

Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

blíží se Vánoce a s nimi tradičně přichází třetí série FYKOSu. Ve dvou úlohách se zamyslíme nad fungováním našeho těla z pohledu fyzika, dále si procvičíme výpočty s kladkami a také lehce nahlédneme do speciální teorie relativity. Experimentální úloha nás povede ke zkoumání nezbytné součásti vybavení pro noční výpravy: reflexního pásku. Ve třetím dílu seriálu se již dostaneme k zákonu šíření chyb a dozvíme se něco více o centrální limitní větě.

Také Vám s radostí oznamujeme, že na fyziklani.cz se již nyní můžete přihlašovat do 11. ročníku týmové soutěže FYKOSí Fyziklání. Přihlašování neodkládejte, zejména jste-li přespolní, abyste nepřišli o místa v hostelech na přespání před soutěží.

Pěkné chvíle strávené s našimi úlohami a pohodové Vánoce přejí

Organizátoři



Zadání III. série



Termín uploadu: 10. 1. 2017 23.59

Termín odeslání: 9. 1. 2017

Úloha III.1 ... dlouhý film

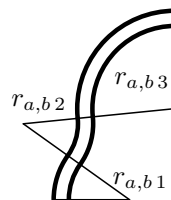
3 body

Stahujete si svůj oblíbený film o velikosti 12 GB rychlostí 10 MB/s. Uvažujte, že signál se po kroucené dvojlince pohybuje rychlostí světla a modulace rozprostírá přenosovou rychlost rovnoměrně, tzn. byla-li by 1 b/s, musíme přijmout signál za celou sekundu k obdržení 1 bitu informace. Jak dlouhý úsek kabelu dokáže film zaplnit svými daty, pokud se bude šířit dostatečně dlouhým kabelem?

Úloha III.2 ... pekelná

3 body

Do pekla vede cesta a silnice po opačných březích řeky. Jdeme po směru řeky, který je vyznačen na obrázku. Břehy řeky jsou tvořeny částmi soustředných kružnic. Pěší cesta kopíruje jeden břeh řeky, silnice druhý břeh, šířka toku je neměnná. Po jaké straně řeky je rychlejší jít? Známe středový úhel každého kružnicového oblouku $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ a poloměr každé kružnice $r_{a1}, r_{b1}, r_{a2}, r_{b2}, \dots$, kde indexy a, b značí levý a pravý břeh.



Úloha III.3 ... kde to píská

7 bodů

Verčiny uší lze aproximovat dvěma bodovými detektory ve vzdálenosti d , které detekují zvukové vlny ze všech směrů stejně dobře. Verča umí polohu známého zdroje zvuku poslepu určit velice přesně, proto jednoho dne, když se probudila, vyzvala své přátele k tomu, aby ji vyzkoušeli. Jenže Verča si v jednom uchu zapomněla špunt, který snižuje intenzitu zvuku v jejím levém uchu k -krát. Verči byly zavázány oči a zdroj byl umístěn do vzdálenosti y před ni a o x napravo (či $-x$ nalevo). Určete, na které místo (x', y') Verča ukáže, jestliže uši rozeznávají polohu zdroje podle hlasitosti zvuku.

Úloha III.4 ... radar zadarmo

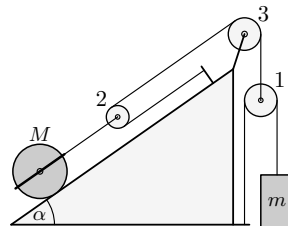
7 bodů

Na všechny patníky podél silnice umístíme kontrolní červené tabulky (vlnová délka červené barvy je $\lambda_\varepsilon = 630 \text{ nm}$). Jakmile řidič vidí na patníku před ním tabulku modrou (vlnová délka modré barvy je $\lambda_m = 450 \text{ nm}$), ví, že jede příliš rychle. Jaká je tato mezní rychlost? Jakou má běžné osobní auto při této rychlosti hybnost a kinetickou energii?

Úloha III.5 ... kladkovaná

7 bodů

Mějme rozestavení kladek jako na obrázku. Známe hmotnosti m_i , poloměry R_i a momenty setrvačnosti J_i všech kladek, hmotnost m závaží a hmotnost M , poloměr R i moment setrvačnosti J válce. Zanedbejte tíhu kladky 2, abyste mohli uvažovat, že lana vedoucí ke kladce 2 jsou rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Součinitel smykového i klidového tření mezi válcem a podložkou je f . Lano na kladkách neprokluzuje. Vypočtete s jakým zrychlením (popř. i úhlovým zrychlením) se bude pohybovat závaží m a válec M .

**Úloha III.P ... srdeční**

8 bodů

Odhadněte, jakou práci vykoná lidské srdce na pumpování krve za jeden den. S čím se dá tato energie srovnat? Jaké procento z doporučeného denního příjmu energie tvoří váš odhad?

Úloha III.E ... reflexní náramek

12 bodů

Změřte co nejvíce charakteristik samonavíjecího reflexního náramku. Zajímá nás především:

- Náramek je vyztužen kusem plechu, který může být ohnut podélně (svinutý náramek) nebo příčně (narovnaný náramek). Jaký poloměr křivosti mají tyto ohyby, pokud na plech nepůsobí vnější síla?
- Pokud náramek narovnáme a budeme ohýbat v jednom místě, při jakém úhlu přejde do ohnutého stavu? Při jakém úhlu se opět narovná? (Pozorujeme hysterezi?)
- Jaký moment síly je potřebný k ohnutí náramku?
- Je některý ze stavů náramku (svinutý nebo narovnaný) energeticky výhodnější? Odhadněte o kolik.

Úloha III.S ... limitní

10 bodů

a) Zkuste vlastními slovy popsat postup konstrukce intervalových odhadů střední hodnoty v případě obecného rozdělení měřených dat (postačí vlastními slovy popsat následující: centrální limitní věta a předpoklady jejího použití, kovariance a korelace (a jejich odhady), vícerozměrná centrální limitní věta a předpoklady jejího použití, zákon šíření nejistot a kdy ho lze použít). Není potřeba uvádět přesná matematická odvození, stačí požadované pojmy a vlastnosti stručně popsat.

- b) V přiloženém datovém souboru *mereni3-1.csv* najdete výsledky měření určité fyzikální veličiny v . Předpokládejme, že si nemůžeme být jisti, zda mají měřená data normální rozdělení. Vyjádřete nejistotu měření této fyzikální veličiny (nejistotu typu B neuvažujte), zkonstruujte intervalové odhady na základě CLV a stručně interpretujte jeho význam. Jak by se změnilы výsledky a interpretace, pokud bychom měli k dispozici jen čtvrtinu měření (řekněme první čtvrtinu dat z datového souboru)?
- c) Předpokládejme, že naším cílem je naměřit fyzikální veličiny x a y , které budeme chtít využít pro dosazení do vzorce

$$v = \frac{1}{2}xy^2.$$

Předpokládejme, že díky znalosti způsobu měření jsme si jisti, že jsou všechna měření na sobě nezávislá a ze zpracování naměřených dat měření máme následující výsledky, které jsou založeny na velkém počtu měření (více než 30 měření každé fyzikální veličiny)

$$x = (5,2 \pm 0,1),$$

$$y = (12,84 \pm 0,06).$$

Určete odhad fyzikální veličiny v a nejistotu měření fyzikální veličiny v .

Nápověda: Mohly by se vám hodit následující vztahy:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}xy^2 \right) = \frac{1}{2}y^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2}xy^2 \right) = xy.$$

- d) Pomocí simulace ve výpočetním prostředí R demonstруйте platnost centrální limitní věty. Tj. generujte n -tice nezávislých realizací náhodné veličiny, která nemá normální rozdělení (pro tento případ použijte exponenciální, rovnoměrné a Poissonovo rozdělení s libovolně zvolenými parametry) a na histogramu ukažte, že pokud na data provedeme následující transformaci

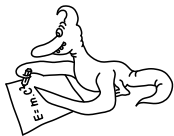
$$\sqrt{n} \frac{x_n - \mu}{S_n},$$

takto transformovaná data už budou rozdělena přibližně podle normálního rozdělení $N(0, 1)$. (Součástí hodnocení bude i hodnocení vzhledu grafů – zejména vhodně zvolené popisky os a legenda.)

Bonus: Předpokládejme, že naším cílem je naměřit fyzikální veličiny x a y , které budeme chtít dosadit do vzorce

$$v = x^2 \sin y.$$

Uvažujme nejobecnější model měření (tj. měřená data nemají normální rozdělení a měření různých fyzikálních veličin na sobě mohou být závislá). V datovém souboru *mereni3-2.csv* máme výsledky měření fyzikálních veličin x a y , určete nejistotu určení veličiny v a zkonstruujte pro ni intervalový odhad.



Řešení II. série

Úloha II.1 ... rande na pláži

3 body; průměr 2,87; řešilo 61 studentů

Představte si, že vezmete svou přítelkyni/svého přítele na večerní rande na pláž a sledujete západ Slunce nad vzdálenou hladinou moře. Protože chcete prodloužit romantickou chvíli, vezmete si s sebou vysokozdvizný vozík, který se, jakmile Slunce začne zapadat za obzor, začne rovnoměrným pohybem zvedat vzhůru, abyste stále viděli Slunce dotýkající se horizontu. Jakou rychlostí se musí vozík pohybovat?

Dominika vzpomínala na Itálii.

Aproximujeme si Zemi kružnicí a Slunce vnějším bodem S této kružnice, pozorovatel budíž bod P , který na začátku leží na kružnici a který se pohybuje po radiále. Z bodu S vedou dvě tečny ke kružnici, budeme uvažovat jen jednu z nich (druhá symbolizuje východ Slunce). Pozorovatel vidí zapadající Slunce, právě když tečna prochází bodem P . Tedy na začátku se musí tečna dotýkat kružnice v bodě P . Slunce se pohybuje úhlovou rychlostí $\omega = 2\pi \sin \alpha / T$, bod dotyku se bude po obvodu Země pohybovat stejnou rychlostí. Přitom T zde značí délku dne a α je úhel, pod kterým Slunce zapadá (jeho velikost závisí na naší zeměpisné poloze). Označme si střed Země jako Z a bod dotyku „posledního paprsku“ jako T . Potom je trojúhelník ZTP pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu T . Úhel u vrcholu Z se s časem mění v závislosti na poloze bodu T , tedy v čase t je jeho velikost rovna $\varphi = \omega t = 2\pi t \sin \alpha / T$. V závislosti na něm se mění i přepona trojúhelníku, jejíž délku chceme vědět. Poloměr Země označme r , tedy délka přepony trojúhelníku ZTP bude

$$\frac{r}{\cos \varphi} = \frac{r}{\cos \frac{2\pi t \sin \alpha}{T}}.$$

Když odečteme poloměr Země, získáme aktuální pozici pozorovatele nad zemským povrchem

$$h(t) = r \left(\frac{1}{\cos \frac{2\pi t \sin \alpha}{T}} - 1 \right).$$

Průměrnou rychlost od začátku pohybu vozíku v čase t zjistíme vydělením výšky časem. Tedy

$$v_P(t) = \frac{r}{t} \left(\frac{1}{\cos \varphi} - 1 \right).$$

Pokud chceme časovou závislost vyjádřit přesně, nezbyvá než derivovat. Tedy okamžitá rychlost zvedáku po dosažení v čase t je

$$v(t) = \frac{d}{dt} r \left(\frac{1}{\cos \frac{2\pi t \sin \alpha}{T}} - 1 \right) = r \left(\frac{\sin \left(\frac{2\pi t \sin \alpha}{T} \right)}{\cos^2 \left(\frac{2\pi t \sin \alpha}{T} \right)} \frac{2\pi \sin \alpha}{T} \right).$$

Nyní dosadíme např. hodnotu $\alpha \approx 50^\circ$ odpovídající italské pláži, délka dne je $T = 86400$ s. Maximální výšku vozíku odhadneme na $h = 2$ m; z rovnice pro $h(t)$ potom dokážeme získat maximální čas pozorování západu $t_{\max} \doteq 14$ s. V tomto čase se bude vozík pohybovat rychlostí $v(t) \doteq 0,28$ m·s⁻¹.

Vzhledem k tomu, že $2\pi t_{\max} \ll T$, můžeme zavést následující aproximace,

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{2\pi t \sin \alpha}{T}\right) &\approx \frac{2\pi t \sin \alpha}{T}, \\ \cos\left(\frac{2\pi t \sin \alpha}{T}\right) &\approx 1.\end{aligned}$$

Poté dostáváme závislost rychlosti vozíku na čase ve tvaru

$$v(t) = rt \left(\frac{2\pi \sin \alpha}{T}\right)^2,$$

který je o poznání jednodušší a stále velmi přesný. Zjistili jsme, že vozík se bude pohybovat přibližně rovnoměrně zrychleně se zrychlením $a = r(2\pi \sin \alpha/T)^2 \doteq 0,02 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Komentáře k došlým řešením

V zadání bylo napsáno, že pohyb má být rovnoměrný, ačkoliv tomu tak nebylo. Za tuto chybu se hluboce omlouváme.

