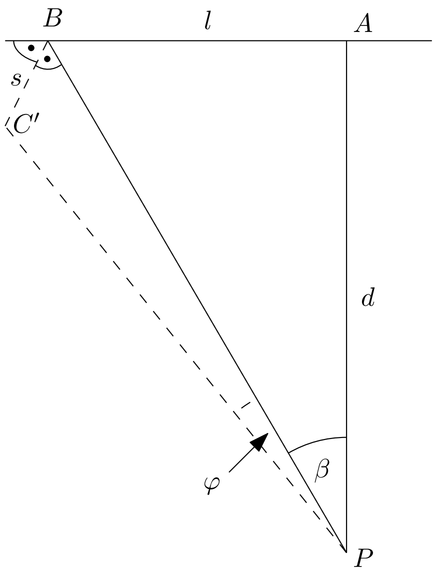
Úloha I.4 ... něco je tu nakřivo

6 bodů; průměr 3,12; řešilo 26 studentů

Pozorovatel se nachází na lodi na otevřeném moři ve výšce h nad hladinou. Je vzdálen d od vodorovného zábradlí a to v takové poloze, že dívá-li se kolmo na zábradlí, splývá dolní okraj zábradlí s horizontem. Podívá-li se ale na zábradlí ve vzdálenosti l na stranu od kolmice, vidí, že se obzor nachází o $s \pm s_s$ pod dolním koncem zábradlí. Určete poloměr Země.

Lubošek trpí mořskou nemocí.

V celé úloze budeme považovat Zemi za dokonalou kouli. Pro vyřešení úlohy je esenciální správné pochopení prostorové konfigurace a souvislostí jednotlivých parametrů systému. Začněme lokálním okolím pozorovatele jako na obrázku[1] 1.



Obr. 1: Situace v okolí pozorovatele. Čárkované elementy se nachází mimo rovinu pozorovatel – zábradlí (konkrétně pod ní).

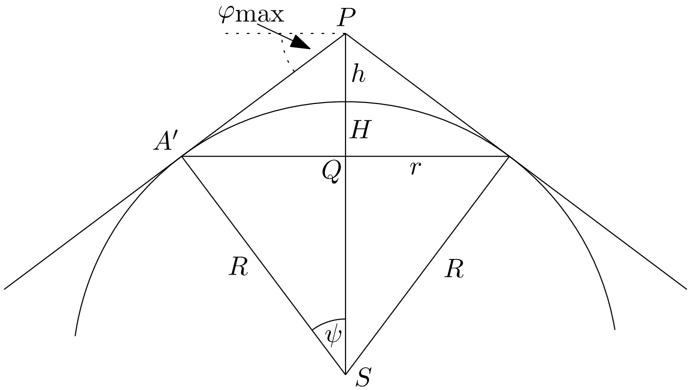
Označme polohu pozorovatele P, patu kolmice od P k zábradlí A, bod na zábradlí ve vzdálenosti l označme B a konečně označme C' bod o s pod bodem B, tj. průsečík svislé roviny zábradlí, spojnic pozorovatele a bodů na obzoru a svislé roviny obsahující P a B. Rovněž zaveďme označení úhlů $\angle \mathsf{BPC}'$ jako φ a $\angle \mathsf{APB}$ jako β. Ze situace je zřejmé, že

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{s}{\sqrt{l^2 + d^2}} \approx \frac{s}{\sqrt{l^2 + d^2}} \,, \tag{1}$$

$$\cos \beta = \frac{d}{\sqrt{l^2 + d^2}} \,.$$

Ospravedlněním aproximace se budeme zabývat níže

[1] V řešeném případě jsme uvažovali, že „o s níže“ je s měřené kolmo na přímku pohledu. Tato formulace se dá též pochopit, že je s měřeno svisle, tj na spojnici se středem Země. Oba přístupy dávají nakonec po zanedbáních stejný výsledek.



Obr. 2: Řez Zemí znázorňující geometrický význam horizontu.

