Úloha III.3 ... kde to píská

7 bodů; průměr 5,91; řešilo 33 studentů

Verčiny uši lze aproximovat dvěma bodovými detektory ve vzdálenosti d, které detekují zvukové vlny ze všech směrů stejně dobře. Verča umí polohu známého zdroje zvuku poslepu určit velice přesně, proto jednoho dne, když se probudila, vyzvala své přátele k tomu, aby ji vyzkoušeli. Jenže Verča si v jednom uchu zapomněla špunt, který snižuje intenzitu zvuku v jejím levém uchu k-krát. Verči byly zavázány oči a zdroj byl umístěn do vzdálenosti y před ni a o x napravo (či $-x$ nalevo). Určete, na které místo (x', y') Verča ukáže, jestliže uši rozeznávají polohu zdroje podle hlasitosti zvuku.

Luboška vyděsil telefon s jedním sluchátkem v uších.

Existují dva přístupy, jeden více počítací a druhý více geometrický. Nejdříve tedy zkusme spočítat vztah mezi x, y a x', y'. Víme, že intenzita zvuku klesá s druhou mocninou vzdálenosti podle vzorce

$$I = \frac{c}{r^2},$$

v našem případě pak (pro levé a pravé ucho)

$$I_{\mathrm{L,P}} = \frac{c}{\left(x \pm \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}, \tag{1}$$

kde c je nám neznámá konstanta, kterou naštestí nebudeme v tomto příkladě potřebovat, a znaménko plus odpovídá levému uchu.

Ze zadání máme

$$I'_{\mathrm{L}} = \frac{I_{\mathrm{L}}}{k}$$
$$I'_{\mathrm{P}} = I_{\mathrm{P}}$$

Dosadíme z (1) a upravíme [1]

$$\left(x' + \frac{d}{2}\right)^2 + y'^2 = k\left(\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2\right) \tag{2}$$

$$\left(x' - \frac{d}{2}\right)^2 + y'^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 \tag{3}$$

Vyjádříme x' a y'

$$x' = \frac{(k-1)\left(x^2 + y^2 + \frac{d^2}{4}\right) + dx\,(k+1)}{2d} \tag{4}$$

$$y'^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 - \left(x' - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 \tag{5}$$

Rozhodně v tomto případě nepovažujeme za vhodné odmocňovat vzorec, natož dosazovat za x' v druhém vzorci, abychom se ve vzorcích vůbec vyznali.

Věnujme se rozboru těchto rovnic. Pro $k = 1$ se vzorec zredukuje na $x' = x$ a $y'^2 = y^2$, což odpovídá nezkreslenému vnímání. Druhá rovnost může být splněna dvěma způsoby, s opačnými znaménky. To nám říká, že zdroj může být před nebo za Verčou, mezi čímž ona bohužel nedokáže