Markéta Calábková
calabkovam@fykos.cz

Úloha II.2 ... hypervysokoteplotní supravodivost

3 body; průměr 2,43;

řešilo 61 studentů

Velké části látek, obvykle kovům, roste s vyšší teplotou odpor. Jsou ovšem látky, jako například grafit či polovodiče, kterým odpor s rostoucí teplotou klesá. Také jste již pravděpodobně slyšeli o supravodivosti, což je jev, který obvykle nastává za velmi nízkých teplot a jedná se o stav, ve kterém látka nevykazuje žádný elektrický odpor a dokonale vede elektrický proud. V současné době jsou nejvyšší teploty, ze kterých byla supravodivost pozorována, hluboko pod pokojovou teplotou. Co kdybychom ale uvažovali, že se odpor mění dle vzorečku $R = R_0(1 + \alpha\Delta t)$, kde R_0 je odpor vodiče pro 20°C , α je teplotní součinitel elektrického odporu a Δt teplotní rozdíl vůči původní teplotě 20°C ? Tak při hodnotách součinitelů pro grafit $\alpha_{\text{C}} = -0,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ a křemík $\alpha_{\text{Si}} = -75 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ dostáváme nulový odpor pro vysoké teploty. Pro jaké? A jak to, že to ve skutečnosti nefunguje a jak uhlík, tak křemík nejsou za vysokých teplot supravodivé?

Karel se inspiroval nekonstantními konstantami.

Výpočet je velice jednoduchý. Stačí si uvědomit, že potřebujeme, aby závorka byla nulová, tedy

$$0 = 1 + \alpha\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = -\frac{1}{\alpha}.$$

Po dosazení vyjde $\Delta t_{\text{C}} \doteq 2000^\circ\text{C}$ a $\Delta t_{\text{Si}} \doteq 13^\circ\text{C}$. Tedy u křemíku by měla nastávat supravodivost již při 33°C a pro vyšší teploty by podle tohoto vzorečku měl být odpor dokonce záporný. Nicméně tak to nefunguje.

Obecným důvodem, proč toto nefunguje, je, že teplotní součinitel elektrického odporu závisí na teplotě. Tato závislost je silná zejména právě u polovodičů, jejichž příkladem je právě křemík. U polovodičů můžeme teplotní závislost odporu na teplotě popsat zhruba jako nepřímou úměrnost. Proč zhruba? Protože výrazně silnější vliv na celkový odpor polovodiče má při pokojové teplotě to, že se zvyšuje s rostoucí teplotou počet párů elektron-díra, ale pořád je zde

přítomen i mechanismus, kterým se zvyšuje odpor i u vodičů (srážky vodivostních elektronů s atomy krystalové mřížky). Ten je ale výrazně slabší. Ale i kdyby najednou vymizel „odpor polovodiče“, stále našemu vzorku zůstane „odpor vodiče“ a proto nebude odpor nulový.

Pokud by někoho zajímala v současnosti nejvyšší teplota, při které lze dosáhnout reálné supravodivosti, tak zatím jde o teplotu -135 °C dle FzÚ AV ČR¹.

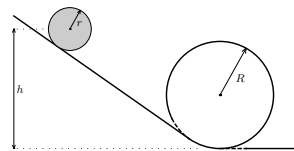
Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha II.3 ... looping

6 bodů; průměr 4,02; řešilo 57 studentů

Mějme nakloněnou rovinu pod úhlem α , na kterou hladce navazuje kruhová smyčka o poloměru R . Do jaké minimální výšky h musíme na nakloněnou rovinu položit kouli o poloměru r (srovnatelném s R), aby smyčkou projela tak, že s ní bude po celou dobu v kontaktu? Předpokládejte, že koule neprokluzuje.

Kuba přemýšlel nad klasickou úlohou.



Tato úloha je podobná úloze, kdy uvažujeme jen hmotný bod, budeme tedy požadovat, aby výsledek měl tvar $r = 0$ shodný s řešením pro hmotný bod. Když hmotný bod nahradíme tuhou koulí, objeví se dvě odlišnosti: odstředivá síla působící na kuličku ve smyčce je nižší, protože těžiště koule se pohybuje po kružnici o poloměru $r' = R - r$, a do kinetické energie tělesa o hmotnosti m je potřeba připočítat rotační energii

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Ke zjištění minimální výšky vypuštění je třeba splnit podmínku vyrovnání tíhové a odstředivé síly v nejvyšším bodě smyčky

$$m \frac{v^2}{(R - r)} = mg,$$

po jejím splnění koule bezproblémově projede i zbytek smyčky, protože v nejvyšším bodě je kolmý průmět tíhové síly největší a rychlost koule nejmenší. Dalším potřebným vztahem je ZZME (zákon zachování mechanické energie), kde rozdíl potenciální energie kuličky mezi počáteční polohou a nejvyšší polohou ve smyčce odpovídá celkové kinetické energii kuličky v kritickém bodě.

Zamysleme se, zda do úlohy nevnese zesložitění skutečnost, že se kulička pohybuje po zakřiveném podkladu. Nejdříve se v podmínce udržení se v nejvyšší bodě smyčky uvažuje rychlost v pohybu těžiště koule okolo středu smyčky a poté v členu rotační kinetické energie představuje ω rychlost otáčení koule okolo její osy otáčení. Při pohybu po rovině platí jednoduše $\omega = v/r$. Jak ukážeme, že toto platí i při pohybu ve smyčce? Úhel otočení koule kolem své rotační osy φ lze pomocí úhlu natočení kolem středu smyčky ϑ vyjádřit jako

$$\varphi = \frac{R}{r}\vartheta - \vartheta = \frac{R - r}{r}\vartheta.$$

Pokud by se koule otáčela po rovině, tak by nebylo potřeba ϑ odečíst. Je to korekce, kterou si lze představit nakloněním roviny o daný úhel ϑ . Takto můžeme uvažovat i při studování smyčky,

¹<http://www.fzu.cz/popularizace/supravodivost-a-levitace>

protože jako nakloněnou rovinu lze reprezentovat tečnu ke smyčce v libovolném daném bodě. Úhlová rychlost rotace kuličky je definována jako časová derivace úhlu natočení φ , tedy

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{R-r}{r} \omega_s.$$

kde jsme použili označení

$$\frac{d\theta}{dt} \equiv \omega_s$$

pro úhlovou rychlost pohybu kuličky okolo osy smyčky. Těžiště se pohybuje rychlostí v a je vzdáleno $R-r$ od osy, proto

$$\omega_s = \frac{v}{R-r}.$$

Dosazením do vyjádření ω dostaneme

$$\omega = \frac{R-r}{r} \frac{v}{R-r} = \frac{v}{r}$$

tedy stejný vztah jako pro pohyb po rovině. Zákon zachování energie a rovnost sil proto vskutku můžeme použít v podobě uvedené výše.

Nyní již k samotnému řešení. Z rovnosti sil v horní úvratí vyjádříme kvadrát rychlosti

$$v^2 = g(R-r)$$

a do ZZME dosadíme moment setrvačnosti koule $J = 2mr^2/5$ a $\omega = v/r$, čímž dostaneme

$$mg(h - 2R + r) = \frac{7}{10}mv^2,$$

kde na levé straně je pokles potenciální energie mezi počátkem a horní úvratí. Dosazením za rychlost získáme finální rovnici

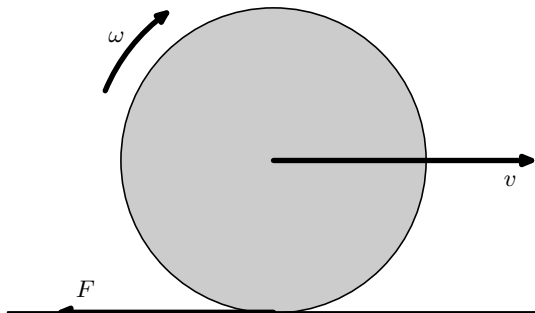
$$h - 2R + r = \frac{7}{10}(R-r).$$

Hledaná výška h je tedy

$$h = \frac{1}{10}(27R - 17r).$$

Nyní si ještě můžeme rozmyslet, že čím menší koule bude, tím výše ji musíme na počátku umístit, neboť i ve smyčce se její těžiště dostane výše. Pokud kouli nahradíme hmotným bodem, tak v energetické bilanci zmizí rotační část a dostaneme $h = (5/2)R$, což bude odpovídat případu s koulí pro $r = (2/17)R$.

Jakub Dvořák
faktorial@fykos.cz



Obr. 1: Znázornění směrů rychlostí a sil.

Úloha II.4 ... kulička

6 bodů; průměr 3,94; řešilo 35 studentů

Představte si pohyb homogenní kuličky, který nejprve začíná pouze posunem (bez jakéhokoliv pohybu valením) a postupně přejde do naopak naprostého valení (bez prokluzování). Za jaký čas toto nastane? Kulička může mít různý poloměr, hmotnost, počáteční rychlost a třecí koeficient.

Lada dělala kotrmelce u zamyslela se u toho.

Kulička o poloměru R a hmotnosti m se na začátku pohybuje s rychlostí nenulovou v_0 a s úhlovou rychlostí $\omega_0 = 0$. Protože neplatí $v_0 = R\omega_0$, kulička prokluzuje. Velikost třecí síly, působící proti směru rychlosti kuličky, je $F = mgf$, kde f je součinitel smykového tření mezi kuličkou a podložkou. Dokud bude kulička prokluzovat, bude na ni působit konstantní třecí síla F . Pohybové rovnice kuličky tedy jsou

$$\begin{aligned} ma &= -F, \\ J\varepsilon &= FR, \\ F &= mgf, \end{aligned}$$

kde a je zrychlení kuličky, ε úhlové zrychlení kuličky a J moment setrvačnosti kuličky. Pro homogenní kouli platí

$$J = \frac{2}{5}mR^2.$$

Z těchto rovnic si vyjádříme zrychlení jako

$$\begin{aligned} a &= -gf, \\ \varepsilon &= \frac{5gf}{2R}. \end{aligned}$$

Po zintegrování zrychlení podle času (resp. z rovnic rovnoměrně zrychleného pohybu) dostáváme rychlosti ve tvaru

$$\begin{aligned} v &= v_0 - gft, \\ \omega &= \frac{5gf}{2R}t. \end{aligned}$$

Kulička přestane prokluzovat v okamžiku, kdy platí $v = R\omega$. Po dosazení za rychlosti v , ω a můžeme vyjádřit čas, kdy k tomu dojde. Dostáváme

$$t = \frac{2v_0}{7gf}.$$

Vidíme, že doba prokluzování nezávisí ani na hmotnosti, ani na poloměru kuličky, ale pouze na počáteční rychlosti a tření. V okamžiku, kdy kulička přestane prokluzovat, se její rychlost ustálí na hodnotě $v = 5/7 v_0$, pokud zanedbáme valivý odpor a odpor vzduchu.

Jakub Dolejší
krasnykuba@fykos.cz

Úloha II.5 ... várnice potřeť

7 bodů; průměr 4,77; řešilo 44 studentů

Uvažujte klasickou várnici s kohoutkem dole a se vzduchotěsným víkem nahoře. Kolik čaje je možné si nalít, než budeme muset otevřít ventil, který vyrovná tlak vzduchu nad čajem s okolním tlakem?

Lukáše na soustředění trápilo, kolik čaje má být ve várnici.

Várnici na čaj můžeme aproximovat válcem, který má kohout na odpouštění čaje ve výšce h_0 nad svou dolní podstavou. Průřez kohoutu budeme považovat pro naše potřeby za zanedbatelně malý vůči výšce várnice a nebudeme uvažovat povrchové napětí v kohoutu. Pokud by vás zajímalo, jakou výšku vody by udrželo povrchové napětí, pak se můžete podívat na úlohu XXVIII.IV.E. Nicméně pokud nás zajímá, kolik čaje vyteče, a tedy pouze rozdíl stavu, kdy vyrovnáme tlaky a kdy pak odpustíme co nejvíce kapaliny, tak výška vody, kterou bude „držet“ povrchové napětí, je konstantní, a tedy rozdíl bude stejný. Dále neuvažujeme ani délku kohoutu a dynamický pokles tlaku při průtoku potrubím, protože nás zajímá pouze statický stav.

Užitečnou výšku válce nad kohoutem nazveme H a výšku vody nad kohoutem h pro původní stav před začátkem vypouštění. Vzduch tedy bude zabírat výšku $H - h$. Podstavy válce mají plochu $S = \pi r^2$, kde r je poloměr válce. Výšku, o kterou hladina čaje poklesne, nazveme Δh .

Plyn ve várnici budeme považovat za ideální plyn, protože nás nebudou zajímat vysoké tlaky (maximálně p_a).

Nyní již k samotnému průběhu děje. Nejdřív si připustíme vzduch při zavřeném kohoutu. Tlak ve vzduchu nad hladinou a těsně na hladině označme p_{1A} a je roven atmosférickému tlaku $p_a = 10^5$ Pa. Tlak ve výšce kohoutu pak bude $p_{1B} = p_a + \rho h g$, kde $\rho \approx 10^3$ kg·m⁻³ je hustota čaje a tíhové zrychlení $g = 9,81$ kg·m⁻².

