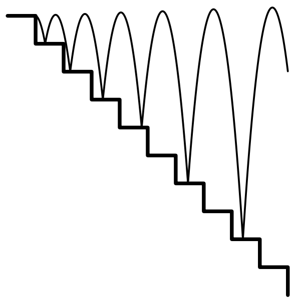
## Úloha I.3 ... hopsa hejsa

5 bodů; (chybí statistiky)

*Mějme ideální hopík dokonalé odrazivosti a zanedbatelných rozměrů. Tento hopík hodíme z nekonečných schodů, kde jeden schod má výšku $h$ a délku $l$. Odrazy probíhají beze tření. Popište závislost nejvyšší dosažené výšky (měřeno od prvního schodu) hopíku po $n$-tém odrazu na počátečních parametrech.* *Lubošek potkal v městské dopravě Mikuláše.*



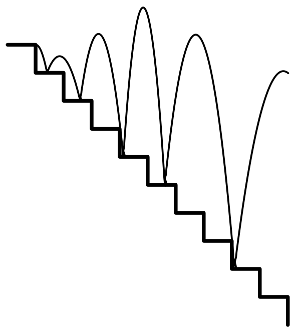
Obr. 1: Trajektorie našeho idealizovaného hopíku

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že hopík se na začátku pohybuje vodorovně na úrovni nejvyššího schodu. Hopík postupně, jak na něj působí gravitace, bude rovnoměrně zrychlovat směrem dolů, a jeho kinetická energie bude růst na úkor energie potenciální. Kvůli zákonu zachování energie musí platit

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2, \qquad (1)$$

kde $h$ je hloubka od horního schodu, ve které se hopík nachází, a $v$ je rychlost směrem dolů (složku rychlosti ve vodorovném směru ignorujeme, neboť její příspěvek by se musel vyskytovat na obou stranách rovnice a odečetl by se). Nejvyšší rychlosti dosáhne při dopadu na schod (je jedno který) a kvůli dokonalé odrazivosti se se stejnou rychlostí vydá směrem nahoru. Nejvyššího bodu dosáhne v okamžiku kdy bude nulová složka rychlost ve svislém směru. Kvůli rovnici (1) pak musí být i hloubka nulová, a hopík tedy bude v úrovni prvního schodu. Protože toto bude platit i po $n$-tém odrazu, bude maximální výška po každém odrazu na úrovni prvního schodu.

Pokud bychom neučinili předpoklad o vodorovném vrhu, přibyl by v rovnici (1) na levé straně člen $\frac{1}{2}mv_0^2$, kde $v_0$ je počáteční rychlost ve vertikálním směru. Maximální výšku získáme položením pravé strany rovnice rovnou 0 a vyřešením pro $h$. Maximální výška bude konstantní a rovna maximální výšce po prvním odrazu [1]. Pokud by počátek pohybu nebyl v úrovni prvního schodu, stačilo by posunout referenční bod, od kterého počítáme hloubku, ve které se míček nachází.



Obr. 2: Trajektorie neidealizovaného hopíku

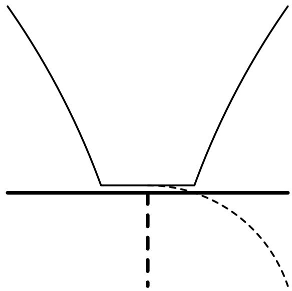
Mohlo by se tedy zdát, že stačí říci, že kvůli zachování mechanické energie zůstane maximální výška konstantní, na úrovni prvního schodu, ale situace je trochu složitější. Pokud má hopík nenulovou rychlost směrem dopředu (což mít musí, protože jinak by nikam nedoskákal), existují způsoby, jak se může složka rychlosti směrem dolů přeměnit ve složku směrem dopředu a naopak. Pak by se samozřejmě maximální výška během každého odrazu nezachovávala, ale netriviálním způsobem by závisela na čase. Nejjednodušší způsob, jak by toto mohlo nastat, je, že hopík trefí hranu schodu. Protože ale zanedbáváme rozměry tělesa, tak tato možnost nenastane. Druhá možnost je, že hopík při dopadu vlivem tření získá rotaci. Pak nejenže by se rychlost změnila kvůli tomu, že část energie by se ukryla v rotaci hopíku, navíc by se při dalších odrazech vlivem rotace nemusel rovnat úhel dopadu úhlu odrazu. Jak by trajektorie mohla vypadat je naznačeno

[1] Zajímavé je, že nezáleží, jestli je směr pohybu na začátku šikmo dolů, nebo šikmo nahoru, maximální výška bude vždy větší než u vodorovného pohybu.

na obrázku 2. To ale v našem případě nenastane, protože odrazy probíhají bez tření. Proto se kvůli zákonu zachování hybnosti v horizontálním směru musí úhel dopadu rovnat úhlu odrazu. Tady tedy můžeme dojít k závěru, že se maximální výška během jednotlivých odrazů nebude měnit a míček bude mít trajektorii podobnou té na obrázku 1.

Ale nakonec je třeba zmínit, že jsme nalezli jednu hypotetickou možnost (kterou jsme po řešitelích samozřejmě nepožadovali), během které by se maximální výška nezachovávala. Předpokládáme-li, že hopík se při dopadu zdeformuje, tato deformace mu zabere nějaký krátký čas, po který bude bez tření klouzat po podložce.

Průběh tohoto je nakreslen na obrázku 3, pomocí plné čáry. Pokud ovšem během tohoto klouzání doklouže na hranu schodu, na obrázku 3 v místě označeném tlustší přerušovanou čarou, bude pokračovat vodorovně, po čárkované trajektorii, protože se již nemá od čeho odrazit. Energie, která byla uložena v deformaci hopíku, se skryje do oscilující deformace hopíku.



Obr. 3: Možnost, jak by přece jen mohla ovlivnit hrana schodu maximální výšku

***Mikuláš Matoušek***
mikulas@fykos.cz