## Úloha I.3 ... oběšený úhelník
6 bodů; průměr 5,23; řešilo 52 studentů

*Máme homogenní úhelník ve tvaru L o stranách délek $b, c$. Je volně zavěšen v železničním vagóně za konec jedné strany tak, že jeho vrchol míří ve směru jízdy vagonu. S jakým zrychlením $a$ se musí vagon pohybovat, aby spodní strana úhelníku byla rovnoběžná se směrem jízdy? Relativistické jevy neuvažujte.*

Bonus: *Relativistické jevy uvažujte.*

*Autor je neznámý, asi se oběsil.*

Nejprve musíme najít těžiště. Zvolíme soustavu souřadnou tak, aby měla počátek v bodě zavěšení a osa x mířila podél ramena úhelníku délky $b$, za které je zavěšený. Zavedeme délkovou hustotu $\varrho$, kterou sice neznáme, ale zpřehlední nám výpočty. Potom je polohový vektor těžiště dán vztahem

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{t} = \frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum m_i}\,,$$

kde $m_i$ je hmotnost $i$tého hmotného bodu (nebo části tělesa) a $\boldsymbol{r}_i$ je jeho polohový vektor (u větších celků těžiště celku – tady strany úhelníku). Dosadíme hodnoty

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{t} = \frac{\boldsymbol{r}_b \varrho b + \boldsymbol{r}_c \varrho c}{(b+c)\,\varrho}\,,$$

kde $\boldsymbol{r}_\mathrm{b}$ a $\boldsymbol{r}_c$ jsou polohové vektory těžišť jednotlivých stran, ležící v jejich středech. Můžeme dosadit polohové vektory $\boldsymbol{r}_\mathrm{b} = [b/2; 0]\,, \boldsymbol{r}_\mathrm{c} = [b; c/2]$ a pokrátit $\varrho$, čímž získáme

$$\boldsymbol{r} = \frac{[b/2;0]\cdot b + [b; c/2]\cdot c}{b+c} = \left[\frac{b^2/2 + bc}{b+c}; \frac{c^2/2}{b+c}\right]\,.$$

Úhel, který v klidu svírá svislá strana úhelníku s kolmicí, pak bude

$$\operatorname{arctg}\frac{r_y}{r_x} = \operatorname{arctg}\frac{c^2/2}{b^2/2 + bc}\,.$$

To ovšem musí být i úhel, který musí svírat výslednice gravitační a setrvačné síly s kolmicí, aby byl moment síly působící vůči bodu zavěšení nulový. Proto z podobnosti trojúhelníků máme

$$\frac{ma}{mg} = \frac{c^2/2}{b^2/2 + bc}\,,$$

$$a = g\frac{c^2/2}{b^2/2 + bc}\,.$$

### *Relativistické jevy*

Pokud chceme uvažovat relativistické efekty, musíme si začít dávat pozor, v jaké soustavě se nacházíme a v jaké soustavě nás zajímá zrychlení. Naskýtají se dvě význačné možnosti: V soustavě spojené s vlakem (inerciální soustavě pohybující se okamžitou rychlostí vlaku) nebo soustavě spojené se zemí. Není těžké si rozmyslet, že zrychlení v první soustavě (tedy zrychlení, kterým vlak sám sebe pohání) je stejné, jako tomu bylo v nerelativistickém případě, protože vlak se vůči této soustavě pohybuje pomalu.

Pro inerciální soustavu spojenou se zemí (nádražím) zkusme uvažovat, co by se asi dělo. Z počátku, kdy bude rychlost malá ve srovnání s rychlostí světla, nesmí zrychlení být výrazně jiné než to, které jsme vypočítali výše. Jak bude rychlost růst, začnou se projevovat relativistické efekty. Pro nás je důležité především zkracování spodní strany úhelníku.[1] V limitě dosažení rychlosti světla bude spodní strana úhelníku mít nulovou délku, a proto bude síla potřebná k udržení úhelníku v kolmé poloze nulová.[2]

Zkusme přece jen spočítat, jak se systém bude chovat z pohledu nádraží. Se zkracováním spodní strany se bude měnit setrvačná síla potřebná k udržení úhelníku ve správné poloze. Velikost síly dokážeme získat dosazením závislosti délky spodní strany na rychlosti $c(v) = \frac{c_0}{\gamma(v)}$ do vzorečku, který už známe, kde $\gamma$ je Lorentzův faktor daný vztahem

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}\,,$$

kde $c_0$ je klidová délka. Rychlost světla budeme značit $C$, abychom se vyhnuli kolizi ve značení. Zároveň musíme použít vztah pro relativistickou změnu hmotnosti $m = m_0\gamma$. Pro polohu těžiště pak platí

$$\boldsymbol{r} = \frac{[b/2; 0] \cdot m_b + \left[b; \frac{c_0}{2\gamma}\right] \cdot m_c}{m_b + m_c} = \left[\frac{bm_b/2 + bm_c}{m_b + m_c}; \frac{c_0 m_c}{2\gamma(m_b + m_c)}\right].$$

Dosazením za hmotnosti jednotlivých stran[3] $m_b = \varrho\gamma b, m_c = \varrho\gamma c_0$ pak získáme vztah pro setrvačnou sílu $F$ ($m_0$ je klidová hmotnost úhelníku)

$$m_0 g c_0^2 = F\left(b^2 + 2bc_0\right).$$

Bohužel při relativistických rychlostech neplatí vztah $F = ma$, proto je třeba užít obecnější vztah $F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$, který v relativitě přejde na