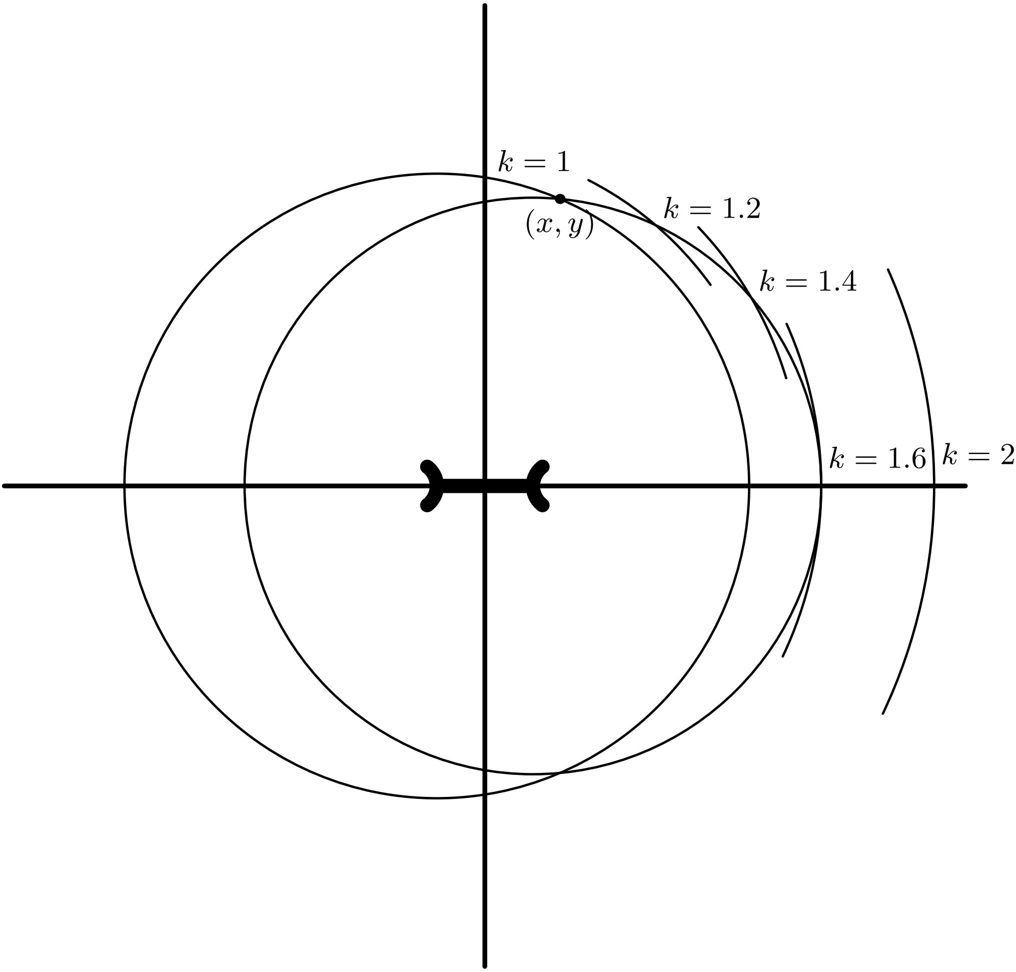
[1] Všimněme si, že c se vykrátí.

kvůli osové symetrii problému rozlišit.[2] Se zvyšujícím se k se zvyšuje i x', čímž se bod, na který ukáže, bude zobrazovat čím dál víc napravo od ní. Jak to bude s y'? Z rovnice (5) je vidět, že s rostoucím x' klesá hodnota y' až k nule, což znamená, že se čárkovaný bod zobrazuje stále více k ose x, až ji dosáhne, čímž bude bod přesně vlevo od Verči.[3] Pro vyšší k, a tedy i x' bude záporný člen rovnice (5) dominovat, čímž posune pravou stranu do záporných čísel, a rovnice nebude mít řešení. V tomto okamžiku si Verča nejspíš uvědomí, že má sluchátko v uších.

Nyní přejděme ke geometrickému přístupu. Podívejme se na soustavu rovnic (2),(3). To jsou ale rovnice kružnic! Pravé strany vyjadřují původní vzdálenosti–které považujeme za konstantu.[4] Nalevo pak jsou rovnice pro kružnice se středy v obou uších. Jedna má za poloměr původní vzdálenost ucha od bodu (x, y), a tak tímto bodem prochází, druhá pak má poloměr $\sqrt{k}$-krát větší. Mají-li být splněny obě rovnice, musí se jednat o průsečíky obou kružnic, ty jsou dva, pokud se kružnice protínají, což je konzistentní s rovnicí (5). Jediné řešení rovnice pak odpovídá stavu, kdy se kružnice dotýkají. Lépe je to vidět na obrázku 1.

Mikuláš Matoušek
`mikulas@fykos.cz`

[2]Pokud by měla Verča třetí ucho, mohla by to zvládnout.
[3]Všimněme si, že v tomto okamžiku má rovnice jen jedno řešení–body před a za Verčou splynou.
[4]Přesněji řečeno za parametr.



Obr. 1