Konečný stav pak bude takový, při němž se tlak u kohoutu vyrovná s atmosférickým tlakem, tedy $p_{2B} = p_a$ a v tom případě bude tlak na čajové hladině $p_{2A} = p_a - \rho(h - \Delta h)g$. Tento tlak bude i v plynu nad hladinou. V plynu v průběhu vypouštění dojde k nějakému polytropickému ději, pro který platí

$$p_{1A} V_1^\alpha = p_{2A} V_2^\alpha \quad \Rightarrow \quad p_{1A} ((H - h) S)^\alpha = p_{2A} ((H - h + \Delta h) S)^\alpha,$$

$$p_a (H - h)^\alpha = (p_a - \rho(h - \Delta h)g) (H - h + \Delta h)^\alpha,$$

kde $\alpha \in \langle 1, \kappa \rangle$ je koeficient polytropického děje, kde dolní mez odpovídá izotermickému ději ($\alpha = 1$) a horní mez adiabatickému ($\alpha = \kappa$, kde $\kappa = 1,4$ pro dvouatomový plyn). Reálně by tedy maximální objem, který dokážeme odlít z várnice, závisel na rychlosti nalévání. Pokud by se nám dařilo lít čaj velice rychle, pak bychom se blížili adiabatickému ději a pokud pomalu, pak izotermickému ději. Vzhledem k tomu, že se snažíme odlít co nejvíce, pak bude rozumné

uvažovat zhruba izotermický děj $\alpha \approx 1$. Navíc bude hledaná proměnná Δh z rovnice snadno vyjádřitelná formou kvadratické rovnice

$$p_a (H - h) = (p_a - \rho (h - \Delta h) g) (H - h + \Delta h),$$

$$(\Delta h)^2 + \left(\frac{p_a}{\rho g} - 2h + H \right) \Delta h - h(H - h) = 0,$$

$$\Delta h = h - \frac{\frac{p_a}{\rho g} + H}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{p_a}{\rho g} + H}{2} \right)^2 - \frac{p_a}{\rho g} h}.$$

Vybrali jsme kladné řešení, protože jenom to odpovídá zadání naší úlohy. Cílem je zjistit, kolik čaje vyteče. Pro to nám stačí vynásobit změnu výšky kapaliny v nádobě jejím průřezem. Tedy

$$\Delta V = S \Delta h.$$

Jaký bude výsledek pro nějaké konkrétní parametry? Várnice může mít například poloměr $r = 20$ cm a efektivní výšku $H = 60$ cm. Můžeme se zajímat třeba o situaci, kdy jsou již 2/3 efektivní výšky vypuštěné, tedy $h = 20$ cm. V tomto konkrétním případě bychom tedy odpustili $\Delta h \doteq 7,7$ mm, což odpovídá objemu $\Delta V \doteq 1,0$ dl. Takže abychom si napustili jeden hrnek, tak bychom museli připustit vzduch ještě alespoň jednou či dvakrát. Maxima toho, kolik můžeme najednou vypustit, dosáhneme pro $h = H/2$, což lze zjistit z hledání extrému $\Delta h(h)$. V tomto případě by hledaný objem byl $\Delta h_{\max} \doteq 1,1$ dl. Nejméně pak vyteče pro zcela plnou či zcela prázdnou nádobu.

Ještě bychom měli diskutovat, jak moc se náš výsledek, který jsme získali v rámci jistých zanedbání, bude lišit od reality. Jednak jsme už zmínili, že nejspíš nepůjde o izotermické vypouštění či že by tento způsob vypouštění byl velice pomalý, a ve skutečnosti bychom tedy vypustili o něco méně čaje. Na druhou stranu ventilek, který udržuje tlak v nádobě, nemusí být zdaleka dokonalý. Tím, že bude ventilek v průběhu lití čaje připouštět vzduch do nádoby, umožní vypuštění většího množství nápoje. Odpověď pro Lukáše, který s úlohou přišel, je: „Je potřeba si sehnat větší várnici.“, pokud by měl tak velkou, jako jsme odhadli.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha II.P ... efektivní (ná)stroj

9 bodů; (chybí statistiky)

Palné zbraně jsou vlastně takovými tepelnými stroji. Spočítejte jaká je účinnost nějaké pušky nebo pistole. (Jde o využití energie střeliva pro pohyb kulky.)

Michal původly svých nápadů raději nesděluje.

Nejprve si rozeberme, jak vlastně palné zbraně fungují. Ústředními prvky jsou jednak projektil, tj. těleso, které je „vystřeleno“ a získá tak kinetickou energii, a jednak střelivina, typicky střelný prach. Spouštěcím mechanismem dojde k chemickým, případně fázovým změnám střeliviny, následkem čehož vznikne tlakový gradient, který projektil urychlí². Toto se zpravidla děje v hlavni (typicky válcové polouzavřené trubici), aby bylo co nejvíce energie předáno projektilu

²Definice palné zbraně v českém právu: Palná zbraň = střelná zbraň, u které je funkce odvozena od okamžitého uvolnění chemické energie.

a nikoli bez užitku do okolí. Střelivina se nachází za projektilem, a to jak volně (např. raně novověká děla), tak v pouzdře (náboj). Nyní se podívejme na podobnosti a rozdíly palné zbraně a standardního tepelného stroje. Takový stroj pracuje tak, že mu je ohříváčem dodáno teplo, stroj se (za pomoci chladiče) vrátí do stavu před započítáním procesu a mezitím vykoná práci (typicky urychluje nějaké těleso). Účinnost tepelného stroje se pak počítá jako podíl vykonané práce vůči teplu dodanému ohříváčem.

Naše situace je v leccem jiná. V první řadě je dobré smířit se s faktem, že výstřel z palné zbraně nemá charakter cyklického děje. Snaha o převedení systému do stejného stavu jako před střelbou vede k nutnosti dodávat do zbraně náboje a potom by součástí našeho cyklu byla i výroba střeliviny a získávání materiálů, což radikálně odklání naši úlohu od problematiky střelby. Nekruhový charakter našeho děje nám však nebrání pro tento proces definovat účinnost. Nejprve uvažme, jestli účinnost ze zadání dává smysl. Kdybychom za stroj považovali zbraň i se střelivem, potom vstupní energie zvenčí je energie úderníku či zápalníku či obdobného spouštěcího mechanismu. Nicméně množství této energie není typicky zajímavý parametr.³ Další možností je považovat za vstupní parametr pouze teplo reakce propelentu. Toto zavedení je ale poměrně nepřirozené, protože kdybychom uvažovali dva druhy střeliviny o stejných hustotách, objemech spalín a spalných entalpiích, ale různých výhřevnostech, tak se tyto dvě látky pro naše potřeby budou chovat úplně stejně, ale podle naší definice bychom dostávali různé účinnosti. Proto zavedení ze zadání vypadá jako poměrně dobrá volba. Ústová kinetická energie projektilu je poměrně jasný kandidát na požadované měřítko výstupní škály. Úlohu tedy máme dobře zadanou, můžeme se pustit do řešení.

Nejprve analyzujeme velice zjednodušený případ. Uvažujme hlavěň o délce l a průřezu S , dále projektil o hmotnosti m . Střelivina vyprodukuje plyn o vnitřní energii E_0 okamžitě po zažehnutí v objemu za projektilem, který má velikost $V_0 = Sl_0$. Parametru l_0 řekněme třeba efektivní délka střeliviny (jednalo by se o výšku válce), přičemž $l \gg l_0$. Také bude dobré vzít v potaz atmosférický tlak p_a . Systém považujme za dokonale izolovaný (tj. skrz projektil ani stěnu hlavně neprochází ani částice, ani teplo), projektil hlavěň dokonale ucpává, ale zároveň je tření zanedbatelné. Spaliny střeliva budeme považovat za chemicky stejnorodý ideální plyn a následnou expanzi plynu budeme považovat za rovnovážný adiabatický děj. Pro ten platí

$$pV^\varkappa = \text{konst.}, \quad (1)$$

kde p a V jsou tlak a objem spalín v daný okamžik a \varkappa je Poissonova konstanta, jejíž hodnota závisí na symetrii molekul spalín. Ideální plyn také pochopitelně musí splňovat stavovou rovnici ideálního plynu, tedy

$$pV = nRT, \quad (2)$$

kde n je látkové množství spalín, R je molární plynová konstanta a T je termodynamická teplota spalín. Pro vnitřní energii U ideálního plynu platí

$$U = \frac{1}{\varkappa - 1} nRT = \frac{1}{\varkappa - 1} pV. \quad (3)$$

Vzhledem ke konzervativní povaze naší soustavy bude naším cílem vypočítat energii projektilu v ústí hlavně z energetické bilance. Ta má tvar

$$U_0 = U_1 + E_k + W_a,$$

³Dokud ke spuštění nedojde omylem, ale když se postřelíte do zadnice, energetická efektivnost střelby není Váš největší problém...

kde U_0 je vnitřní energie spalín okamžitě po vznícení; pravá strana rovnice udává energetickou bilanci ve chvíli, kdy projektil opouští hlavěň. Konkrétně U_1 je vnitřní energie spalín v tuto chvíli, E_k je kinetická energie projektilu a člen W_a je práce vykonaná na okolním vzduchu. Při pohybu projektil stlačuje atmosféru a stlačí ji o objem $S(l - l_0)$ a atmosféra si po celou dobu zachovává svůj tlak p_a , platí tedy

$$W_a = S(l - l_0)p_a.$$

Nechť p_0 je tlak spalín bezprostředně po vznícení. Potom podle (1), (2) a (3) platí

$$U_1 = \frac{1}{\varkappa - 1} p_1 V_1 = \frac{1}{\varkappa - 1} p_0 V_0^\varkappa V_1^{1-\varkappa} = \frac{1}{\varkappa - 1} p_0 V_0 \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{\varkappa-1} = U_0 \left(\frac{l_0}{l} \right)^{\varkappa-1},$$

kde V_1 je objem spalín v momentě opouštění hlavně projektilem a p_1 je tlak spalín v tentýž okamžik. Potom pro kinetickou energii projektilu dostáváme

$$E_k = U_0 \left(1 - \left(\frac{l_0}{l} \right)^{\varkappa-1} \right) + S l_0 p_a - S l p_a$$

a konečně pro účinnost η získáváme⁴

$$\eta = \frac{E_k}{U_0} = 1 - \left(\frac{l_0}{l} \right)^{\varkappa-1} + \frac{S}{U_0} p_a l_0 - \frac{S}{U_0} p_a l. \quad (4)$$

Rozeberme si podstatné vlastnosti našeho výsledku. Budeme přitom mít na paměti, že hodnoty \varkappa jsou vždy větší než 1. Vidíme, že pro $l \rightarrow l_0$ platí $\eta \rightarrow 0$, což je v souladu s naším očekáváním – pokud je délka hlavně, podél které projektil zrychluje, nulová, projektil nezrychlí. Dále nechť máme dané všechny parametry kromě l . Potom existuje taková hodnota l , pro kterou je η maximální, neboli pro které vyletí projektil z hlavně s největší rychlostí. Podíváme-li se na problém z hlediska kinematiky projektilu, měla by to být právě taková hodnota l (dále jí říkáme l_2), aby tlak spalín p_2 ve chvíli, kdy projektil dorazí k ústí, byl roven atmosferickému tlaku, tedy $p_2 = p_a$ (nyní je vhodná chvíle připomenout, že neuvažujeme tření). Ověříme si to následujícím výpočtem.

Hodnota η je pro $l = l_0$ nulová, naopak pro velká l klesá pode všechny meze. Také očekáváme, že na netriviálním intervalu l bude η nabývat kladných hodnot mezi 0 a 1, funkce $\eta(l)$ tedy musí mít maximum, jelikož je spojitá pro $l \in \mathbb{R}^+$. Položme tedy derivaci rovnou 0:

$$\left. \frac{d\eta}{dl} \right|_{l=l_2} = (\varkappa - 1) l_0^{\varkappa-1} l_2^{-\varkappa} - \frac{S}{U_0} p_a = 0,$$

odkud získáme

$$l_2 = l_0 \left(\frac{V_0}{(\varkappa - 1) U_0} p_a \right)^{-\frac{1}{\varkappa}}$$

a dosazením do (1) a rozložení $U_0 = \frac{1}{\varkappa-1} p_0 V_0$ po úpravách získáváme

$$p_2 = p_0 \left(\frac{V_0}{V_2} \right)^\varkappa = p_0 \left(\frac{l_0}{l_2} \right)^\varkappa = p_a,$$

⁴Obecnější přístup by vyžadoval psát místo U_0 jistě E_0 , které by vyjadřovalo součet všech vstupních energií.

takže naše výsledky odpovídají očekávání. Dosadíme-li odpovídající hodnotu l_2 za l do (4) získáme maximální možnou účinnost palné zbraně při daném atmosferickém tlaku p_a a poměru $\frac{V_0}{E_0}$ ⁵:

$$\eta_{\max} = 1 - \left(\left(\frac{V_0}{(\varkappa - 1)E_0} p_a \right)^{\frac{1}{\varkappa}} \right)^{\varkappa - 1} + \frac{S}{E_0} p_a l_0 \left(1 - \left(\frac{V_0}{(\varkappa - 1)E_0} p_a \right)^{-\frac{1}{\varkappa}} \right)$$

toto se dá přepsat jako

$$\eta_{\max} = 1 + A - C(\varkappa)A^{(1-\frac{1}{\varkappa})}$$

kde

$$C(\varkappa) = \frac{2 - \varkappa}{\varkappa - 1} \left(\frac{1}{\varkappa - 1} \right)^{-\frac{1}{\varkappa}}$$

a

$$A = \frac{V_0}{E_0} p_a.$$

Je tedy vidět, že η_{\max} závisí (krom p_a) pouze na „hustotě energie“ propelentu $\frac{E_0}{V_0}$.

Nyní se zabýváme odchylkami našeho modelu od reálné situace. Asi největší odchylka souvisí s tepelnou izolovaností systému. Mezi spaliny a stěnou dochází k výměně tepla, zpravidla je teplo spalin odváděno stěnou, což vede ke snižování účinnosti. Velikost této ztráty závisí na velkém množství parametrů, od materiálových vlastností hlavně, přes okolní teplotu, délku hlavně, etc. Další nepřesností je předpoklad o okamžitém a úplném spálení prachu. Reálná reakce propelentu probíhá postupně, rychlost hoření závisí mimo jiné na tlaku a na teplotě (což zpětně ovlivňuje velikost tepelných ztrát) a v praxi se často stává, že část střeliviny zůstane nepřeměněná, což dále snižuje efektivitu střelby. Dále na projektil ve hlavní působí tření, jehož velikost závisí zejména na technickém provedení projektilu a vnitřní stěny hlavně. Dále má na veškeré parametry vliv fakt, že projektil se v hlavní typicky roztáčí (kvůli stabilitě projektilu). V neposlední řadě jsme považovali spaliny za ideální plyn a veškeré termodynamické procesy za rovnovážné. Nepřesnost způsobená aproximací ideálního plynu záleží zejména na chemickém složení spalin a látkové hustotě spalin v průběhu střelby. Nerovnovážná termodynamika je náročná disciplína, nicméně nerovnovážnost procesů vede vždy ke snížení účinnosti děje. I v aproximaci rovnovážného ideálního plynu se situace stává složitou, pokud jsou spaliny směsí látek s různou symetrií molekul, tedy o složkách s různým \varkappa .

