Úloha IV.P ... Voyager II a Voyager I žijí! 9 bodů; průměr 3,19; řešilo 16 studentů

Máme nějaký satelit, který chceme vypustit ven ze Sluneční soustavy. Vypouštíme ho z oběžné dráhy Země tak, že po nějakých korekcích dráhy získá rychlost, která je vyšší než úniková rychlost ze Sluneční soustavy. Jaká je pravděpodobnost, že dojde ke kolizi sondy s nějakým kosmickým materiálem s průměrem větším než $d = 1\,\mathrm{m}$ před opuštěním Sluneční soustavy?

Karel si říkal, proč ta NASA tuhle možnost ani neuvažuje...

Ľudstvo za svoju existenciu vypustilo do vesmíru približne stovku medziplanetárnych sond[1] z pomedzi ktorých päť (Voyager 1 a 2, Pioneer 10 a 11 a New Horizons) opúšťa Slnečnú sústavu. Najvzdialenejšia z nich je sonda Voyager 1, na začiatku roka 2018 vzdialená od Slnka asi 140 AU. V žiadnom prípade (aspoň pokiaľ je nám známe) nebola potvrdená zrážka s cudzím telesom. Niektoré sondy boli na kolízny kurz navedené zámerne, no mnoho sond, hlavne na začiatku kozmických letov, bolo stratených. Mohli za to technické problémy, alebo je vesmír plný „zabijáckych“ asteroidov?

Pravdepodobnosť zrážky

Pusťme sa do riešenia úlohy. Predpokladajme, že pozíciu planét poznáme a dokážeme sa im vyhnúť. Ďalej nech naša sonda letí v rovine ekliptiky ako väčšina sond. Nájdime najprv vzťah pre pravdepodobnosť zrážky našej sondy s jediným asteroidom. Pre jednoduchosť predpokladajme guľový tvar asteroidov a sondy s polomermi r_a, r_s. Zrážka nastane, ak je vzdialenosť sondy od asteroidu menšia ako súčet ich polomerov. V sústave pevne spojenej so sondou opíše asteroid obklopený „ochrannou zónou“ a pohybujúci sa rýchlosťou v' za čas Δt objem $V_a = \pi\left(r_a + r_s\right)^2 v'\Delta t$. Ak sa bude asteroid nachádzať v náhodnom mieste objemu V (teda jeho polohu nepoznáme, len vieme, že tam niekde je), dostávame pre pravdepodobnosť zrážky

$$p_0 = \frac{V_a}{V} = \frac{\pi\left(r_a + r_s\right)^2 v'\Delta t}{V}\,.$$

Opäť pre jednoduchosť predpokladajme, že asteroidy obiehajú okolo Slnka po kruhových trajektóriách a naša sonda sa vzďaľuje zo Slnečnej sústavy po priamke prechádzajúcej cez Slnko s práve únikovou rýchlosťou v rovine ekliptiky. Potom

$$p_0 = \frac{\pi\left(r_a + r_s\right)^2 \sqrt{v_s^2 + v_a^2}\Delta t}{V}\,.$$

Pre kruhovú a únikovú rýchlosť platí $v_k^2 = \frac{GM}{R}$, $v_u^2 = \frac{2GM}{R}$, ďalej $v_s = \frac{\Delta R}{\Delta t}$, teda

$$p_0(R, r_a) = \frac{\pi\left(r_a + r_s\right)^2 \sqrt{\frac{3}{2}}\Delta R}{V}\,.$$

Viac zrážok

Pre celkovú pravdepodobnosť P, že našu sondu niečo zasiahne, máme

$$1 - P = \prod_i \left(1 - p_i\right),$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_interplanetary_voyages

čo po zlogaritmovaní a použitia odhadu $\ln(1+x) = x$ pre $|x| \ll 1$ dá

$$P = \sum_i p_i \,,$$

ak predpokladáme, že všetky pravdepodobnosti sú malé (teda hlavne výsledná). Index i prebieha všetky telesá, ktoré nás zaujímajú. Príspevok telies vo vzdialenostiach R až $R+\Delta R$ s polomermi r_a až $r_a + \Delta r_a$ do celkovej pravdepodobnosti je

$$p(R, r_a) = \pi\,(r_a + r_s)^2 \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{(r_a + r_s)^2}{V(R)}\frac{\partial N(R, r_a)}{\partial r_a}\Delta r_a \Delta R\,,$$

kde $\frac{\partial N(R,r_a)}{\partial r_a}\Delta r_a$ je počet takýchto telies v objeme $V(R)$. Tento objem môžeme odhadnúť ako toroid s obdĺžnikovým prierezom, ktorý má polomer R, hrúbku ΔR a výšku $2R\sin i$, kde i je odhad istej strednej inklinácie dráh asteroidov. Preto

$$V(R) = 4\pi R^2 \Delta R \sin i\,,$$

$$p(R, r_a) = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{(r_a + r_s)^2}{4R^2 \sin i}\frac{\partial N(R, r_a)}{\partial r_a}\Delta r_a\,,$$

Celkovú pravdepodobnosť dostaneme súčtom/integrálom cez všetky prípustné R, r_a.