Dále se zamyslíme, co je vlastně horizont který vidíme. Bod v linii pohledu na obzoru označme A',[2] střed Země označme S, ψ označme úhel $|\angle \mathsf{A}'\mathsf{SP}|$ poloměr Země R, r poloměr kružnice-horizontu a H označme velikost výšky vrchlíku Země odděleným rovinou horizontu. Z geometrie systému a z Pythagorovy věty plyne

$$
\begin{aligned}
|\mathsf{A}'\mathsf{P}|^2 + R^2 &= (R+h)^2\,,\\
|\mathsf{A}'\mathsf{P}|^2 &= 2Rh + h^2\,,\\
|\mathsf{A}'\mathsf{P}| &\approx \sqrt{2Rh}\,,
\end{aligned}
$$

kde jsme zanedbali člen h^2 vůči členu $2Rh$, protože je $2R/h$krát menší, což je řádově milionkrát. Tento archetyp budeme používat během celé této úlohy, jelikož h je vůči R velice malé. Pro tuto velikost je i hodnota ψ:

$$
\psi = \mathrm{arctg}\left(\frac{|\mathsf{A}'\mathsf{P}|}{R}\right) = \sqrt{\frac{2h}{R}} \ll 1\,.
$$

Jak je známo, pro $\psi \ll 1$ platí

$$
\mathrm{tg}\,\psi \approx \sin\psi \approx \psi\,,
$$

kde ψ je velikost onoho úhlu v radiánech. Toto také umožňuje aproximace φ jakožto malého úhlu v (1), jelikož hodnota φ nikdy nepřesáhne ψ (viz obr. 2).

Pro poloměr kružnice-obzoru je tedy[3]

$$
r \approx |\mathsf{A}'\mathsf{P}| \approx \sqrt{2Rh}\,. \tag{2}
$$

Další rozměr, který se nám bude hodit, je H. Napíšeme-li Pythagorovu větu pro trojúhelník $\mathsf{A}'\mathsf{QS}$,

$$
\begin{aligned}
r^2 + (R-H)^2 &= R^2\,,\\
H^2 - 2RH + r^2 &= 0\,,
\end{aligned}
$$

[2] Bez újmy na obecnosti toto může být třeba bod na obzoru splývající se zábradlím.

[3] Obdobné platí pro délku příslušného oblouku – tedy vzdálenost obzoru po povrchu Země (nebo po moři).

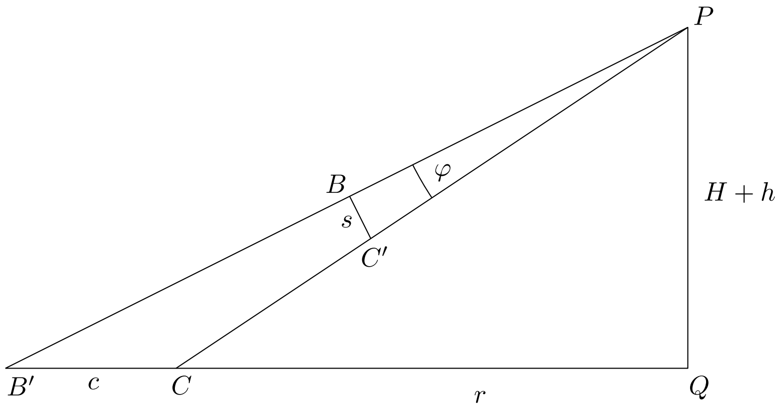
dosazením (2) dostáváme

$$H^2 - 2RH + 2hR = 0\,,$$
$$H = \frac{1}{2}(2R \pm \sqrt{4R^2 - 8hR})\,,$$
$$H = R \pm \sqrt{R^2 - 2hR}\,,$$
$$H = R\left(1 \pm \left(1 - \frac{h}{R}\right)\right)\,,$$

kde[4] jsme použili binomickou aproximaci $(1 + \frac{h}{R})^n \approx 1 + n\frac{h}{R}$, jelikož $h \ll R$. Dostáváme tedy dvě řešení, jedno $H = h$ a k němu komplementární $H = 2R - h$, budeme tedy uvažovat