Testovat naše modely v praxi by bylo technicky velice náročné. Proto budeme srovnávat naše modelové výsledky s výsledky programu IntBal 1.0. Ten lze stáhnout například z <http://ballistics.eu/interior.html>, k dispozici je česká verze stránek s popisem. Program má fungovat na systémech Windows 2000, XP, Vista a 7, nicméně na Windows 10 nám program fungoval⁶. Po spuštění programu nejprve klikněte na kartu „Extras“ a zaklikněte checkbox „Show energy losses“, což nám v konzolovém výpisu zobrazí i účinnosti. Program vyžaduje a umožňuje nastavení několika desítek parametrů, včetně velikosti a tvaru zrníček střeliviny. Naštěstí program obsahuje předvyplněné hodnoty pro tři zbraně. Kliknutím na „load“ se zobrazí obsah složky IntBal1.0 včetně tří txt souborů s přednastavenými parametry. 7.62mm x 39 je označení munice pro samopal AK-47, 30mm PLdvK je československá protiletadlová zbraň a 152mm je artilerie. Podívejme se nejprve na kalašnikov. V konzolovém výstupu se Vám zobrazí

⁵ až na extrémní možnost zpětného přenosu tepla, která v reálných situacích nenastane

⁶ Uživatelé Linuxu jsou snad zvyklí si problémy řešit sami a uživatelé Macu mají dost peněz na placený program.

různé energetické ztráty „Energy loss“ i s procentuálními vyjádřeními. Řádek „Energy Loss due to Projectile Translation“ má význam zbývající kinetické energii projektilu při opouštění hlavně, takže typické ákáčko pálí s účinností zhruba 16,6% . Řádek „Remaining Energy of Propellant+Igniter Gas“ odpovídá nevyužitě energii z našeho modelu. Podíváme-li se na další ztráty, nejvýraznější je „Remaining Energy of unburned Propellant“, tedy energie nespáleného prachu. Téměř třetina střeliviny se tedy při střelbě nevznítala. Nezanedbatelný vliv má také „Energy Loss due to Heat Transfer“, což jsou ztráty kvůli tepelné výměně. Z didaktického důvodu je dobré si rozmyslet ještě příspěvky „Energy Loss due to Air Resistance“, tj. odpor vzduchu, který by byl v rovnovážné aproximaci nulový a „Energy Loss due to Recoil“ čili energetická ztráta zpětným rázem. Ten lze odhadnout modelem inverzní nepružné srážky. Necht má projektil hmotnost m a rychlost v a hmotnost částí ovlivněných zpětným rázem je M . Ze zákona zachování hybnosti musí platit

$$mv = Mw ,$$

kde w je střední rychlost částí ovlivněných zpětným rázem okamžitě po výstřelu. Ztráta energie zpětným rázem je tedy

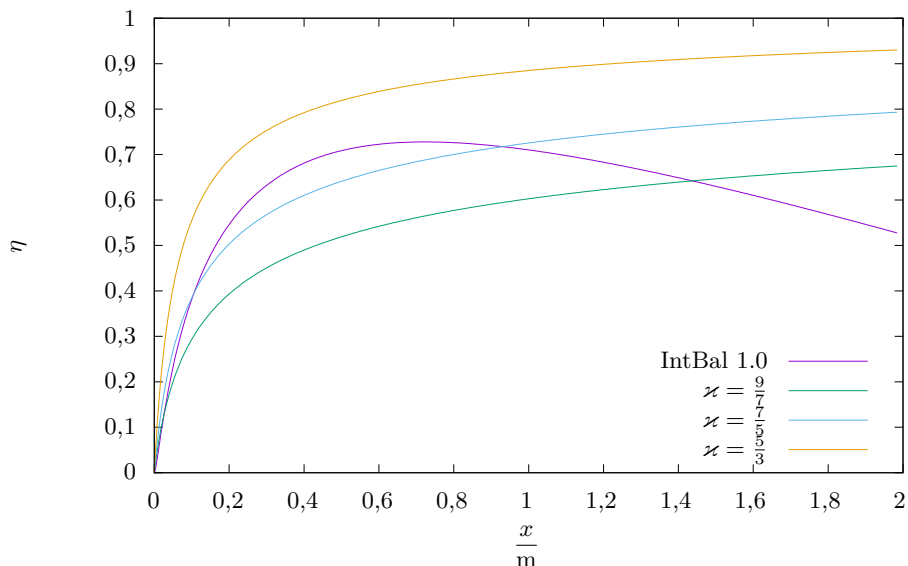
$$E_z = \frac{1}{2}Mw^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2}{M} v^2 = \frac{m}{M} E_{kp}$$

kde E_z je energetická ztráta zpětným rázem a E_{kp} je kinetická energie projektilu. Množství ztrát je tedy úměrné poměru hmotností a vzhledem k tomu, že hmotnost projektilu je v řádu jednotek gramů a hmotnost částí ovlivněných zpětným rázem je v praxi jednotky až desítky kilogramů. Proto lze očekávat, že množství energie ztracené tímto způsobem nepřesáhne 0,1%. Podívejme se, jak by se měnily velikosti energií v jednotlivých kategoriích, když budeme měnit délku hlavně, která se skrývá pod popiskem „Travel of Projectile at Muzzle“ v kartě „Weapon and Cartridge“. Navíc budeme-li předpokládat, že rychlost projektilu v dané vzdálenosti v hlavní nezávisí na zbývající délce hlavně; potom se nám bude hodit graf závislosti rychlosti projektilu na vzdálenosti uražené v hlavní⁷. Po kliknutí na „Axis Y“ zaškrtněte „Proj. Velocity vp“ a po kliknutí na „Axis X“ zaškrtněte „Projectile Travel“. Nastavíme tedy délku hlavně na nějakou velkou hodnotu, třeba 2 m, a klikneme na „Start“. Krom závislosti rychlosti projektilu na dráze získáváme i další zajímavou informaci, totiž fakt, že část střeliviny nebude přeměněna ani při dlouhé hlavní. Také stojí za zmínku, že na nezanedbatelnou hodnotu vzrostla část „Energy Loss due to Friction“, totiž energetická ztráta třením. Tření tedy na velkých vzdálenostech bude hlavní brzdou silou, oproti v našem modelu předpokládanému podtlaku uvnitř hlavně. Nicméně stejně jako tlak atmosféry i tento příspěvek lineárně roste s uraženou vzdáleností. Ze závislosti můžeme také odhadnout optimální délku hlavně z hlediska účinnosti. Po bližším zkoumání zjistíme, že tato délka hlavně je zhruba 78 cm. Pomocí „Save“ můžeme výstup programu uložit a srovnat výsledky našeho modelu podle (4). Na obrázku 2 vidíme srovnání účinnosti samopalu AK podle programu IntBal 1.0 a našeho modelu pro různé hodnoty \varkappa .

Výsledky našeho modelu vypadají kvalitativně jinak než výsledky programu proto, že zatímco podle programu má pro delší hlavní tření nezanedbatelný vliv, v našem modelu ho neuvažujeme – roli třecí síly u nás zastupuje atmosferická tlaková síla Sp_a , která je výrazně menší než síla třecí podle programu. Důsledkem toho je v našem modelu rovnovážná poloha posunuta mimo námi zkoumanou oblast délek hlavní a příslušné křivky v grafu proto neklesají.

Shrnutím by se dalo říct, že účinnost palných zbraní závisí na velkém množství parametrů, od provedení propelentu, přes atmosferické vlastnosti, po technického provedení hlavně

⁷ Což podle předchozího předpokladu odpovídá ústové rychlosti při příslušné délce hlavně.



Obr. 2: Srovnání účinnosti samopalu AK podle programu IntBal 1.0 a našeho modelu pro různé hodnoty κ .

a projektilu. Jednoduché termodynamické modely mohou mít jen určitou omezenou platnost (rychle hořící prach, krátká hlaveň, malé tření, ...) a obecně se od něj výsledky mohou značně odchylovat.

Lubomír Grund
grund@fykos.cz

Úloha II.E ... jedno plnotučné, prosím 12 bodů; průměr 8,98; řešilo 44 studentů

Tučnější mléko by mělo být „bělejší“ – více světla rozptýlí a méně propustí skrz. Proveďte měření tučnosti mléka na základě rozptylu světla, přičemž jako barevnou škálu použijte přiložený papírek (pokud jste neřešili první sérii a chcete obdržet papírek, napište nám na fykos@fykos.cz). Rozdíly nejlépe vyniknou, pokud do různých druhů mléka budete přidávat barvivo tak, aby jej v mléku byla stejná (malá) koncentrace. Jako barvivo můžete použít černou tuš. Samozřejmě je možno použít jakékoliv jiné barvivo, ale pak si budete muset vyrobit vlastní barevnou škálu, kterou přiložíte k řešení. Zrealizujte měření pro různé druhy mléka a směsi mléka a vody. Diskutujte spolehlivost určení obsahu tuku. *Mára byl bleďý jako stěna.*

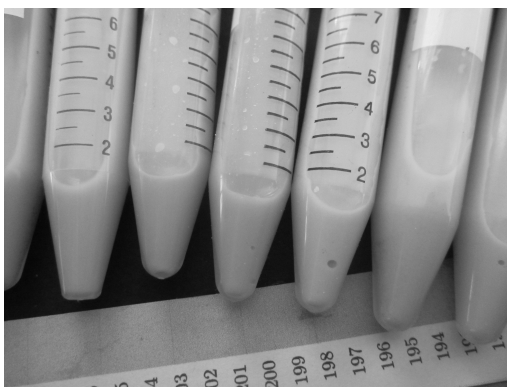
Nejprve si musíme uvědomit, z čeho se mléko skládá. Jedná se o komplexní směs sacharidů, lipidů a bílkovin. Ze sacharidů se zde vyskytují především mono- a disacharidy, z čehož většinu tvoří laktóza. Tyto sacharidy jsou snadno rozpustné ve vodě, a protože neobsahují násobné chemické vazby, nemají důvod výrazněji interagovat s viditelným světlem. Tuky jsou v mléce ve formě kapének, které mají velikost několika mikrometrů. Ovšem po homogenizaci, kterou

prochází většina dostupných mlék, mají již jen stovky nanometrů. Další skupinou jsou bílkoviny. 80 % z nich tvoří kasein, který spolu s fosforečnanem vápenatým tvoří micely o velikosti několika stovek nanometrů. Zbytek bílkovin tvoří různé enzymy, povětšinou rozpustné ve vodě. I ostatní vyskytující se látky jsou rozpuštěny buď ve vodě, nebo tukových kapénkách.

Jak vidíme, jsou v mléce koloidní částice o velikosti několika stovek nanometrů, což je přibližně vlnová délka viditelného záření. Proto bude v této oblasti docházet k významnému rozptylu. Kvůli různým velikostem částic nebude existovat jedna preferovaná vlnová délka a mléko bude odrážet světlo všech barev, čímž se bude zdát bílé. Při zpracovávání mléka se odstraňuje tuk, kdežto obsah ostatních látek zůstává téměř nezměněn, jak lze snadno zjistit z informací na etiketě. Proto i mléko zcela zbavené tuku nebude průhledné, ale bude mít bílou barvu.

Jako měření jsme zvolili metodu, kdy jsme pomocí tuše obarvili mléko, při stejné koncentraci tuše pro různé vzorky, a porovnáním se škálou odečetli hodnotu, která odpovídá barvě ve všem třem hodnotami RGB rovnými danému číslu na škále. Abychom dosáhli dostatečně nízkých koncentrací, tak jsme tuš ředili nadvkrát. Při prvním ředění jsme do 10 ml vody přidali pomocí automatické pipety 0,2 ml tuše a poté jsme 0,2 ml tohoto roztoku přidali do 10 ml mléka, čímž jsme získali koncentraci tuše okolo 0,038 %, která dávala barvu odpovídající zhruba středu škály.

Protože zdánlivá světlost silně závisela na osvětlení, snažili jsme se měřit ve stínu a zachovat co nejkonzistentnější osvětlení. Nejprve jsme od každého druhu mléka vzali jeden vzorek, ten zařadili a poté seřadili vzorky podle naměřené barevnosti. Získali jsme pořadí vzorků na obrázku 3. Jak jistě vidíte, absolutní přesnost je naprosto neuspokojivá. Proto jsme se od tohoto okamžiku snažili vždy měřit tak, aby pro nás byly důležité spíše relativní výsledky, a snažili jsme se srovnávat i vzorky mezi sebou. Proto jsme vzorky seřadili ve správném pořadí podle



Obr. 3: Tento obrázek demonstruje vysokou nespolehlivost použité metody, neboť zkumavky jsou seřazeny tak, jak jsme je určili „naslepo“, tedy bez porovnávání s ostatními vzorky.

Zároveň demonstruje, jak neznatelné rozdíly byly mezi většinou vzorků.

tmavosti, nařadili na hodnoty na škále a další měření jsme prováděli porovnáváním s těmito vzorky, zároveň s kontrolou na škále. Pro každý druh mléka jsme použili 5 vzorků, z nichž jsme určili střední hodnotu a směrodatnou odchylku a získali jsme výsledky v tabulce 1.

