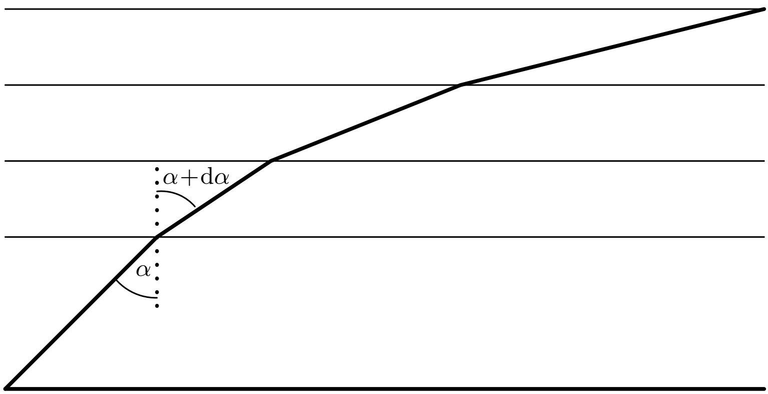
Úloha IV.5 ... divná atmosféra

9 bodů; průměr 6,84; řešilo 19 studentů

Zažili jste už někdy takovou divnou atmosféru? Do určité výšky je v ní rychlost šíření světla konstantní v_0 a od určité hranice se rychlost šíření světla začne lineárně zvětšovat podle vztahu $v(\Delta h) = v_0 + k\ \Delta h$. V jednom místě, právě ve výšce, kde se začala měnit rychlost světla, vyšleme světelné paprsky pod všemi možnými úhly směrem nahoru. Ukažte, že se budou všechny paprsky pohybovat po částech kružnic a určete poloměry těchto kružnic. Také určete vzdálenost od místa vypuštění paprsků, kde se paprsky vrátí do původní výšky.

Jakub chce vedieť, aké by to bolo plávať pod ľadom.

Atmosféra pro nás začne být zajímavá od hranice, na které se začne měnit rychlost světla. Nakresleme si tedy okolí této hranice 1.



Obr. 1: Paprsek lámající se na infitezimálních vrstvách Divné atmosféry.

Situaci si můžeme namodelovat jako řadu oddělených prostředí s infinitezimální tlouštkou a s odlišnou rychlostí světla. Pro lom světla na hranici každého jednoho takovéhoto prostředí poté můžeme využít Snellův zákon, tedy

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}\,,$$

kde α je úhel dopadu a β je úhel lomu.

Vzhledem k tomu, že s rostoucí výškou roste i rychlost světla, plyne pak ze Snellova zákona i následné zvětšení úhlu lomu, odtud poté plyne, že infinitezimálnímu nárůstu výšky bude odpovídat infinitezimální zvětšení úhlu lomu. Označíme-li si tedy úhel dopadu jako α a úhel lomu jako $\alpha + \mathrm{d}\alpha$, dostaneme rovnost

$$\frac{\sin(\alpha + \mathrm{d}\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{v_2}{v_1}\,.$$

Nyní použijeme goniometrický vzorec pro sinus součtu, přibližné vztahy $\sin(\mathrm{d}\alpha) \approx 0$ a $\cos(\mathrm{d}\alpha) \approx 1$ a vyjádření rychlosti v závislosti na výšce ze zadání

$$1 + \frac{\mathrm{d}\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1 + \frac{k\mathrm{d}x}{v_1}\,.$$

Rovnost poté upravíme na tvar

$$\frac{v_1 \cos\alpha}{k \sin\alpha} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha}\,.$$

S využitím goniometrických funkcí získáme vztah pro infinitezimální dráhu, kterou světlo urazí

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}x}{\cos\alpha}\,.$$

Definice poloměru křivosti trajektorie v daném bodě je $R = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}$, dosazením tedy získáme poloměr křivosti naší křivky v daném bodě

$$R = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{v_1}{k \sin\alpha}\,.$$

Zde si ale můžeme všimnout, že až na konstantu k nám vyšel stejný poměr jako při použití Snellova zákona. S jeho využitím tedy můžeme psát pro každou vrstvu

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2} = \ldots = \frac{\sin\alpha_n}{v_n}\,.$$

Takže křivka bude mít konstantní poloměr křivosti. Označíme-li si vzdálenost od místa vyslání paprsku k místu, kde se paprsek vrátí na stejnou výšku, jako d a využijeme-li vztahu pro poloměr křivosti v daném bodě, získáme vztah

$$d = 2R\cos\alpha = 2\frac{v_0}{k}\operatorname{cotg}\alpha\,,$$

kde α značí příslušný úhel dopadu paprsku vůči normále k hranici atmosféry.

Křivka tedy bude mít konstantní poloměr křivosti po celé své délce a pro paprsek vyslaný pod úhlem α vzhledem ke směru růstu rychlosti světla v divné atmosféře (svisle vzhůru) bude platit, že se do původní výšky vrátí ve vzdálenosti $d = 2\frac{v_0}{k}\operatorname{cotg}\alpha$.

Tomáš Hrbek
`tomash@fykos.cz`