, že veľkosť listu v rámci toho istého druhu zásadne neovplyvňuje priemernú rýchlosť pádu.

Z pozorovania pádu jednotlivých listov by bolo vhodné ešte poznamenať, že najmenej sa počas pádu točil list G1. To je spôsobené pravdepodobne jeho špecifickým tvarom, ktorý umožňuje obtekanie vzduchu aj pomedzi jeho články, čo zrejme stabilizuje jeho pád.

Vo výsledku z hľadiska najpomalšieho pádu vyhrávajú listy A a B z javora a buku. Vzhľadom na to, že tvar týchto listov sa výrazne líši, zrejme neexistuje nič ako ideálny tvar listu pre najpomalší pád. Avšak asi je možné optimalizovať parametre listu - zmenšiť jeho hmotnosť, zväčšiť plochu, zabezpečiť vnútorné obtekanie ako stabilizáciu pri páde. A hlavne nechať list prirodzene vyschnúť na znemožnenie zmeny tvaru počas pádu.

Záver

Namerané rýchlosti pádu jednotlivých listov sú v tabuľke 5.

Rýchlosť pádu zrejme ovplyvňuje viacero faktorov než len samotný tvar listu. Najmenšiu rýchlosť pádu mal vysušený bukový list, teda rýchlosť je závislá na možnosti listu meniť tvar počas pádu. Z hľadiska druhu stromu mali najmešiu rýchlosť javor a buk, teda ich parametre sú najideálnejšie pre náš účel, nájsť čo najpomalšie padajúci list.

Ideálny list by mal podľa nášho merania mať čo najmenšiu hmotnosť, najväčšiu plochu, tvarom zabezpečenú stabilizáciu počas pádu a hlavne by mal byť suchý.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.