Tyto výsledky jsme vynesli do grafu 4 a 5. Je zde vidět lehká korelace mezi obsahem tuku a bělostí, ale výsledky pro různé druhy mléka se stejným obsahem tuku se dost podstatně liší,

Tab. 1: Naměřená data pro dané druhy mléka a smetany

Druh mléka			\overline{barva}	$\overline{\sigma_{barva}}$
			RGB	RGB
Ah Basic mléko plnotučné	trvanlivé	3.5%	201	5
Tesco mléko polotučné	čerstvé	1.5%	198	9
Madeta Jihočeské mléko odtučněné	trvanlivé	0.5%	197	3
Madeta Jihočeské mléko polotučné	trvanlivé	1.5%	203	3
Madeta Jihočeské mléko plnotučné	trvanlivé	3.5%	203	3
Madeta Jihočeské mléko polotučné	čerstvé	1.5%	201	2
Madeta Jihočeské mléko plnotučné	čerstvé	3.5%	203	2
Tesco mléko plnotučné	trvanlivé	3.5%	209	2
Pragolactos mléko polotučné	trvanlivé	1.5%	212	1
Tesco value mléko odtučněné	trvanlivé	0.5%	198	6
Selské mléko plnotučné	čerstvé	3.6%	212	5
Smetana na vaření		11%	226	2
Smetana ke šlehání		31%	232	3

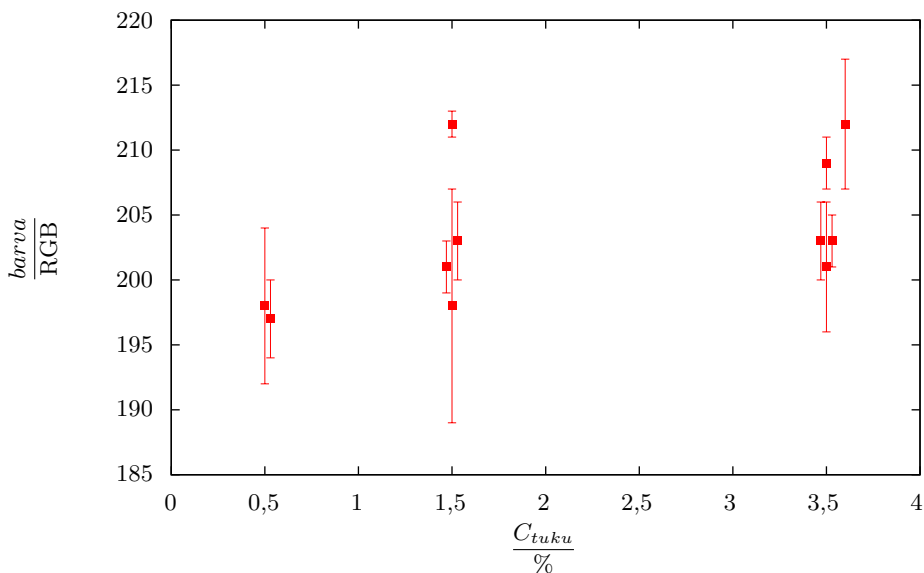
takže nelze dělat spolehlivé závěry. Abychom dokázali odhadnout typ závislosti, potřebovali jsme použít vzorky s vyšším obsahem tuku, a proto jsme přidali mezi měřené vzorky dva druhy smetany, čímž jsme dostali graf 5.

Poté jsme zkusili prozkoumat závislost barvy na koncentraci tuše. Použili jsme smetanu s vyšším obsahem tuku kvůli vyššímu rozsahu měřených hodnot barevnosti, postupně jsme po 0,2 ml přidávali pipetou 2% roztok tuše a získali jsme hodnoty v grafu 6, kde jsme museli provádět korekci na objem přikapané tuše, který již není zanedbatelný a získali jsme tím přibližně lineární závislost.

Proto jsme s očekáváním lineární závislosti postupně připravovali vzorky se stále více ředěnou smetanou. Ředili jsme zároveň vodou, kde se tím pádem snižovala koncentrace tuku i bílkovin, a zároveň paralelně s tím jsme ředili odtučněným mlékem, kde se víceméně zachovávala koncentrace bílkovin. Získali jsme tím graf 7. Zajímavé na něm je, že barva smetany ředěné vodou a mlékem se příliš neliší, až pro čistou vodu graf najednou prudce spadne, a rozdíl je dramatický. Měření pro čistou vodu bylo nemožné kvůli průhlednosti vody s tuší, proto jsme do něj museli přidat pár kapek mléka, abychom vůbec vzorek mohli přiřadit na škálu.

Právě kvůli skoku při nulové koncentraci jsme se rozhodli proměřit nízké koncentrace smetany a zjistit průběh. Smetanu jsme nejprve naředili na 10% roztok, a ten jsme pak ředili na požadovanou koncentraci. Tím jsme získali graf 8, kde jsme do horní osy přidali koncentraci tuku, vypočtenou z původního obsahu ve smetaně, a pro srovnání naměřená data pro různé druhy mléka. Při měření jsme postupovali vzestupně a pro koncentraci 5% jsme získali podobnou hodnotu, jako jsme naměřili předtím pro vysoké koncentrace smetany, kdežto pro 10% jsme získali hodnotu řádově vyšší, což zase ukazuje na nespolehlivost měření. Zároveň vidíme, že pro nízké koncentrace, které nás zajímají nejvíc, je závislost nelineární, a proto není možné výsledky extrapolovat na nulový obsah tuku, protože neznáme typ závislosti.

Každopádně se můžeme pokusit odhadnout, jaký je příspěvek tuku na celkové bělosti mléka. Když se podíváme na graf 8, vidíme, že odtučněnému mléku odpovídá hodnota přibližně 197,



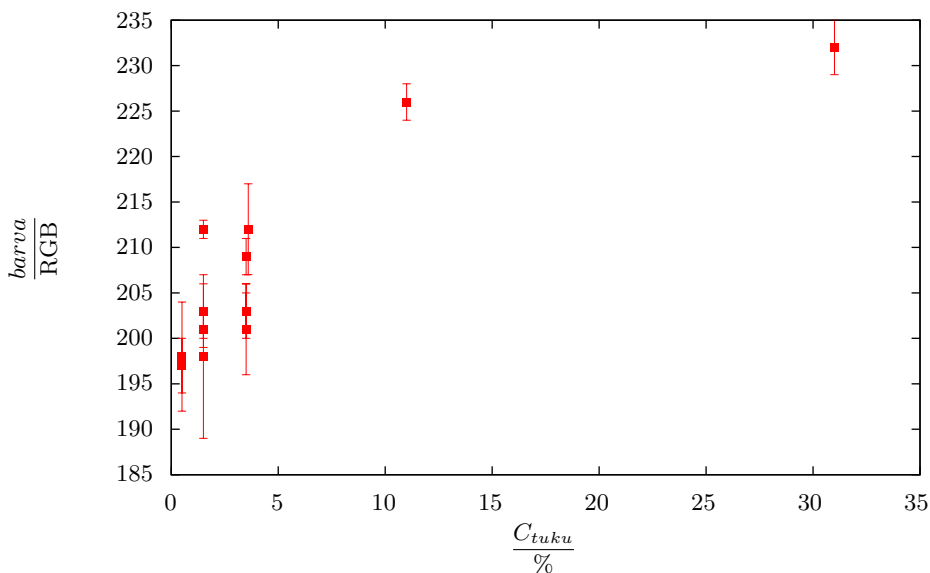
Obr. 4: Naměřená data, měřeno bylo pro 5 vzorků od každého druhu mléka. Data byla vytřížena podle obsahu tuku a částečně rozdělena kvůli přehlednosti – všechny body blízko sebe mají mít stejné množství tuku.

kdežto smetaně naředěné s ohledem na stejný obsah tuku, která ovšem obsahuje jen asi 1,5 % bílkovin proti mléku, odpovídá hodnota 170. Hodnota odpovídající téměř čisté vodě je pak 145, což nám dává odhad, že tuk v mléce je zodpovědný za maximálně polovinu bílé barvy mléka. Jistotu nemůžeme mít kvůli tomu, že závislost barvy na koncentraci pro bílkoviny pravděpodobně bude mít podobně nelineární průběh pro nízké koncentrace, a proto i 1,5 % procenta bílkovin může být nezanedbatelné množství. Navíc srovnáváme měření, které jsme prováděli nezávisle na sobě, a tudíž nemůžeme vyloučit částečně jiné osvětlení. (viz obrázek 3)

Je vidět, že se jedná o velice nepřesnou metodu, nejen kvůli vysokým odchylkám při měření více stejných vzorků, ale i kvůli podstatné systematické chybě způsobené měřením, kterou nelze odstranit, protože je při každé sérii měření jiná. Navíc je toto měření vysoce subjektivní, a dokonce experimentátor může ovlivnit měření tím, že má představu, jaký by mu měl přibližně vyjít výsledek. Kvůli tomu je toto měření téměř nereprodukovatelné, a pokud bychom chtěli získat nějaké věrohodné výsledky, museli bychom především upravit experimentální uspořádání, především tak, aby detektorem nebylo lidské oko.

Nicméně v praxi se k tomuto účelu používá měření, které je založené na rozptylu světla procházejícího ředěným mlékem, kde se zkoumá množství prošlého světla.

Prostudovali jsme tedy tuto metodu, našli jsme určitou korelaci mezi množstvím tuku a barevností, ale kvůli vysokým odchylkám a malému množství bodů na škále jsme nedokázali určit, zda jde o lineární závislost. K určení obsahu tuku je ovšem přesnost nedostatečná. Na základě měření s ředěnou smetanou jsme došli k závěru, že tukové kapénky jsou složkou, která



Obr. 5: Data z grafu 4, doplněná o dva druhy smetany.

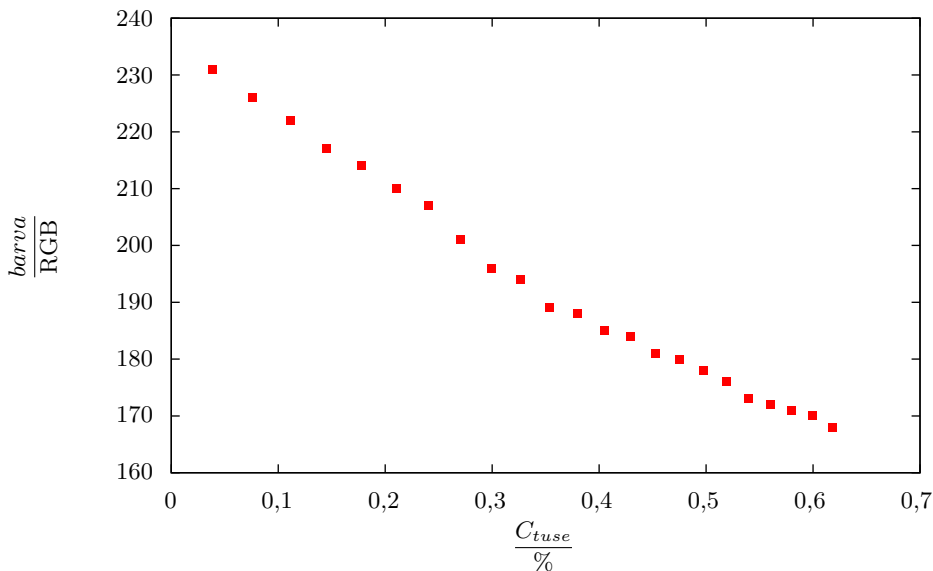
se na bílé barvě podílí nanejvýš polovinou, zbytek je pravděpodobně způsoben bílkovinami.

Mikuláš Matoušek
mikulas@fykos.cz

Úloha II.S ... odhadnutelná

10 bodů; průměr 7,17; řešilo 35 studentů

- Zkuste vlastními slovy popsat, k čemu slouží intervalový odhad střední hodnoty v normálním rozdělení a uveďte jeho fyzikální interpretaci (stačí vlastními slovy popsat následující: fyzikální interpretace odhadu střední hodnoty, rozdíl mezi (bodovým) odhadem a intervalovým odhadem, nejdůležitější vlastnost intervalového odhadu, metoda zkráceného zápisu intervalového odhadu, nejistota měření). Není potřeba uvádět přesná matematická odvození, stačí požadované pojmy a vlastnosti stručně popsat.
- V přiloženém datovém souboru mereni1.csv najdete naměřené hodnoty určité fyzikální veličiny (uvažujte nejistotu typu $B_{SB} = 0,1$). Zkonstruujte z těchto dat bodový i intervalový odhad měřené fyzikální veličiny a krátce interpretujte jejich význam.
- Předpokládejme, že měříme určitou fyzikální veličinu a víme, že vlivem použité metody měření budou mít naměřená data rozptyl rovný konstantě c (nejistotu typu B neuvažujte). Kolik musíme přibližně provést měření, abychom dosáhli nejistoty měření menší než s ?
- V přiloženém datovém souboru mereni2.csv najdete data měření stejné fyzikální veličiny dvěma různými způsoby (nejistotu typu B neuvažujte). U které metody byla použita měřicí aparatura přesnější? Který způsob měření dal přesnější výsledek měření? U obou otázek své závěry i stručně zdůvodněte.



