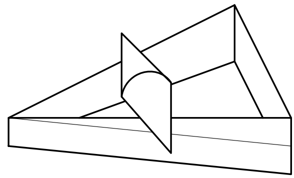
Úloha IV.3 ... dvojkužel

8 bodů; průměr 3,84; řešilo 38 studentů

Mějme dřevěnou konstrukci, která má půdorys rovnoramenného trojúhelníku a výška jejích dvou ramen roste směrem k základně s úhlem $\alpha = 2\,^\circ$. Do vrcholu naproti základně $c = 35\,\mathrm{cm}$, u nějž má trojúhelník úhel $\beta = 70\,^\circ$, umístíme dvojkužel s vrcholovým úhlem $\varphi = 40\,^\circ$ a výškou $2h = 40\,\mathrm{cm}$. Kužel se samovolně začne valit „do kopce“, tedy ve směru růstu hran trojúhelníku.



a) Vysvětlete, proč se dvojkužel může kutálet do kopce.

b) Jak závisí poloha těžiště kuželu na uražené vzdálenosti?

c) Jaká je rychlost kužele těsně před nárazem na základnu?

d) Kolik otáček kužel vykoná během své cesty?

Na počátku je kužel umístěn horizontálně na konstrukci tak, že jeho těžiště se nachází přesně nad vrcholem trojúhelníku proti základně.

Kuželosečky v lingebře Mirkovi připomněly tento hezký základoškolský pokus.

Nejprve poznamenejme, že pokud umístíme kužel přesně na vrchol konstrukce, tak při rozjezdu zapadne do konstrukce, čímž už při „nulové“ poloze získá jistou energii. Proto interpretujme zadání tak, že kužel už je mezi rameny a je velmi blízko k samotnému vrcholu.

Přistupme k problému nejprve tak, že úhel α je malý, a proto budeme uvažovat, že těžiště kuželu leží svisle nad body dotyku (při pohledu z boku). Ve skutečnosti se však bude válec dotýkat ramen konstrukce tak, že spojnice bodu dotyku a osy kužele bude kolmá na „povrch“ konstrukce. Na konci toto formulujeme přesněji a povíme si, kde se řešení bude lišit.

Označme x vzdálenost ujetou dvojkuželem (měřenou podél výšky trojúhelníkového půdorysu). Dále označme $2y$ vzdálenost ramen trojúhelníka v bodě x (vzdálenost bodů dotyku dvojkuželu s trojúhelníkem), r poloměr řezu dvojkužele v bodě dotyku s trojúhelníkem a R maximální poloměr řezu dvojkuželem (v jeho středu). Tyto rozměry můžeme vyjádřit následovně,

$$
\begin{aligned}
y &= x \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\,,\\
r &= (h - y) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\,,\\
R &= h \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Když si správně rozmyslíme geometrii, vidíme, že pro výšku těžiště platí

$$
t = \frac{x}{\cos \frac{\beta}{2}} \operatorname{tg} \alpha + r - R = x \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \frac{\beta}{2}} - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)\,,
$$

kde jsme zvolili nulovou hladinu (přidali třetí, konstantní člen) tak, aby v počáteční poloze byla výška těžiště nulová. První člen popisuje, jak se s rostoucím x zvedají boční stěny konstrukce, a druhý člen, jak se roztahují, v důsledu čehož klesá těžiště. Zaveďme ještě pro pozdější využití koeficient k jako závorku v předchozím vztahu, abychom mohli jednoduše psát $t = kx$.

Jelikož se systém musí vyvíjet tak, že potenciální energie se bude minimalizovat, musí být závorka v předchozím výrazu záporná, pokud chceme, aby se dvojkužel valil „do kopce“, tedy do směru, kde x roste. Pak při růstu x bude skutečně potenciální energie klesat. Dosazením zadaných parametrů vidíme, že v tomto případě se skutečně bude dvojkužel valit „do kopce“.

