Úloha VI.4 ... zastřel si svého potkana

7 bodů; průměr 3,88; řešilo 32 studentů

Mirek by rád zastřelil potkana, kterého vídá na kolejích. Připravil si tedy jednoduchou vzduchovou pušku, kterou si můžeme modelovat jako trubku s konstantním průřezem $S = 15\,\mathrm{mm^2}$ a délkou $l = 30\,\mathrm{cm}$, která je na jedné straně uzavřená a na druhé otevřená. Do ní se chystá Mirek umístit náboj hmotnosti $m = 2\,\mathrm{g}$, který trubku akorát utěsní, a to ve vzdálenosti $d = 3\,\mathrm{cm}$ od uzavřeného konce. Náboj zde zatím nechá upevněný v klidu a natlakuje uzavřenou část trubky na určitý tlak p_0. Posléze náboj uvolní. Chce, aby na konci ústí byla rychlost náboje minimálně $v = 90\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Poraďte mu, na jaký tlak by musel vzduchovou pušku natlakovat, aby náboj vyšel s takovou rychlostí, pokud by plyn byl ideální, a diskutujte realističnost uspořádání. Předpokládejte, že náboj je uvolňován kvazistatickým adiabatickým dějem, kde $\kappa = 7/5$, protože se jedná o dvouatomový plyn. Uvažujte, že z vnějšku působí na náboj atmosférický tlak $p_\mathrm{a} = 10^5\,\mathrm{Pa}$. Zanedbejte energetické ztráty vyvolané třením, odporem vzduchu a stlačováním plynu před nábojem.

Karel chtěl zjistit, jestli by řešitelé zvládli přijímací řízení na magisterské studium na Matfyz.

V našom prípade je hnacou silou strely stlačený plyn. Budeme sa riadiť Poissonovým zákonom pre ideálny plyn

$$pV^\kappa = \mathrm{konst}\,.$$

Pri výstrele v Mirkovej pušky plyn zväčšuje svoj objem, čím tlačí náboj dopredu. Z toho vidíme, že objem plynu V a tlak p v nejakom čase môžeme popísať ako

$$p = p_0 \frac{V_0^\kappa}{V^\kappa}\,.$$

Nakoľko je prierez hlavne S konštantný, môžeme predchádzajúcu rovnicu prepísať ako

$$p = p_0 \left(\frac{Sd}{Sx}\right)^\kappa = p_0 \left(\frac{d}{x}\right)^\kappa\,.$$

Doteraz sme uvažovali, že náboj je tlačený z jednej strany stlačeným vzduchom, no z druhej proti pohybu nič nekladie odpor, čo ako tušíme, nemôže fungovať. Uvažujeme, že oproti guľke pôsobí atmosférický tlak p_a. Výsledné silové pôsobenie na projektil v hlavni bude dané rozdielom týchto dvoch tlakov, čiže platí

$$p' = p_0 \left(\frac{d}{x}\right)^\kappa - p_a\,.$$

Tlak, ako vieme už zo základnej školy, sa prejavuje ako určité silové pôsobenie sily F na plochu S. Vďaka tomu, že hlaveň má prirodzene konštantný prierez , môžeme silu tlačiacu náboj vyjadriť v tvare

$$F = Sp' = S\left(p_0 \left(\frac{d}{x}\right)^\kappa - p_a\right)\,.$$

Z druhého Newtnovho pohybového zákona platí, že ak na teleso o hmotnosti m v inerciálnej vzťažnej sústave, pôsobí sila F, tak potom sa začne pohybovať so zrýchlením o veľkosti $\frac{F}{m}$, a teda môžeme písať

$$ma = S\left(p_0 \left(\frac{d}{x}\right)^\kappa - p_a\right)\,.$$

Ako mnohí iste viete, zrýchlenie v určitom čase t môžeme zistiť ako prvú deriváciu rýchlosti podľa času, alebo druhú deriváciu dráhy podľa času. Z vety o derivácií zloženej funkcie potom získavame

$$ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v = S\left(p_0 \left(\frac{d}{x}\right)^\kappa - p_a\right)\,,$$

čo je lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu, ktorú budeme riešiť metódou separácie premenných. Po separácii dostávame

$$m v \mathrm{d} v = S \left(p_0 \left(\frac{d}{x} \right)^{\kappa} - p_a \right) \mathrm{d} x$$

$$\int_0^v m v \mathrm{d} v = \int_d^l S \left(p_0 \left(\frac{d}{x} \right)^{\kappa} - p_a \right) \mathrm{d} x$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = S \left(p_0 \frac{d^{\kappa} \left(d^{1-\kappa} - l^{1-\kappa} \right)}{\kappa - 1} - p_a (l - d) \right) ,$$

odkiaľ po vyjadrení tlaku získavame

$$p_0 = \frac{(\kappa - 1) \left(\frac{1}{2} m v^2 + S p_a (l - d) \right)}{S d^{\kappa} \left(d^{1-\kappa} - l^{1-\kappa} \right)} .$$

Po dosadení hodnôt dostávame $p_0 \doteq 1{,}256 \cdot 10^7$ Pa, teda asi 126 atmosfér.

Realistickosť usporiadania

Ako vidíme, výsledný tlak vyšiel dosť veľký, čiže vzhľadom na usporiadanie nemôžeme považovať plyn za ideálny. Pri počítaní s ideálnym plynom sa zanedbáva vlastný objem molekúl a príťažlivé sily, ktoré zohľadňuje Van der Waalsova rovnica, poprípade môžeme použiť ešte viriálnu stavovú rovnicu. S tým vzniká ďalšia otázka, a to, akým plynom Mirek zbraň natlakoval. (Bežné sú okrem vzduchu CO_2 a N_2.) V prípade, že by nešlo o čisto dvojatómový plyn, vychádzali by sme z Daltonovho zákona.

Pri výpočtoch sme zanedbali odpor vzduchu, ktorý by aj tak nemal veľký vplyv. V hlavni sa časť energie ďalej spotrebuje na roztočenie projektilu a zároveň sa vylúči určité teplo pri trení projektilu v hlavni, teda možno očakávať, že tlak bude o niečo málo väčší ako náš výsledok.

Pre informáciu uveďme, že vzduchové zbrane podliehajúce ohláseniu by mali mať úsťovú energiu viac ako 16 J. Nakoľko avšak energia projektilu Mirkovej vzduchovky tesne po tom, čo opustí hlaveň, je len 8,2 J, Mirek môže naďalej beztrestne strieľať po potkanoch na koleji.

Porovnaním s reálnymi vzduchovkami zistíme, že tlak v komore pre podobné úsťové rýchlosti sa skutočne pohybuje v rádovo desiatkach až stovkách atmosfér.

Peter Kubaščík