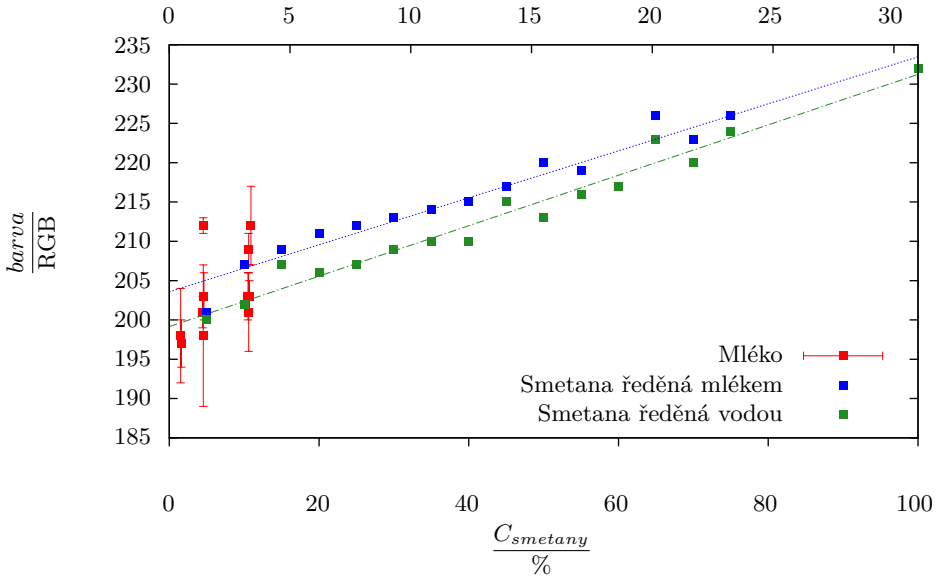
Obr. 6: Závislost barvy na koncentraci tuše.

Bonus Zkuste odvodit, že v normálním rozdělení je výběrový rozptyl nestranným odhadem skutečného rozptylu (tj. střední hodnota výběrového rozptylu je rovna skutečnému rozptylu). Pro řešení tohoto úkolu můžete použít libovolné zdroje (pokud je budete řádně citovat).

Pro práci s daty použijte výpočetní prostředí R. Pro vyřešení těchto úkolů postačí drobně upravit příložený skript, ve kterém je pomocí komentářů v kódu vysvětlena potřebná syntaxe jazyka R. *Michal se snažil odhadnout nejoptimálnější zadání, snad se mu to povedlo.*

- a) Detailní odpověď na tuto otázku dostanete přečtením 2. dílu seriálu, na tomto místě si vysvětlíme jen ty opravdu nejdůležitější pojmy. V nejjednodušším matematickém modelu se výsledek jednoho měření určité fyzikální veličiny považuje za náhodnou veličinu, která má normální rozdělení a jejíž střední hodnota je rovna skutečné hodnotě měřené fyzikální veličiny. Znamená to, že předpokládáme, že neexistuje žádný systematický posun měřených hodnot oproti skutečné hodnotě měřené fyzikální veličiny (případně se s takovýmto systematickým posunem vypořádáváme jinak). Odhadování střední hodnoty z realizací náhodné veličiny (tedy z naměřených dat) je vlastně odhadování skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny.

Hodnotu měřené fyzikální veličiny nejsme nikdy schopni odhadnout přesně. Proto si definujeme dva typy odhadů: bodový odhad a intervalový odhad. Bodový odhad střední hodnoty je číslo, které na základě naměřených dat nejlépe odhaduje skutečnou hodnotu měřené fyzikální veličiny (v případě normálně rozdělené náhodné veličiny je to výběrový průměr). Protože je bodový odhad nepřesný, ve většině případů si s ním nevystačíme a musíme zkonstruovat ještě intervalový odhad. Intervalový odhad je interval, který s nějakou předem zvolenou



Obr. 7: Závislost barvy na koncentraci smetany. V horní ose pak přepočít na obsah tuku.

pravděpodobností pokrývá skutečnou hodnotu měřené fyzikální veličiny. Intervalový odhad nám navíc oproti bodovému odhadu dává i jistou informaci o tom, jak přesně jsme měřenou veličinu změřili.

V případě normálního rozdělení má intervalový odhad tvar

$$(\bar{x}_n - t_{n,1-\frac{\alpha}{2}} s_K, \bar{x}_n + t_{n,1-\frac{\alpha}{2}} s_K),$$

kde \bar{x}_n je výběrová střední hodnota (výběrový průměr), s_K je kombinovaná nejistota měření a $t_{n,1-\frac{\alpha}{2}}$ je kvantil Studentova rozdělení. Jeho nejdůležitější vlastnost je ta, že s pravděpodobností $1 - \alpha$ pokrývá skutečnou hodnotu měřené fyzikální veličiny.

Takovýto intervalový odhad se velmi často zkráceně zapisuje jen jako

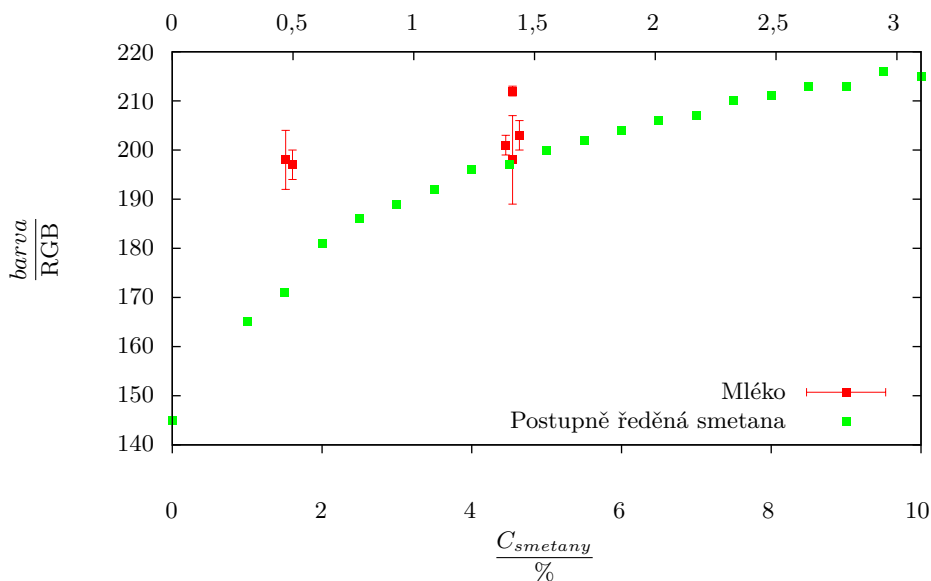
$$(\bar{x}_n \pm s_K).$$

Tuto zkrácenou formu zápisu můžeme vnímat tak, že pokud zvolíme hladinu spolehlivosti rovnou 0,68 (tedy $\alpha = 0,32$) a máme dostatečný počet měření (alespoň 30), potom se intervalový odhad zkrátí právě na tento zápis (díky tomu, že pro tyto hodnoty α a n platí $t_{n,1-\frac{\alpha}{2}} \doteq 1$). Případně z této zkrácené formy zápisu lze jednoduše přidáním příslušného kvantilu vyrobit intervalový odhad o jiné hladině spolehlivosti.

Nejistota měření (kombinovaná) je právě člen s_K . Vznikne jako kvadratický součet nejistoty typu A a nejistoty typu B

$$s_K = \sqrt{s_A^2 + s_B^2},$$

kde nejistota typu A je nejistota vyplývající z náhodnosti měřených dat (je přesně rovna výběrové směrodatné odchylce průměru) a nejistota typu B je nejistota plynoucí z ostatních



Obr. 8: Naměřená data pro nízké koncentrace smetany s vodou. V horní ose pak přepočítaný obsah tuku.

příčin (hlavně nepřesnosti měřidla). Kombinovaná nejistota vyjadřuje jak přesně jsme měřenou fyzikální veličinu změřili. Při fyzikálních experimentech je cílem mít co možná nejmenší kombinovanou nejistotu měření (tj. mít fyzikální veličinu změřenu co možná nejpřesněji).

- b) V přiloženém datovém souboru se nachází 42 měření určité fyzikální veličiny. Jako první spočteme výběrovou střední hodnotu (výběrový průměr) podle vzorce

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

V našem konkrétním příkladě po dosazení dostáváme

$$\bar{x}_n = \frac{1}{42} \sum_{i=1}^{42} x_i \doteq 42,1.$$

Toto je náš bodový odhad měřené fyzikální veličiny.

Pro konstrukci intervalového odhadu nejprve spočítáme výběrovou směrodatnou odchylku podle vzorce

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}.$$

V našem konkrétním případě dostáváme

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{41} \sum_{i=1}^{42} (x_i - 41,1)^2} = 1,7.$$

Následně spočteme výběrovou směrodatnou odchylku průměru (tedy nejistotu typu A) podle vzorce

$$s_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

V našem konkrétním případě dostáváme

$$s_n = \frac{S_n}{\sqrt{42}} \doteq 0,27.$$

Nyní musíme vyjádřit kombinovanou nejistotu měření podle vzorce

$$s_K = \sqrt{s_A^2 + s_B^2},$$

kde s_A , s_B jsou nejistoty měření typu A a typu B. V našem konkrétním případě dostáváme

$$s_K = \sqrt{0,27^2 + 0,1^2} \doteq 0,29.$$

Na tomto místě už můžeme zkonstruovat intervalový odhad, který bude mít tvar

$$(42,1 - t_{n,1-\frac{\alpha}{2}} 0,29, 42,1 + t_{n,1-\frac{\alpha}{2}} 0,29), \quad (5)$$

kde za α můžeme dosadit podle požadované hladiny spolehlivosti. Intervalový odhad zapíšeme standardním zkráceným zápisem jako

$$(42,1 \pm 0,3).$$

Interpretace bodového odhadu měřené fyzikální veličiny je, že je to na základě naměřených dat nejlepší odhad skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny. Interpretace intervalového odhadu (5) je, že pravděpodobnost pokrytí skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny tímto intervalem je 68 %.

- c) Pokud neuvažujeme nejistotu měření typu B, potom kombinovaná nejistota měření bude rovna pouze nejistotě typu A. Nejistota měření typu A je rovna výběrové směrodatné odchylce průměru, která je vyjádřena vztahem

$$s_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

Na tomto místě si musíme uvědomit, že výběrová směrodatná odchylka S_n je odhadem skutečné směrodatné odchylky a pro velký počet měření bude její hodnota velmi blízká právě skutečné směrodatné odchylce. Skutečná směrodatná odchylka je ale rovna odmocnině skutečného rozptylu. Proto bude platit

$$s_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \approx \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{c}{n}}.$$

Podmínka v úloze je, aby byla tato nejistota měření menší než nějaká konstanta s , řešíme tedy nerovnici

$$\sqrt{\frac{c}{n}} < s.$$

Tuto nerovnici můžeme pomocí jednoduchých algebraických úprav (s využitím znalosti toho, že obě strany nerovnice mají nezápornou hodnotu) vyřešit. Získáme podmínku

$$\frac{c}{s^2} < n.$$

Vidíme tedy, že musíme provést alespoň přibližně $\frac{c}{s^2}$ měření.

- d) S využitím výpočetního prostředí R můžeme stejným postupem, jaký jsme využili v bodu b), vypočítat výběrovou střední hodnotu, výběrový průměr, výběrovou směrodatnou odchylku a výběrovou směrodatnou odchylku průměru (tj. nejistotu měření typu A) pro data pocházející z obou metod měření. Nebudeme už jednotlivě ukazovat dosazování do vzorců, jen uvedeme, že výsledky můžeme vidět v tabulce 2.

Tab. 2: Základní popisné statistiky pro data pocházející z obou metod měření

	n	S_n^2	S_n	s_n	\bar{x}_n
metoda 1	100	6,46	2,54	0,25	9,97
metoda 2	10	3,62	1,90	0,60	10,03

Jak je vidět z tabulky, obě metody měření vedou na velmi podobný bodový odhad skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny. Výběrový rozptyl pro první metodu měření je výrazně větší než pro druhou metodu měření. Toto ukazuje, že měřicí aparatura a postup měření, který byl použit u první metody měření, byl méně přesný. Na druhou stranu je ale vidět, že výběrová směrodatná odchylka průměru (která v tomto případě vyjadřuje kombinovanou nejistotu měření neboť nejistotu typu B neuvažujeme) je výrazně větší pro data pocházející z druhé metody měření. Přesněji jsme tedy měřenou fyzikální veličinu naměřili první metodou měření. Na tomto místě je důležité uvědomit si rozdíl mezi přesností měřicí aparatury a výslednou kombinovanou nejistotou měření, ta je totiž (jako v tomto případě) výrazně ovlivněna počtem provedených měření. Tedy i s méně přesnou měřicí aparaturou lze změřit přesnější výsledek, pokud provedeme více měření.

Jako poznámku na závěr by se slušelo zmínit, že pro co nejpřesnější určení měřené fyzikální veličiny by bylo v tomto případě optimální zkombinovat data naměřená pomocí obou metod. To ale zatím neumíme, dozvíme se to až v příštím díle seriálu.

Bonus: Tato úloha je v podstatě jednoduchá, jen je potřeba nezaleknout se poněkud ošklivějších výrazů a neztratit se v algebraických operacích. Budeme v podstatě jen počítat střední hodnotu náhodné veličiny.

V rámci algebraických úprav vzniklého výrazu budeme využívat několik vztahů, které nebyly uvedeny v textu seriálu neboť se tam nevešly. Vaším úkolem bylo nastudovat si je. My je zde pro jistotu všechny uvedeme.

Pro dvě nezávislé⁸ náhodné veličiny X a Y platí

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y].$$

⁸Nezávislost je zde důležitá, bez ní by tento vzorec neplatil.

Střední hodnota se chová lineárně, tedy pro náhodnou veličinu X a dvě konstanty a, b platí

$$E[aX + b] = a \cdot E[X] + b.$$

Pro náhodnou veličinu X s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$ platí

$$E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2.$$

Toto vychází z alternativního vzorce na rozptyl

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (EX)^2,$$

kde víme, že $\text{var}(X) = \sigma^2$ a $EX = \mu$, z čehož už jen vyjádřením dostaneme požadovanou rovnost.