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m_0\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}v + m_0\gamma\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m_0\gamma^3\frac{v^2}{C^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + m_0\gamma\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m_0\gamma^3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Získáme tak diferenciální rovnici

$$\gamma^3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{gc_0^2}{b^2 + 2bc_0} = a_0,$$

kde $a_0$ je nerelativistické („klidové“) zrychlení. Tu umíme vyintegrovat na vztah ($t_0$ je čas začátku jízdy vlaku)

$$\frac{Cv}{\sqrt{C^2 - v^2}} = a_0(t - t_0),$$

což umíme invertovat na rovnici

$$v = \frac{a_0\,(t - t_0)}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_0(t - t_0)}{C}\right)^2}}.$$

[1] Druhá strana se nezkracuje, protože uvažujeme, že síly jsou v rovnováze po celou dobu pohybu. Proto je tato strana po celou dobu pohybu orientována kolmo ke směru pohybu

[2] Což i ve speciální relativitě pro náš systém odpovídá nulovému zrychlení, což je správně (fyzikální zákony nás „nenutí“ přesáhnout rychlost světla)

[3] Používáme klidové délky $b$ a $c_0$, protože škálujeme klidovou hmotnost Lorentzovým faktorem. Započítání relativistické kontrakce by znamenalo pouze přeškálování hustoty, aby se celkový vztah nezměnil.

Zrychlení pak získáme derivací podle času,

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{a_0}{\left(1 + \left(\frac{a_0\,(t - t_0)}{C}\right)^2\right)^{3/2}}\,.$$

Zkusme se podívat na limitní chování obou vzorců. Pro malé časy, kdy se dá odmocnina ve jmenovateli aproximovat jedničkou, vychází zrychlení konstantní[4], zatímco rychlost je lineární funkcí času odpovídající danému zrychlení. Pro velké časy naopak můžeme v odmocnině ve jmenovateli zanedbat jedničku, a odmocnina se pak bude chovat jako lineární funkce času. To naopak dává konstantní rychlost (překvapivě rovnou $C$) a nulové zrychlení, jak jsme předpovídali dříve.

Na závěr uveďme, že pokud dosadíme do vzorce pro relativistické zrychlení hodnotu $a_0 = g$, [5] pak potřebné zrychlení klesne o 1% cca po měsíci zrychlování. Poloviční bude po přibližně devíti měsících.

### *Poznámky k došlým řešením*

Většina z vás správně pochopila, že mají najít polohu těžiště. Někteří z vás počítali v souřadnicích stejně, jako ve vzorovém řešení, jiní zvolili více geometrické metody a vycházeli z toho, jak se skládají těžiště dílčích útvarů, a poté používali čistě geometrických metod, které též vedou k výsledku, ale postup je o poznání složitější. To způsobilo, že mnohem menší část z nich skutečně dosáhla správného výsledku. Několik málo lidí nepoužilo aproximaci úhelníku hmotnými tyčemi a většinou získali správný výsledek. Mnozí z vás si nedali pozor na věci, které vypadají intuitivně, ale neplatí. Uveďme například to, že těžiště úhelníku leží uprostřed spojnice jednotlivých částí (ne, sice je na spojnici, ale leží blíž těžší části) nebo že pro těžiště úhelníku platí stejné hodnoty jako pro odpovídající trojúhelník (opravdu ne, jedna strana tam chybí). Opravdu hezký byl postup jednoho z vás, který použil postup, který byl nový i pro mě. Vyšel z První Guldinovy věty, která dává do vztahu délku rovinné křivky $l$, obsah plochy $S_\xi$, získané rotací křivky okolo osy $\xi$, a vzdálenost těžiště od této osy $y_\xi$, podle vztahu

$$S_\xi = 2\pi y_\xi l\,,$$

z čehož pomocí rotací podle dvou vhodně zvolených os získal souřadnice těžiště. Co se relativistických jevů týče, někteří z vás správně uvažovali kontrakci délek a změnu polohy těžiště, jiní z vás správně převedli zrychlení na sílu, další správně převedli $a(v)$ na $a(t)$, ale bohužel nikomu se nepodařilo správně udělat vše najednou, a tedy nikdo nezískal vzorce, které jsou ve vzorovém řešení. Je to pochopitelné, protože tato látka je hodně nad rámec středoškolské fyziky a i pro mě byla dosti obtížná. Jsem rád, že se pár z vás pokusilo toto řešit a většina se dostala celkem daleko, a proto jsem byl relativně štědrý při rozdělování bonusových bodů. Naopak mě

[4] A je stejně veliké jako nerelativistické, které jsme spočítali dříve.

[5] Což je spíš nadsazené, neboť to odpovídá spodní straně téměř dvaapůlkrát delší než ta, za kterou úhelník visí. Navíc cestující by takové zrychlení příliš neocenili, zvláště ti sedící proti směru jízdy.

překvapilo, jak málo lidí se pokusilo vůbec řešit, protože tato úloha mi nepřišla tak složitá. Třeba u úlohy 4 se sešlo řešení o dost více.

***Mikuláš Matoušek***
mikulas@fykos.cz