Dále budeme předpokládat, že kužel neprokluzuje, tedy pro translační a rotační rychlost platí vztah

$$v = r\omega = \omega(h - y)\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\,. \tag{1}$$

Po dosazením za rychlosti v a ω vztahy

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\,,$$
$$\omega = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\tau}\,,$$

kde τ značí čas, můžeme rovnost (1) zintegrovat a získat vztah pro úhel Φ, o který se kužel otočil při posunu do polohy x,

$$\Phi(x) = \int\limits_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}(h - x\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2})} = -\frac{\log\left(1 - \frac{x}{h}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\right)}{\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}}\,.$$

Odtud získáme počet otáček jako

$$N(x) = \frac{\Phi(x)}{2\pi}\,.$$

Jelikož je otázka polohy nárazu komplikovanější, prozatím předpokládejme, že známe konečnou polohu válce x, kterou označmě jako ξ, a vypočtěme příslušnou rychlost kužele před nárazem. K poloze ξ se vrátíme vzápětí.

K výpočtu rychlosti použijeme ZZE v následujícím tvaru,

$$-mgk\xi = \frac{1}{2}mv^2(\xi) + \frac{1}{2}J\frac{v^2(\xi)}{r^2(\xi)}\,.$$

Odtud snadno vyjádříme rychlost

$$v(\xi) = \sqrt{\frac{-2gk\xi}{1 + \frac{J}{mr^2(\xi)}}}\,.$$

Nyní si uvědomme, že dvojkužel bude mít stejný výraz pro moment setrvačnosti jako kužel[1] (jedná se o součet momentů setrvačnosti dvou kuželů o poloviční hmotnosti). Hodnota momentu setrvačnosti kužele vzhledem k jeho rotační ose je[2]

$$J = \frac{3}{10}mR^2 = \frac{3}{10}mh^2\,\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}\,.$$

V tuto chvíli trochu předběhneme a uvedeme, že vyjde $\xi \doteq 18{,}1\,\mathrm{cm}$. Po dosazení rozměrů systému dostáváme rychlost dvojkuželu před nárazem $v(\xi) = 0{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a počet otáček dvojkuželu před nárazem $N(\xi) = 0.6$. Tedy na přibližně 18 cm se dvojkužel zrychlí na $0{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a při tom se otočí pouze o něco málo víc než půl otočky.

[1] Z toho důvodu v textu nerozlišujeme důsledně rozdíl mezi kuželem a dvojkuželem.
[2] Tato hodnota už lze nalézt v literatuře nebo si ji můžete sami ověřit integrováním $r^2\mathrm{d}m$.

Podmínky nárazu a místo kolize

První podmínka pro místo nárazu, která nás napadne, je

$$\xi = \frac{c}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}} - R = \frac{c}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}} - h\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\,.$$

Toto však platí pouze v případě, kdy je v bodě nárazu těžiště kuželu níže než je výška koncového mantinelu (nárazové stěny), musíme tedy ověřit nerovnost

$$k\xi + R \leq \frac{c}{2}\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sin\frac{\beta}{2}}\,.$$

Pokud je podmínka splněna (v našem případě není), máme správné vyjádření pro ξ. V opačném případě může kužel pokračovat dál, jelikož jeho nejvzdálenější část je nad koncovým mantinelem. K nárazu dojde v jiné hodnotě x, kterou opět nazveme ξ (lépe řečeno bude po tomto rozboru ξ v každém případě odkazovat na správnou hodnotu x, kdy dojde k nárazu). Nyní ξ vyjádříme jako

$$\xi = \frac{c}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}} - \Delta x\,, \tag{2}$$

jen musíme nalézt danou hodnotu Δx. Při nárazu bude osa kuželu vzdálená Δx od koncového mantinelu a těžiště bude nad vrškem mantinelu o výšku danou výrazem

$$\Delta H(\xi) = k\xi + R - \frac{c}{2}\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sin\frac{\beta}{2}}\,,$$

kde ξ je jako v (2).