Dále je potřeba upozornit na to, že nelze nijak jednoduše spočítat výraz

$$E[(\overline{X_n})^2].$$

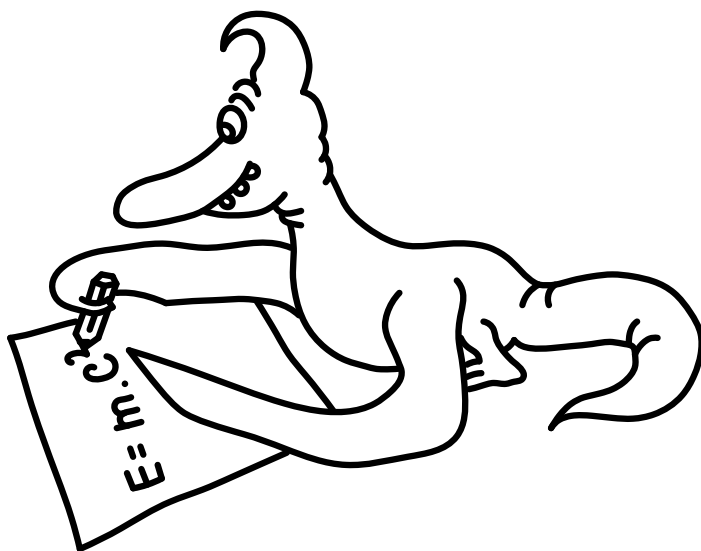
Jedinou možností je rozepsat si ho jako součin dvou závorek a dále algebraicky upravovat. Jako poslední uvedeme, že jsme používali následující zápis

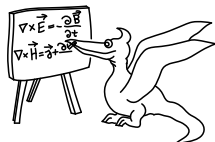
$$\sum_{i=1}^n E[X_i^2] = E[X_1^2] + \dots + E[X_n^2] = n \cdot E[X_1^2].$$

Tento zápis lze použít neboť náhodné veličiny X_1, \dots, X_n mají všechny stejné rozdělení. Toto je vše, co potřebujeme k úpravě našeho výrazu (kromě práce se sumami a závorkami). Nyní stačí jen upravovat výraz pro střední hodnotu výběrového rozptylu a nakonec dostaneme požadovaný výsledek.

$$\begin{aligned} E\left[\widehat{\sigma_n^2}\right] &= E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2\right] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \{E[X_i^2] - 2E[X_i \overline{X_n}] + E[(\overline{X_n})^2]\} = \\ &= \frac{n}{n-1} E[X_1^2] - \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^n E[X_i \overline{X_n}] + \frac{n}{n-1} E[(\overline{X_n})^2] = \\ &= \frac{n}{n-1} (\sigma^2 + \mu^2) - \frac{2n}{n-1} E[(\overline{X_n})^2] + \frac{n}{n-1} E[(\overline{X_n})^2] = \\ &= \frac{n}{n-1} \left[\sigma^2 + \mu^2 - E[(\overline{X_n})^2]\right] = \frac{n}{n-1} \left[\sigma^2 + \mu^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[X_i X_j]\right] = \\ &= \frac{n}{n-1} \left[\sigma^2 + \mu^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n E[X_i^2] + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n E[X_i X_j]\right] = \\ &= \frac{n}{n-1} \left[\sigma^2 + \mu^2 - \frac{n}{n^2} E[X_1^2] - \frac{n(n-1)}{n^2} \mu^2\right] = \\ &= \frac{n}{n-1} \left[\sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \mu^2 \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\right)\right] = \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2. \end{aligned}$$

Michal Nožička
nozicka@fykos.cz





Seriál: Zpracování dat fyzikálních měření

V minulém díle seriálu jsme si rozebrali, jak se matematicky modeluje experimentální měření fyzikálních veličin. Řekli jsme si, že hodnotu, kterou nám ukáže měřicí přístroj, považujeme za náhodnou veličinu se střední hodnotou rovnou skutečné hodnotě měřené fyzikální veličiny – tedy skutečná hodnota měřené fyzikální veličiny je pevná a neměnná, zatímco naše naměřená data jsou v určitém smyslu náhodná (toto si připomeňte, budeme to potřebovat). Dále jsme si odvodili, jak se v nejjednodušším modelu, kdy uvažujeme, že měřená data mají normální rozdělení, konstruuje odhad měřené fyzikální veličiny a interval spolehlivosti pro měřenou fyzikální veličinu (což fyzikové nazývají nejistota měření).

V tomto díle seriálu se budeme zabývat dvěma věcmi. V první části si rozebereme, jak postupovat v obecnějším případě, kdy naše měřená data nemají normální rozdělení. Uvidíme, že se v takovémto případě postupuje velmi podobně jako v případě normálně rozdělených dat (což už bychom měli umět). Ve druhé části tohoto dílu seriálu se budeme zabývat situací, kdy potřebujeme naměřené fyzikální veličiny (které jsou naměřeny s určitou nejistotou) dosazovat do dalších fyzikálních vzorců. Odvodíme si, jak v takovémto případě přepočítat nejistotu měření, abychom mohli konstruovat intervaly spolehlivosti pro naše transformovaná data.

Centrální limitní věta (CLV)

V této kapitole si povíme, jak zpracovávat naměřená data, která se neřídí normálním rozdělením (nebo to o nich nemůžeme s jistotou prohlásit). V případě bodových odhadů střední hodnoty a rozptylu není žádný rozdíl oproti případu, kdy by námi naměřená data měla normální rozdělení. Odhady uvedené v minulém díle, tedy výběrový průměr

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}_n,$$

výběrový rozptyl

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

a výběrová směrodatná odchylka

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}$$

budou mít i v tomto obecnějším případě stejné vlastnosti jako v případě normálního rozdělení (tedy, že pro velký počet měření bude jejich hodnota s největší pravděpodobností velmi blízká skutečným hodnotám střední hodnoty resp. rozptylu, resp. směrodatné odchylky).

Problém nastane u konstrukce intervalového odhadu. V minulém díle jsme předpokládali, že pokud mají naše měřená data normální rozdělení (s libovolnými parametry) a my na ně aplikujeme následující transformaci

$$\sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{S_n}, \quad (6)$$

kde μ je skutečná střední hodnota rozdělení našich dat (tedy skutečná hodnota měřené fyzikální veličiny), potom má takto vzniklá náhodná veličina (je důležité si uvědomit, že jde o náhodnou veličinu, neboť dopředu neznáme její hodnotu) studentovo rozdělení o $n - 1$ stupních volnosti. Toto tvrzení neplatí, pokud měřená data nemají normální rozdělení.

V obecnějším případě, kdy nemají měřená data normální rozdělení, budeme vycházet ze stejné transformace našich naměřených dat, akorát musíme zjistit, jaké bude mít tato náhodná veličina v tomto obecnějším případě rozdělení. O tom hovoří centrální limitní věta. Centrální limitní věta říká, že ať mají naše jednotlivá měření jakékoliv rozdělení (ve skutečnosti je tady podmínka na konečný rozptyl, ale tím se zatěžovat nebudeme), potom bude platit, že takto transformovaná data konvergují v distribuci k normálnímu rozdělení $N(0, 1)$. Matematicky zapsáno

$$\sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{S_n} \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

Co je to ta konvergence v distribuci? Intuitivně řečeno to znamená, že pro velký počet měření bude hustota náhodné veličiny (6) čím dále více podobná hustotě rozdělení $N(0, 1)$. Podobná v tomto případě znamená, že se v každém bodě bude hustota pravděpodobnosti této náhodné veličiny blížit hustotě pravděpodobnosti rozdělení $N(0, 1)$. Pozorného čtenáře by ihned měly napadnout následující dvě otázky:

1. Co je to velký počet měření? Toto je poměrně složitá otázka, ale v základním modelu, který budeme používat, budeme za dostatečně velký počet měření označovat situaci, kdy budeme mít alespoň 30 měření. V takovémto případě už bude aproximace pomocí CLV velice přesná. Pokud budeme mít méně měření, musíme vzít v úvahu fakt, že aproximace normálním rozdělením pomocí CLV nemusí být tak přesná (o této problematice více dále).
2. Není znění centrální limitní věty ve sporu s tím, co jsme probírali v minulém díle seriálu? V minulém díle seriálu jsme uvažovali, že naše pozorování mají normální rozdělení (což spadá do kolonky „jakékoliv rozdělení“), takže by rozdělení transformace námi naměřených dat (6) podle CLV mělo konvergovat k rozdělení $N(0, 1)$, ale v minulém dílu seriálu se tvrdilo, že tato transformace dat má rozdělení t_{n-1} . Vysvětlení je jednoduché, studentovo rozdělení t_n pro velká n konverguje v distribuci k rozdělení $N(0, 1)$, což si můžete ověřit pomocí vykreslení grafů hustot pravděpodobnosti obou rozdělení.

Velice podobným způsobem jako v minulém díle seriálu můžeme potom pracovat s pravděpodobnostmi a odvodit tak intervalový odhad. Jediný rozdíl je, že místo kvantilů studentova t_{n-1} rozdělení budeme muset používat kvantily normálního rozdělení $N(0, 1)$, které budeme značit u (tedy α -kvantil normálního rozdělení $N(0, 1)$ zapíšeme jako u_α). Pro jistotu ještě připomeneme, co jsou to kvantily rozdělení. Pokud si zvolíme číslo α z intervalu $(0, 1)$, potom α -kvantilem normálního rozdělení (značíme ho u_α) bude takové číslo, které splňuje podmínku, že pravděpodobnost, že naše náhodná veličina řídící se rozdělením $N(0, 1)$ bude menší než u_α , bude rovna α . Matematicky zapsáno

$$P(X < u_\alpha) = \alpha.$$

Pro jistotu stručně zopakujeme postup odvození podoby intervalového odhadu pro střední hodnotu (tedy měřenou fyzikální veličinu) v případě obecného rozdělení měřených dat za použití CLV (postup je naprosto stejný jako v minulém díle seriálu).

$$\begin{aligned}
 1 - \alpha &\simeq P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{S_n} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \\
 &= P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \bar{x}_n - \mu < u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \\
 &= P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \bar{x}_n < -\mu < u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \bar{x}_n\right) = \\
 &= P\left(\bar{x}_n - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} > \mu > \bar{x}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \\
 &= P\left(\bar{x}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} > \mu > \bar{x}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \\
 &= P\left(\bar{x}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right).
 \end{aligned}$$

Všechny prováděné úpravy byly víceméně triviální, jen je nutné si uvědomit, že můžeme upravovat obě nerovnosti naráz. Mezi čtvrtým a pátým řádkem jsme využili vztahu

$$u_{\frac{\alpha}{2}} = -u_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

což plyne ze symetrie hustoty rozdělení $N(0, 1)$ kolem osy y .

Tímto jsme podobně jako v minulém díle seriálu zkonstruovali intervalový odhad (v tomto případě však pouze asymptotický) pro střední hodnotu náhodné veličiny, tedy vlastně pro měřenou fyzikální veličinu ve tvaru

$$1 - \alpha \simeq P\left(\bar{x}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right).$$

Tento intervalový odhad lze interpretovat tak, že pravděpodobnost pokrytí skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny tímto intervalem je pro velký počet měření přibližně $1 - \alpha$ (uvědomme si, že náhodné jsou meze intervalu, nikoliv hodnota měřené fyzikální veličiny). Tento intervalový odhad lze zapsat jako

$$\bar{x}_n \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

Fyzikové většinou zapisují ještě více zkráceně a vynechají i kvantil $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, tedy intervalový odhad zapíše jako

$$\bar{x}_n \pm \frac{S_n}{\sqrt{n}},$$

kde se člen $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ nazývá výběrová směrodatná odchylka průměru (odhaduje to směrodatnou odchylku výběrového průměru) a značí se s_n . Někdy se tomuto členu také říká standardní odchylka.

Tento nejvíce zjednodušený zápis má dvě možné interpretace

- Buď se tím myslí, že uvažujeme hladinu spolehlivosti $\alpha \simeq 0,32$ (tedy pravděpodobnost pokrytí je přibližně 0,68), potom totiž platí

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.$$

- Pokud čtenář chce uvažovat jinou hladinu spolehlivosti, může si podle tabulek doplnit příslušný kvantil a tím intervalový odhad ze zkráceného zápisu zrekonstruovat.

Několik poznámek k intervalovým odhadům založeným na CLV

Zde uvedeme několik důležitých poznámek.