$$H \approx h\,. \tag{3}$$

Jak tohle souvisí s naším pozorováním? Na obrázku 3 je rovina $\mathsf{PBC'}$, tj. rovina pozorovatele a měřené vzdálenosti obzoru od zábradlí v projekci do svislé roviny zábradlí. Chceme-li dát do vztahu φ s ostatními veličinami, můžeme jej například vyjádřit jako rozdíl úhlů $\angle\mathsf{QCP}$ a $\angle\mathsf{QB'P}$ (střídavý úhel), to jest



Obr. 3: Rovina obsahující s, tzn. rovina obsahující pozorovatele a svislici na zábradlí v bodě A.

$$\varphi = |\angle\mathsf{QCP}| - |\angle\mathsf{QB'P}| = \operatorname{arctg}\left(\frac{H+h}{r}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{H+h}{r+c}\right)\,. \tag{4}$$

Podle (3) jsou čitatele argumentů zhruba $2h$, podle (2) jsou jmenovatele argumentů alespoň $\sqrt{2hR}$. Argumenty arkustangent jsou tedy velmi malé a je tedy možné použít aproximaci

$$\operatorname{arctg}(x) \approx x\,, \quad x \ll 1\,,$$

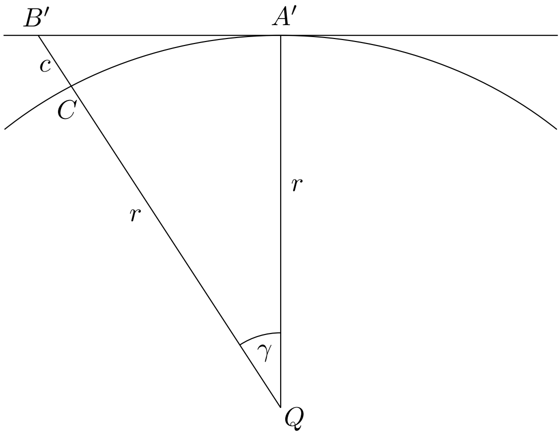
z (4) tedy dostaneme

$$\varphi \approx \frac{H+h}{r} - \frac{H+h}{r+c} = (H+h)\frac{c}{r(r+c)}\,. \tag{5}$$

[4] Všimněme si, že kvadratická rovnice pro H by neměla reálné řešení pro $h > R/2$. Toto je důsledkem dříve provedené aproximace, která předpokládala $h \ll R$, tento charakter rovnice je tedy přijatelný.

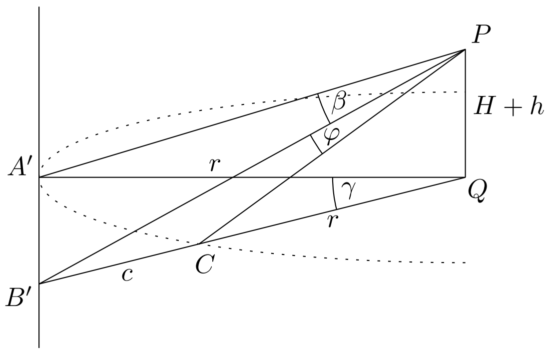
Tento vztah zatím v tomto tvaru ponechejme a zabývejme se velikostí c. Tak lze učinit podíváme-li se na řez rovinou horizontu jako na obr. 4. Vzhledem k pravoúhlosti trojúhelníku $\mathsf{B'A'Q}$ platí

$$(c+r)\cos\gamma = r\,,$$
$$c = r\left(\frac{1}{\cos\gamma} - 1\right)\,. \tag{6}$$



Obr. 4: Rovina obsahující kružnici-obzor.

Hodnota γ koresponduje s hodnotou β, jak se ukáže z obrázku 5 a následujících vztahů.



Obr. 5: Abstrakce znázorňující souvislost β a γ.

