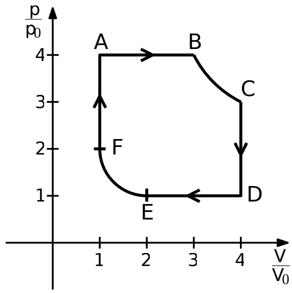
Úloha IV.4 ... plynový stroj

8 bodů; průměr 7,39; řešilo 36 studentů



Mějme tepelný stroj naplněný ideálním plynem složeným z dvouatomových molekul. Tento tepelný stroj vykonává kruhový děj ABCDEFA, tedy skládá se z šesti dějů

- *$A \to B$ – izobarické zahřátí ze stavu $4p_0$ a V_0 (teplotu v A označme jako $4T_0$) do stavu s objemem $3V_0$,*
- *$B \to C$ – izotermická expanze na objem $4V_0$,*
- *$C \to D$ – izochorické ochlazení na tlak p_0,*
- *$D \to E$ – izobarické ochlazení na objem $2V_0$,*
- *$E \to F$ – izotermická komprese na objem V_0,*
- *$F \to A$ – izochorické zahřátí na tlak $4p_0$.*

Určete zbývající stavové veličiny ve stavech B, C, D, E a F, maximální a minimální teplotu ideálního plynu v průběhu děje (v násobcích T_0), teplo přijaté či odevzdané plynem v jednotlivých dějích a účinnost tepelného stroje. Srovnejte tuto účinnost s účinností Carnotova stroje pracujícího se stejnými maximálními a minimálními teplotami. Pro jednoduchost uvažujte, že se nemění látkové množství plynu ve stroji a nedochází v něm k chemickým přeměnám.

Bonus *To samé proveďte pro jednodušší cyklický „čtvercový“ děj, tedy ABCDA, kde plyn začíná ve stavu p_0, V_0 a T_0 a izochoricky se ohřeje na $4p_0$, izobaricky se zahřeje a rozepne na $4V_0$, izochoricky ochladí na p_0 a izobaricky se ochladí na V_0. Srovnejte účinnosti těchto dvou tepelných strojů a diskutujte, který je lepší.*

Karlovi bylo střídavě teplo a zima.

Pro zpracování úlohy budeme potřebovat znát jednotlivé děje v plynech a vůbec základy termodynamiky. Zde budeme předpokládat, že toto znáte v rozsahu např. studijního textu P. Šedivý: *Kruhový děj s ideálním plynem*, který je součástí knihovničky Fyzikální olympiády.[1]

Nejprve si připomeňme stavovou rovnici ideálního plynu ve tvaru $p_iV_i = nRT_i$, kde n je látkové množství plynu (tj. kolik molů plynu je uzavřeno v našem stroji), které se nebude měnit a R je molární plynová konstanta. U ostatních veličin je uveden index i, protože se nám mohou a budou měnit, ale tato stavová rovnice nám říká, že dvě veličiny z trojice p_i, V_i, T_i nám už vždy určí tu třetí.

Účinnost tepelného cyklu můžeme určit ze vztahu

$$\eta = \frac{Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}} \,,$$

kde Q_{in} je celkové teplo přijaté plynem v průběhu jednoho cyklu a Q_{out} je teplo odevzdané chladiči (v tomto případě brané s kladným znaménkem). Také bychom mohli účinnost vypočítat z podílu vykonané práce a přijatého tepla, což je ekvivalentní, ale bude praktičtější pracovat pouze s teplem.

Připomeňme si také jednotlivé tepelné děje, ze kterých se náš cyklický děj skládá. Za kladné vždy považujeme teplo, které plyn přijímá od tepelného rezervoáru na vyšší teplotě a záporné je teplo, které plyn předává tepelnému rezervoáru na nižší teplotě. Asi nejjednodušší je izochorický děj, v jehož průběhu se nemění objem plynu a tím pádem se ani nekoná žádná práce. Teplo, které přijme dvouatomový plyn při přechodu ze stavu i do stavu j je $Q_V = 5\,(p_j - p_i)\,V/2$. V průběhu

[1] Text naleznete na webové adrese `http://fyzikalniolympiada.cz/texty/kruhdej.pdf`

Tab. 1: Hodnoty stavových veličin

i	p_i	V_i	T_i
A	$4p_0$	V_0	$4T_0$
B	$4p_0$	$3V_0$	$12T_0$
C	$3p_0$	$4V_0$	$12T_0$
D	p_0	$4V_0$	$4T_0$
E	p_0	$2V_0$	$2T_0$
F	$2p_0$	V_0	$2T_0$

Tab. 2: Tepla, která přijme plyn v průběhu dějů

$i \to j$	Q_{ij}
AB	$28p_0V_0$
BC	$12p_0V_0 \ln \frac{4}{3}$
CD	$-20p_0V_0$
DE	$-7p_0V_0$
EF	$-2p_0V_0 \ln 2$
FA	$5p_0V_0$

izobarického děje je konstantní tlak, ale mění se objem plynu. Teplo, které přijme dvouatomový plyn, je $Q_p = 7p\left(V_j - V_i\right)/2$. Nakonec si vzpomeneme na nejsložitější, izotermický děj, při kterém se mění jak tlak, tak objem a plyn v průběhu děje přijme teplo $Q_T = p_iV_i \ln \frac{V_j}{V_i} = p_jV_j \ln \frac{V_j}{V_i}$.