Distribúcia veľkosti asteroidov

Zostáva teda určiť funkciu $N(R, r_a)$. Určme najprv $P(R)$, pravdepodobnosť zásahu asteroidom ľubovoľnej veľkosti v intervale vzdialeností od Slnka R, $R + \Delta R$. Pre závislosť počtu asteroidov od ich veľkosti približne platí vzťah

$$N(r_a > r) = Ar^B\,,$$

kde koeficient $-2 > B > -3$ v závislosti na skupine a veľkosti objektov.[2] Pravdepodobne najväčší vplyv na parameter B majú vlastnosti materiálu, z ktorého sú asteroidy zložené. Koeficient A určíme pomocou polomeru desiateho najväčšieho asteroidu r_{10} v danej oblasti, čo je dohľadateľný údaj a zároveň už má istú štatistickú významnosť

$$10 = Ar_{10}^B \quad \Rightarrow \quad A = \frac{10}{r_{10}^B}\,,$$

$$N(r_a > r) = 10\left(\frac{r}{r_{10}}\right)^B\,.$$

Pre počet asteroidov s polomermi r_a až $r_a + \mathrm{d}r_a$ dostávame diferencovaním

$$\frac{\partial N(R, r_a)}{\partial r_a}\mathrm{d}r_a = 10B\left(\frac{r_a}{r_{10}}\right)^B\frac{\mathrm{d}r_a}{r_a}\,.$$

Preto vieme $P(R)$ určiť ako integrál

$$P(R) = \int_{r_0}^{r_1}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{(r_a + r_s)^2}{4R^2 \sin i}\frac{\partial N(R, r_a)}{\partial r_a}\mathrm{d}r_a\,,$$

[2] `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Asteroids_by_size_and_number.svg`, `orbit.psi.edu/~tricaric/pdf/skads.pdf` alebo heslo *meteoroid* na en.wiki

kde $r_0 = 0{,}5m$ je polomer najmenších asteroidov, ktoré nás zaujímajú,

$$P(R) = \int_{r_0}^{r_1} \frac{(r_a + r_s)^2}{r_a^{3+b}} \frac{5}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{B r_{10}^{2+b}}{R^2 \sin i} \mathrm{d}r_a \,,$$

$$P(R) = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{B r_{10}^2}{R^2 \sin i} \int_{r_0}^{r_1} \frac{r_{10}^b \left(r_a + r_s\right)^2}{r_a^{3+b}} \mathrm{d}r_a \,,$$

kde sme na niektorých miestach nahradili $B = -2 - b$, $0 < b < 1$. Označme integrál ako $-\alpha$, po jeho vypočítaní a dosadení medzí ($r_1 = 10^{-\frac{1}{B}} r_{10}$) s prihliadnutím na $r_s \approx r_0 \ll r_{10}$ dostávame

$$\alpha = -\left(\frac{r_1^{2+B} - r_0^{2+B}}{2+B} - r_0^B \left(\frac{2}{1+B} r_0 r_s + \frac{1}{B} r_s^2\right)\right) r_{10}^b \,.$$

Pre danú oblasť a veľkosť sondy je α len bezrozmerná konštanta. Konečne pre pravdepodobnosť, že v oblasti, ktorej desiaty najväčší objekt má polomer r_{10}, dôjde k zrážke, dostávame

$$P(R) = -B \frac{5}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{r_{10}^2}{R^2 \sin i} \alpha \,.$$

Celkovú pravdepodobnosť určíme súčtom dielčích pravdepodobností pre všetky oblasti.

Medziplanetárna hmota

S rastúcou vzdialenosťou od Slnka musí naša sonda postupne prekonať:

- asteroidy skupín Apollo a Amor v priestore medzi dráhami Zeme a Marsu,
- krížiče Marsu,
- hlavný pás asteroidov,
- skupinu Trójanov, ktorí sa nachádzajú v okolí libračných bodov L4, L5 Jupitera, teda približne $60\,^\circ$ pred a za ním na jeho orbite,
- skupinu Centaurov, ktorí sa nachádzajú medzi dráhami joviálnych planét a majú výrazne excentrické orbity,
- Kuiperov pás za dráhou Neptuna, v ktorom sa nachádza aj Pluto,
- objekty rozptýleného disku,
- Oortov oblak komét.

Prvé dve menované skupiny však obsahujú len málo objektov[3] v porovnaní s hlavným pásom. Pre hlavný pás odhadneme $R_{\mathrm{min}} = 2{,}2\,\mathrm{km}$, $R_{\mathrm{max}} = 3{,}2\,\mathrm{km}$, $i = 10\,^\circ$.[4] Pre náš výpočet odhadnime $R = 2{,}5\,\mathrm{AU}$. Desiaty najväčší objekt v hlavnom páse je 15 Eunomia s polomerom $r_{10} = 134\,\mathrm{km}$.

Skupine Trójanov sa väčšina sond vyhýba, keďže využíva prelet okolo Jupitera na zvýšenie rýchlosti. Vystavuje sa tým ale riziku zrážky s Jupiterovymi satelitmi.