Napišme si kosinové věty pro trojúhelník $\mathsf{A'PB'}$, resp. $\mathsf{A'QB'}$ pro úhly β, resp. γ

$$|\mathsf{A'B'}|^2 = |\mathsf{A'P}|^2 + |\mathsf{B'P}|^2 - 2|\mathsf{A'P}||\mathsf{B'P}|\cos\beta\,,$$
$$|\mathsf{A'B'}|^2 = |\mathsf{A'Q}|^2 + |\mathsf{B'Q}|^2 - 2|\mathsf{A'Q}||\mathsf{B'Q}|\cos\gamma\,.$$

Vezmeme-li Pythagorovy věty pro trojúhelníky A′PQ a B′PQ, získáváme z rovnosti pravých stran kosinových rovnic

$$2(H+h)^2 + 2r(H+h) + 2(r+c)(H+h) - 2\sqrt{((H+h)^2+r^2)((H+h)^2+(r+c)^2)}\cos\beta = \\ = -2r(r+c)\cos\gamma\,,$$

Do vztahu dosadíme (3), (2) a zanedbáme všechny členy typu h/R vůči členům typu 1 či $1/\cos\xi$[5] dostáváme zhruba

$$\cos(\gamma) \approx \cos(\beta)\,. \tag{7}$$

Nyní už stačí dát dohromady rovnosti (1), (2), (3), (5), (6) a (7) dostáváme

$$\varphi \approx (H+h)\frac{c}{r(r+c)}\,,$$
$$r(r+c)\varphi \approx 2hc\,,$$
$$r\varphi\frac{1}{\cos\beta} \approx 2h(\frac{1}{\cos\beta}-1)\,,$$
$$r \approx 2h\cos\beta(\frac{1}{\cos\beta}-1)\frac{1}{\varphi}\,,$$
$$\frac{2hd}{s}\left(\frac{\sqrt{l^2+d^2}}{d}-1\right) \approx r \approx \sqrt{2hR}\,,$$
$$R \approx \frac{2hd^2}{s^2}\left(\frac{l^2}{d^2}-\frac{2\sqrt{l^2+d^2}}{d}+2\right)\,,$$

což je odhad pro R v dost dobrém přiblížení. Podle Gaussova vzorce pro šíření chyb bude chyba určení poloměru Země s_R

$$s_R \approx \frac{4s_s hd^2}{s^3}\left(\frac{l^2}{d^2}-\frac{2\sqrt{l^2+d^2}}{d}+2\right)\,.$$

Uskutečnit tento nápad v praxi je technicky náročné, jelikož je potřeba široký úhel pohledu na moře, alespoň částečně stabilní pozorovatelskou základnu (malé lodě se budou hodně, rychle a často houpat) a také je tím citlivější na přesnost měření, čím níže jste nad hladinou. Pokud bychom provedli měření na velké výletní lodi,[6] mohli bychom provést měření s parametry například $h = 40\,\mathrm{m}$, $d = 2\,\mathrm{m}$, $l = 1{,}5\,\mathrm{m}$ a $(s \pm s_s) = (2{,}0 \pm 0{,}5)\,\mathrm{mm}$,[7] naše výsledky udávají poloměr země jako $R = (5\,000 \pm 2\,500)\,\mathrm{km}$.

[5] Předpokládáme, že l není řádově větší než d. Poté lze výrazy s $\cos\xi$ považovat za řádově 1 a $r+c$ řádově r. Navíc i v tom případě by aproximace byla na místě, jen by bylo třeba nahlédnout že výraz typu $h/(r+c)$ je ještě menší než $\sqrt{h/R}$.

[6] např. `https://en.wikipedia.org/wiki/MSC_Armonia`

[7] Vzhledem k technické náročnosti by bylo velice komplikované dosáhnout vyšší přesnosti.

Komentáře k došlým řešením

Největší problémy dělalo správné pochopení zadání. Za zmínku stojí také jiný postup, který vychází z cylindrické simetrie soustavy pozorvatel – obzor.

Lubomír Grund
grund@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.