Nyní jsme již vyzbrojeni znalostmi pro dopočtení všeho. Nejprve určíme stavové veličiny p, V a T pro všechny stavy ze stavové rovnice, a to v násobcích p_0, V_0 a T_0. Hodnoty jsou uvedeny v tabulce 1:

Nyní vidíme, že minimální teplota, které plyn v průběhu cyklu dosáhne, je $2T_0$ a maximální teplota je $12T_0$. Tím jsme odpověděli na jednu z otázek v zadání. Ihned můžeme odpovědět i na další, a to, jakou účinnost by měl Carnotův cyklus pracující na těchto teplotách. Účinnost Carnotova stroje je maximální účinnost, kterou může tepelný stroj pracující mezi tepelnými rezervoáry o teplotách T_{max} a T_{min} dosáhnout:

$$\eta_{\mathrm{max}} = 1 - \frac{T_{\mathrm{min}}}{T_{\mathrm{max}}} = 1 - \frac{2T_0}{12T_0} = \frac{5}{6} \doteq 83{,}3\,\%\,.$$

Účinnost Carnotova cyklu a tedy maximální účinnost tepelného stroje je 83,3 %.

Když máme stavové veličiny, můžeme určit tepla, která plyn přijme v jednotlivých dějích. Za kladné považujeme teplo vstupující do stroje a za záporné teplo, které stroj odevzdává chladiči. Tepla opět určujeme v násobcích p_0 a V_0. Pokud máte raději nRT_0, pak je to samozřejmě ekvivalentní zápis. Tepla jsou uvedena v tabulce 2:

Pravděpodobně jste touto úlohou popsali více papíru, ale jak vidíte, tak když si všechno napíšete do tabulek, tak je to relativně jednoduché a přímočaré. Tedy nyní nám stačí dosadit za $Q_\mathrm{in} = Q_\mathrm{AB} + Q_\mathrm{BC} + Q_\mathrm{FA}$ a $Q_\mathrm{out} = |Q_\mathrm{CD} + Q_\mathrm{DE} + Q_\mathrm{EF}|$ do vztahu pro účinnost. Vychází nám pak účinnost $\eta \doteq 22{,}1\,\%$. To je zhruba $27\,\%$ maximální účinnosti, které by dosáhl plyn s Carnotovým cyklem. Slabinou obou cyklů je však izotermický děj, který je zpravidla relativně pomalý, protože se musí vyrovnávat postupně se změnou objemu vyrovnávat i tlak tak, aby byla teplota konstantní.

Řešení bonusové úlohy

Bonusová úloha byla tentokrát opravdu jednoduchá, protože stačilo vypočítat ještě jednodušší úlohu. Pro přehlednost používáme stejné značení jako u předchozí hlavní úlohy, ale vztahuje se ke stavům, které odpovídají tomuto tepelnému stroji. Známe tlaky a objemy plynu v jednotlivých stavech, určíme si ještě teploty

$$T_\mathrm{A} = T_0\,, \quad T_\mathrm{B} = 4T_0\,, \quad T_\mathrm{C} = 16T_0\,, \quad T_\mathrm{D} = 4T_0\,.$$

Vidíme, že v průběhu cyklu musíme dosahovat větší maximální a menší minimální teploty plynu. Účinnost Carnotova cyklu na těchto teplotách by byla dokonce $\eta_\mathrm{max} = 1 - 1/16 \doteq 93{,}8\,\%$.

Určíme teplo, které bude přijímat či odevzdávat plyn v jednotlivých dějích:

$$Q_\mathrm{AB} = \frac{15}{2}p_0V_0\,, \quad Q_\mathrm{BC} = 42p_0V_0\,, \quad Q_\mathrm{CD} = -30p_0V_0\,, \quad Q_\mathrm{DA} = -\frac{21}{2}p_0V_0\,.$$

Nezbývá než určit účinnost, která je $\eta \doteq 18{,}2\,\%$. Závěrem bychom měli srovnat oba děje. Evidentně bude těžší vyrobit stroj, který bude využívat cyklus z bonusové úlohy, protože podíl maximální a minimální teploty je více než 2,6násobný. To, že v průběhu děje je rozdíl mezi maximální a minimální teplotou šestnáctinásobný, bude náročné na součástky, ve kterých děj probíhá. Dále je také o něco méně praktický vzhledem k účinnosti, kterou má menší než tepelný stroj z hlavní části úlohy. Jediný argument, který mluví ve prospěch stroje v bonusové úloze, je ten, že má méně stavů a méně dějů. Je tedy jednodušší a může probíhat v principu rychleji, ale to stejně neznamená, že je snáze realizovatelný.

Karel Kolář
karel@fykos.cz