

Úloha IV.2 ... autisti

3 body; průměr 2,24; řešilo 41 studentů

Kolik nejméně dětí by muselo roztočit svůj fidget spinner, aby se tak den na Zemi prodloužil o 1 ms? Všechny neznámé veličiny odhadněte. *Matěj chtěl mít víc času na „točení“.*

Řešení úlohy je založeno na zákonu zachování momentu hybnosti. Máme-li izolovanou soustavu (v našem případě je to Země s fidget spinnery), její celkový moment hybnosti se zachovává. Pro velikost momentu hybnosti vzhledem k ose otáčení platí vztah

$$L = J\omega,$$

kde ω je úhlová rychlost rotace kolem dané osy a J je moment setrvačnosti vzhledem k této ose. Pro moment setrvačnosti Země platí $J_Z = \frac{2}{5}MR^2$, kde M je hmotnost Země a R je její poloměr.

Abychom pozemský den prodloužili, musíme zpomalit zemskou rotaci. To uděláme tak, že jí „ukradneme“ část momentu hybnosti tím, že fidget spinnery roztočíme stejným směrem. Protože součet momentů hybnosti musí zůstat konstantní, moment hybnosti samotné Země se sníží. Označíme-li moment setrvačnosti fidget spinneru J_s a maximální úhlovou rychlost, kterou je obyčejné dítě schopné svůj spinner roztočit, ω_s , pro celkový moment hybnosti všech spinnerů dostaneme

$$L_s = NJ_s\omega_s,$$

kde N je hledaný počet dětí. Je třeba zdůraznit, že všechny spinnery se musí točit stejným směrem a ideálně i jejich roviny otáčení musí být rovnoběžné. Autisti na rovníku je musí nechat rotovat kolmo na povrch Země, autisti na pólech zase rovnoběžně s povrchem Země. Ostatní děti musí držet spinner pod určitým náklonem vzhledem k povrchu podle toho, v jaké zeměpisné šířce se nacházejí.

V našem případě se moment setrvačnosti Země má změnit z

$$L_0 = J_Z\omega_Z$$

na

$$L = J_Z\omega'_Z,$$

kde

$$\omega_Z = \frac{2\pi}{T_Z} = \frac{2\pi}{1 \text{ den}}$$

a

$$\omega'_Z = \frac{2\pi}{T_Z + \Delta T_Z} = \frac{2\pi}{1 \text{ den} + 1 \text{ ms}}.$$

Aproximací $\Delta T_Z \ll T_Z$ dostáváme

$$L_0 - L = J_Z(\omega_Z - \omega'_Z) = J_Z \left(\frac{2\pi}{T_Z} - \frac{2\pi}{T_Z + \Delta T} \right) \approx J_Z \frac{2\pi\Delta T}{T_Z^2}.$$

Tato změna momentu je rovna momentu hybnosti spinnerů

$$L_0 - L = L_s,$$

$$J_Z \frac{2\pi\Delta T}{T_Z^2} = NJ_s\omega_s,$$

$$N = \frac{4\pi MR^2 \Delta T}{5J_s \omega_s T_Z^2}.$$

Nyní zbývá jen odhadnout neznámé veličiny fidget spinneru (J_s a ω_s).

Ačkoliv některé kvalitní kovové spinnery mohou vážit i přes 120 g, nejčastěji používaný typ fidget spinneru má obvykle hmotnost kolem 50 g a poloměr zhruba 35 mm¹. Moment setrvačnosti by bylo poměrně komplikované spočítat přesně, protože spinnery většinou nejsou homogenní. Proto je vhodné použít aproximaci. Můžeme například „od oka“ odhadnout, jaký poloměr by měl disk se stejnými parametry (tím bychom dostali správný řádový odhad). My použijeme sofistikovanější metodu. Všimneme si, že většina hmoty se nachází v prstencových kovových závažích, které se nacházejí v každé ze tří hlavic (někdy jsou jako závaží použita ložiska). Tato závaží aproximujeme kružnicemi s poloměrem 10 mm a se středem ve vzdálenosti 25 mm od středu spinneru.

Moment setrvačnosti nezávisí na tom, kolik má fidget spinner hlavic, protože moment setrvačnosti každé samotné hlavy je stejný a přímo úměrný její hmotnosti, která je zase nepřímo úměrná počtu hlav. Moment setrvačnosti kružnice vzhledem k její ose je stejný jako moment setrvačnosti hmotného bodu ve stejné vzdálenosti od osy

$$J_k = mr_k^2.$$

Moment vůči středu spinneru spočítáme pomocí Steinerovy věty

$$J_s = mr^2 + J_k,$$

kde $m = 50$ g, $r_k = 10$ mm a $r = 25$ mm jsou výše odhadnuté hodnoty. Po dosazení dostáváme $J_s \doteq 4 \cdot 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ².

Zbývá odhadnout, jak rychle lze spinner roztočit. Pokud nemáme k dispozici stlačený vzduch, vrtačku či jiný mechanismus, může se nám podařit spinner roztočit až na 30 otáček za sekundu (to už chce zkušenost s točením a silné prsty). Tedy $\omega_s \doteq 190 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Dosazením těchto hodnot do vztahu pro N dostáváme

$$N \doteq 1 \cdot 10^{28},$$

což je tak velké číslo, že se o změny délky dne kvůli lidem s ADHD vůbec nemusíme bát.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

¹Pokud nějaký máte, můžete si ho zkusit zvážit a změřit.

²Také jsme mohli spinner aproximovat homogenním diskem (usnadnilo by to výpočet na úkor přesnosti) $J'_s = \frac{1}{2}mr_s^2 \doteq 3 \cdot 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, kde r_s je poloměr disku.