Nyní už dostváme z Pythagorovy věty rovnici pro Δx, a sice

$$R^2 = \Delta x^2 + \Delta H^2(\xi)\,.$$

Jelikož však odsud dostaneme závislost $\Delta x(\xi)$, je určující až rovnice pro ξ ve tvaru

$$\xi = \frac{c}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}} - \Delta x(\xi)\,,$$

ze které už skutečně[3] dostaneme hodnotu ξ, kterou však zde nebudeme konkrétně vyjadřovat kvůli složitosti výrazu, který stejně nebudeme potřebovat. Předpokládejme tedy, že nyní známe správnou hodnotu x, kdy dojde k nárazu – a pojmenovali jsme ji ξ. V našem případě je $\xi \doteq 18{,}1\,\mathrm{cm}$. Pokud bychom uvažovali první podmínku pro místo nárazu, dostali bychom podle očekávání nižší hodnotu, a sice $\xi = 17{,}7\,\mathrm{cm}$.

Aby však k nárazu došlo, nesmí kužel propadnout dovnitř trojúhelníka, než vůbec dojede k zadní stěně. Musíme tedy ověřit nerovnost $h \geq y(\xi)$, tedy

$$h \geq \xi\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\,,$$

která opravdu je splněna.

[3] Tato rovnice je kvadratická, budeme si tedy muset rozmyslet, který kořen je ten správný. Bude to ten nižší, protože vyšší bude odpovídat analogické hodnotě ξ, ale až za mantinelem.

Přesnější řešení

Pokud bychom chtěli vzít v potaz i korekci na úhel α, výraz pro výšku těžiště by nabyl tvaru

$$t = \frac{x}{\cos\frac{\beta}{2}} \operatorname{tg}\alpha + r\cos\alpha' - R\cos\alpha' \,.$$

Ve druhém členu faktor $\cos\alpha'$ odráží fakt, že těžiště není svisle nad body dotyku kuželu s konstrukcí, ale kolmo nad rovinou, která by vznikla, pokud bychom na naši konstrukci (bez válce) položila desku.

Úhel α' můžeme vypočítat tak, že v poloze x je deska ve výšce $x\operatorname{tg}\alpha'$, kterou také umíme spočítat tak, že jsme se posunuli podél ramene (stoupajícího pod úhlem α) o vzdálenost $x/\cos(\beta/2)$, tedy platí

$$x\operatorname{tg}\alpha' = \frac{x}{\cos\frac{\beta}{2}}\operatorname{tg}\alpha \,,$$

$$\cos\alpha' = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha'}} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\alpha}} \doteq 0{,}999 \,.$$

Vidíme, že pro malé α a ne příliš velké β, jako v našem případě, můžeme faktor $\cos\alpha'$ zanedbat.

Válec by měl nenulovou složku rychlosti i ve svislém směru, pro velikost rychlosti by pak platilo

$$v = \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}t^2}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{1+k^2} \,.$$

Výsledný úhel Φ by se tedy měl dělit faktorem $\sqrt{1+k^2}$. Jelikož $\sqrt{1+k^2} \doteq 1{,}045$, tak také tento faktor šel zanedbat pro naši kombinaci úhlů. Do vztahu pro finální rychlost se tento faktor nedostane, protože stále bude platit ZZE v totožném tvaru, resp. jediná změna bude, že k bude mít trochu jinou hodnotu.

Při nárazu bude osa kuželu vzdálená Δx od koncového mantinelu a těžiště bude nad vrškem mantinelu o výšku danou výrazem

$$\Delta H(\xi) = k\xi + R\cos\alpha' - \frac{c}{2}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\frac{\beta}{2}} \,.$$

Pokud bychom uvažovali první model (v jistých uspořádáních tohoto experimentu také správný), pak bychom dostali podmínku nárazu

$$\xi = \frac{c}{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} - R(1-\sin\alpha') \,.$$

Pro naše hodnoty (malý úhel α především vzhledem k úhlu β) vyšly všechny výsledky téměř úplně stejně, jako kdybychom zanedbali faktory $\cos\alpha'$ a $\sqrt{1+k^2}$.

Jakub Dolejší
`krasnykuba@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.