Pre Centaurov $r_{10} \doteq 80\,\mathrm{km}$,[5] $i = 15\,^\circ$, $R = 5{,}5 \ldots 30\mathrm{AU} \doteq 10\,\mathrm{AU}$,[6] pričom pri poslednom odhade berieme do úvahy, že hľadáme priemer obrátených štvorcov, ktorý je vždy menší ako aritmetický.

[3] obrázok na http://faculty.washington.edu/trq/hpcc/stawarz/orbres.html

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Asteroid_family#/media/File:AsteroidIncAu.png

[5] http://www.johnstonsarchive.net/astro/tnodiam.html

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Centaur_(minor_planet)#/media/File:TheKuiperBelt_42AU_Centaurs.svg

Pre objekty za dráhou Neptúna $r_{10} \doteq 420\,\mathrm{km}$,[7] $i = 20\,°$, $R \doteq 45\,\mathrm{AU}$.[8]

O tom, ako vyzerá Slnečná sústava vo vzdialenostiach väčších ako 100 AU, veľa nevieme, preto náš výpočet ukončíme práve tu. Dokonca sa špekuluje o existencii deviatej planéty.[9] Vo vzdialenostiach väčších ako niekoľko tisíc AU sa predpokladá existencia Oortovho oblaku komét s miliardami objektov s priemerom väčším ako 20 km.[10]

Finálny výpočet

Tab. 1: Závislosť parametra α na B, r_{10}

$\frac{r_{10}}{\mathrm{km}}$	$B = -2.1$	$B = -2.5$	$B = -2.9$
80	60	4 000	400 000
134	60	5 000	600 000
420	70	9 000	1 600 000

Najprv sa bližšie pozrime na hodnoty, ktoré nadobúda α. Pre $r_0 = 0{,}5\,\mathrm{m}$, $r_s = 1{,}5\,\mathrm{m}$ a rôzne hodnoty B dostávame pre jednotlivé pásma hodnoty v tabuľke 1. Vidíme, že α sa v závislosti od parametrov nachádza v intervale 50 až 2 000000, pričom dominantný vplyv má parameter B. Pôjde teda o extrémne hrubý odhad. Vďaka tomu sú aj naše pôvodné zanedbania modelu oprávnené. Pre zaujímavosť sú v tabuľke 2 uvedené hodnoty α pre rôzne hodnoty r_0 pre $r_{10} = 100\,\mathrm{km}$. Môžeme si všimnúť, že zatiaľ čo v prípade $r_s \ll r_0$ je koeficient pomerne malý, pre $r_0 \ll r_s$ nadobúda obrovské hodnoty. Sonda totiž „vymetá" priestor vyplnený obrovským množstvom malých telies.

Tab. 2: Závislosť parametra α na B, r_0

r_0	$B = -2.1$	$B = -2.5$	$B = -2.9$
1 km	7	19	70
100 m	11	60	600
10 m	17	200	5 000
1 m	30	1 500	110 000
1 dm	600	110 000	20 000 000
1 cm	60 000	30 000 000	1 600 000 000
1 mm	7 000 000	9 000 000 000	12 000 000 000 000

Čiastkovú pravdepodobnosť môžeme odhadnúť ako

$$P(R) = 50 \frac{r_{10}^2}{R^2} \alpha\,.$$

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trans-Neptunian_objects
[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Trans-Neptunian_object#/media/File:TheTransneptunians_73AU.svg
[9] http://www.findplanetnine.com/
[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Oort_cloud

Pre parameter $\frac{r_{10}^2}{R^2}$ dostávame postupne $1{,}3 \cdot 10^{-13}$ pre hlavný pás, $3 \cdot 10^{-15}$ pre Centurov a $4 \cdot 10^{-15}$ pre transneptunické objekty. Teda hlavný pás je dominantný zdroj rizika.

Pre celkovú pravdepodobnosť zrážky s telesom väčším ako 1 m dostávame

$$P \doteq 4 \cdot 10^{-10} \dots 4 \cdot 10^{-6}\,.$$

Môžme vidieť, že inžinieri sa nemusia ničoho obávať, pokiaľ ide o zásah sondy objektom väčším ako meter pri voľnom prelete Slnečnou sústavou. Aby sa riziko pohybovalo na úrovni percent, musí mať koeficient α hodnotu v ráde miliárd. To ale nastáva len pre milimetrové telesá v prípade nepriaznivejšieho koeficienta B.

Inou otázkou sú ale blízke prelety popri objektoch, ktoré majú prstence, keďže v nich je koncetrácia hmoty vyššia. Touto otázkou sa zaoberali vedci v prípade finálnej časti misie Cassini, ktorá prelietavala medzerou v prstencoch Saturna a kľúčová bola u sondy New Horizons pri prelete okolo Pluta, o ktorom sa dovtedy nevedelo, že prstence nemá. V dnešnej dobe sa rovnako problematickým stáva odletieť preč od Zeme, ktorú sme si obklopili množstvom satelitov, ale i odpadu.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.