- Jak jsme psali výše, pro velké hodnoty počtu měření n , je studentovo t_n rozdělení téměř identické s rozdělením $N(0, 1)$. Pro velký počet měření je tedy v podstatě jedno, jestli používáme kvantily rozdělení $N(0, 1)$ nebo kvantily studentova t_n rozdělení. To je v souladu s intuitivní představou, že by obě metody (ta uvedená v minulém díle seriálu a ta uvedená dnes) měly pro velký počet měření dávat stejné (nebo alespoň podobné) výsledky.
- Někdy se postupuje tak, že se místo kvantilů normálního $N(0, 1)$ rozdělení uvažují kvantily studentova t_n rozdělení. Tedy zpracováváme naměřená data jakoby měřené hodnoty měli normální rozdělení (viz minulý díl seriálu), ačkoliv víme, že tomu tak není nebo být nemusí. Toto není nutně chybný postup, neboť studentovo t_n rozdělení (pro libovolné $n \in \mathbb{N}$) je více zploštělé než rozdělení $N(0, 1)$ (ověřte si sami vykreslením grafů hustot pravděpodobnosti), tedy jeho kvantily budou vždy v absolutní hodnotě větší než příslušné kvantily (tj. kvantily pro stejnou hladinu spolehlivosti α) normálního rozdělení $N(0, 1)$, tedy budeme tímto způsobem vždy dostávat širší intervaly spolehlivosti. Budeme se tedy chovat více konzervativně tj. výslednou nejistotu měření si tímto způsobem vždy zvětšíme, nikdy si ji nemůžeme zmenšit. Jak už bylo zmíněno v předchozí poznámce, pro velký počet měření tento postup dává téměř identické výsledky jako postup založený na kvantilech $N(0, 1)$ rozdělení. V řešení úloh ovšem používejte klasický postup (tedy ten založený na kvantilech $N(0, 1)$ rozdělení).
- Centrální limitní větu lze použít jen pro dostatečně velký počet měření. Pokud máme alespoň 30 měření, můžeme CLV bez obav použít, aproximace bude už velmi přesná. Pokud máme alespoň 10 měření, můžeme CLV použít, ale musíme mít na paměti, že aproximace normálním rozdělením nebude dokonalá a příslušné intervalové odhady budou jen přibližné. Pokud máme méně než 10 měření, aproximace normálním rozdělením může být už značně nepřesná. Zároveň ale platí, že nic lepšího zkonstruovat nelze. Proto se výsledek většinou uvádí stejný, ale je nutné do diskuze přidat upozornění, že může jít o značně nepřesný výsledek, neboť je založen na malém počtu měření ⁹!
- V minulém dílu seriálu jsme popisovali nejistoty typu A (pocházející z náhodnosti měřených dat) a nejistoty typu B (pocházející z ostatních příčin, typicky nepřesnosti použitého měřidla). Nyní uvedeme, že výběrová směrodatná odchylka průměru (neboli standardní

⁹Pokud jsme si jisti, že námi měřená data mají normální rozdělení – což prakticky nikdy nejsme – potom je intervalový odhad založený na studentově t_n rozdělení (tj. bez použití CLV) přesný pro libovolný počet měření (viz minulý díl seriálu).

odchylka) představuje nejistotu typu A a pokud pracujeme ještě s nejistotou typu B, potom ji k nejistotě typu A přičteme pomocí stejného vzorce

$$s_K = \sqrt{s_A^2 + s_B^2},$$

čímž získáme kombinovanou nejistotu měření. Intervalové odhady potom konstruujeme za použití této kombinované nejistoty měření.

- Cílem fyzikálního experimentu je mít co nejmenší kombinovanou nejistotu měření (tj. naměřit fyzikální veličinu co možná nejpřesněji). Podobně jako v případě normálně rozdělených dat toho lze dosáhnout buď větším počtem měření (tj. zvětšit člen \sqrt{n} ve jmenovateli zlomku, tedy zmenšit nejistotu typu A vyjádřenou pomocí s_n), nebo přesnější měřicí aparaturou (tj. snížit rozptyl měřených dat, tedy snížit člen S_n , který představuje odhad rozptylu).

Vícerozměrný případ

Nyní se zaměříme na případ, kdy chceme změřit více fyzikálních veličin (které budou samozřejmě zatíženy nejistotou) a tyto změřené veličiny následně dosadit do určitého vzorce. Náš úkol bude zkoumat vlastnosti výsledku dosazení (zejména budeme chtít umět vyjádřit nejistoty určení a konstruovat intervalové odhady).

Uvažujme, že cílem našeho experimentu je změřit fyzikální veličiny $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ a následně je dosadit do vzorce

$$v = f(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}),$$

čímž získáme výslednou fyzikální veličinu v . Odvodíme si nyní, jaká bude nejistota určení veličiny v a jak pro ni konstruovat intervalové odhady.

Na tomto místě si musíme uvědomit, že v případě měření více fyzikálních veličin najednou nastává problém se závislostí jednotlivých měření. V úplně nejjednodušším modelu můžeme uvažovat, že jsou všechna prováděná měření na sobě nezávislá, což bude obvykle opodstatněný předpoklad. V nějakých případech ovšem takto jednoduchý model použít nelze a budeme muset do určování výsledné nejistoty a konstrukce intervalových odhadů také zahrnout možnou závislost našich měření. Nyní se budeme věnovat odvození složitějšího modelu se závislými měřeními a jednodušší model pro nezávislá měření dostaneme jako jeho speciální případ. Jako první si musíme zadefinovat, jak budeme matematicky popisovat závislost našich měření (jelikož výsledek jednoho měření modelujeme jako náhodnou veličinu, budeme vlastně popisovat závislosti náhodných veličin).

Kovariance a korelace

Za účelem měření míry závislosti dvou náhodných veličin se zavádí kovariance (též koeficient kovariance, kovarianční koeficient), která je pro dvě náhodné veličiny X a Y definována jako

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)],$$

kde E značí střední hodnotu. Koeficient kovariance může obecně nabývat libovolné reálné hodnoty. Intuitivně si lze kovarianci představovat tak, že vyjadřuje střední hodnotu výrazu

$$(X - EX)(Y - EY),$$

který bude nabývat nejčastěji kladných hodnot (potom jeho střední hodnota potom bude kladné číslo), pokud na sobě budou náhodné veličiny závislé takovým způsobem, že pokud jedna náhodná veličina nabývá vysoké hodnoty (tj. vyšší než je její střední hodnota), potom i druhá náhodná veličina bude s největší pravděpodobností nabývat vysoké hodnoty (tj. vyšší než její střední hodnota). Podobně bude tento výraz nabývat nejčastěji záporných hodnot (potom jeho střední hodnota bude záporné číslo), pokud bude závislost našich náhodných veličin taková, že vysoké hodnoty jedné veličiny (tj. vyšší než její střední hodnota), se budou s největší pravděpodobností vyskytovat právě v případě, že druhá náhodná veličina bude nabývat nízkých hodnot (tj. nižších než její střední hodnota). Také musíme uvést fakt, že pokud budou náhodné veličiny X a Y nezávislé, potom bude hodnota jejich kovariančního koeficientu vždy 0. To lze odvodit přímo z definice následovně

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E[(X - EX)(Y - EY)] = E[X - EX] \cdot E[Y - EY] = \\ &= (EX - EX) \cdot (EY - EY) = 0. \end{aligned}$$

Úpravy, které jsme prováděli, můžeme provést jen za předpokladu, že náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé, jinak takto postupovat nemůžeme.

Pro lepší popis závislosti náhodných veličin se zavádí ještě korelace (též koeficient korelace, korelační koeficient), která je definovaná jako

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)}}.$$

Díky tomu, že koeficient korelace je definován jako vhodně normovaný koeficient kovariance, může nabývat pouze hodnot od -1 do 1 . Pro ideálně lineárně závislé veličiny (tj. pokud platí $X = aY + b$, pro nějaké konstanty a, b) bude korelační koeficient nabývat hodnot ± 1 (bude mít stejné znaménko jako konstanta a). Pokud budou náhodné veličiny X a Y nezávislé, potom bude jejich korelační koeficient nulový (triviální důsledek definice korelačního koeficientu a vlastnosti kovariance, kterou jsme odvodili dříve). Hodnoty korelačního koeficientu blízko nuly ukazují na malou závislost náhodných veličin a hodnoty korelačního koeficientu blízko 1 nebo -1 ukazují na vysokou míru závislosti náhodných veličin.

Kovarianční a korelační koeficient našich naměřených dat v praxi většinou není dopředu znám (podobně jako střední hodnota nebo rozptyl). Pokud si můžeme být jisti, že jsou všechna naše měření fyzikálních veličin nezávislá, potom můžeme tvrdit, že je příslušný kovarianční a korelační koeficient nulový. Tuto jistotu získáme jen díky znalosti toho, jak jsme naše data měřili. V některých případech se stane, že si nemůžeme být jisti nezávislostí našich měření a musíme tedy z naměřených dat odhadovat míry závislosti.

Pokud máme k dispozici měření dvou fyzikálních veličin (vlastně realizace dvou náhodných veličin), můžeme odhadovat jejich kovarianční a korelační koeficienty. Potřebujeme k tomu vždy dvojice měření $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, kde x_i je i -té měření první fyzikální veličiny a y_i je i -té měření druhé fyzikální veličiny. Zde je nutné poznamenat, že nelze postupovat tak, že si naměřené hodnoty libovolně spárujeme, dvojice hodnot (x_i, y_i) musí vždy pocházet z odpovídajících si měření! Pokud máme takovéto dvojice odpovídajících si měření, můžeme kovarianční koeficient odhadnout pomocí tzv. výběrového kovariančního koeficientu koeficientu definovaného jako

$$\widehat{\text{cov}}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n),$$

kde $\overline{x_n}, \overline{y_n}$ mají význam výběrových průměrů. Podobně lze odhadovat korelační koeficient pomocí výběrového korelačního koeficientu definovaného jako

$$\widehat{\text{corr}}(X, Y) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x_n})(y_i - \overline{y_n})}{\sqrt{S_{X,n}^2 \cdot S_{Y,n}^2}},$$

kde $S_{X,n}^2$ je výběrový rozptyl zkonstruovaný z realizací náhodné veličiny X , $S_{Y,n}^2$ je výběrový rozptyl zkonstruovaný z realizací náhodné veličiny Y a členy $\overline{x_n}$ a $\overline{y_n}$ mají význam výběrových průměrů.

Na tomto místě si opět musíme rozdíel mezi odhadem kovariančního (resp. korelačního) koeficientu a jeho skutečnou hodnotou (kterou většinou neznáme). Skutečná hodnota kovariančního (resp. korelačního) koeficientu je konstanta (není na ní nic náhodného), zatímco odhad kovariančního (resp. korelačního) koeficientu (tj. výběrový kovarianční a korelační koeficient) je náhodná veličina (protože je zkonstruován na základě naměřených dat, která jsou náhodná, nemůžeme dopředu určit jeho hodnotu). Pro velký počet měření bude mít výběrový kovarianční (resp. korelační) koeficient podobně jako předchozí odhady tu vlastnost, že bude s největší pravděpodobností velice blízko skutečným hodnotám kovariančního (resp. korelačního) koeficientu. Nyní už víme, jak matematicky měřit závislosti dvou náhodných veličin a můžeme přistoupit k formulaci vícerozměrné centrální limitní věty.

Vícerozměrná verze CLV

Nyní už můžeme uvést znění vícerozměrné centrální limitní věty¹⁰. Uvažujme tedy situaci jako výše, tedy že měříme k různých fyzikálních veličin $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$, které naměříme s určitou nejistotou. Máme tedy naměřeno

$$\left(\overline{v^{(1)}} \pm s_{n_1}^{(1)} \right), \dots, \left(\overline{v^{(k)}} \pm s_{n_k}^{(k)} \right),$$

kde $\overline{v^{(i)}}$ je výběrový průměr i -té fyzikální veličiny a $s_{n_i}^{(i)}$ je standardní odchylka i -té fyzikální veličiny tak, jak byly definovány výše (uvažujeme tedy, že každá fyzikální veličina mohla být měřena různým počtem měření, a uvažujeme také, že rozdělení měřených dat nemusí být normální a ani měření různých fyzikálních veličin nemusí být vzájemně nezávislé). Tyto naměřené veličiny následně chceme dosadit do vzorce

$$v = f(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) \quad (7)$$

a určit výslednou nejistotu a zkonstruovat intervalové odhady.

V tomto případě využijeme vícerozměrnou verzi centrální limitní věty, která tvrdí, že platí

$$\frac{f\left(\overline{v_n^{(1)}}, \dots, \overline{v_n^{(k)}}\right) - f\left(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}\right)}{\sqrt{S^2}} \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

¹⁰Uvedeme ji zde v trochu neobvyklém tvaru, který je ale velice užitečný pro výpočty. Pokud byste si o tomto tématu četli i v jiné literatuře, je pravděpodobné, že tam bude CLV pro vícerozměrný případ formulována jinak, nicméně tyto dvě formulace jsou ekvivalentní.

kde $v^{(i)}$ je skutečná hodnota i -té fyzikální veličiny a S^2 je v tomto případě odhad rozptylu náhodné veličiny představující celkový výsledek měření¹¹, který se spočte podle vzorce¹²

$$S^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial v^{(1)}}(\bar{v}) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial v^{(k)}}(\bar{v}) \right) \begin{pmatrix} S_{n_1}^2 & \dots & \widehat{\text{cov}}(v^{(1)}, v^{(k)}) \\ \frac{\widehat{\text{cov}}(v^{(2)}, v^{(1)})}{\sqrt{n_2 n_1}} & \dots & \frac{\widehat{\text{cov}}(v^{(2)}, v^{(k)})}{\sqrt{n_2 n_k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\widehat{\text{cov}}(v^{(k)}, v^{(1)})}{\sqrt{n_k n_1}} & \dots & S_{n_k}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial v^{(1)}}(\bar{v}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial v^{(k)}}(\bar{v}) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Poznamenejme na tomto místě, že výrazem

$$\frac{\partial f}{\partial v^{(i)}}(\bar{v})$$

se myslí hodnota parciální derivace funkce f podle i -té proměnné vyčíslená v bodě

$$\bar{v} = \left(\overline{v_{n_1}^{(1)}}, \dots, \overline{v_{n_k}^{(k)}} \right),$$

tedy jde o číslo.

Klasickým způsobem, který jsme zde už několikrát viděli, můžeme zkonstruovat asymptotický intervalový odhad pro

$$v = f(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}).$$

Uvedeme zde jen hlavní kroky odvození¹³

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &\simeq \text{P} \left(u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{f(\overline{v_n^{(1)}}), \dots, \overline{v_n^{(k)}}) - f(v^{(1)}, \dots, v^{(k)})}{\sqrt{S^2}} < u_{1 - \frac{\alpha}{2}} \right) = \\ &= \text{P} \left(-f(\overline{v_n^{(1)}}), \dots, \overline{v_n^{(k)}}) + u_{\frac{\alpha}{2}} S < -f(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) < -f(\overline{v_n^{(1)}}), \dots, \overline{v_n^{(k)}}) + u_{1 - \frac{\alpha}{2}} S \right) = \\ &= \text{P} \left(f(\overline{v_n^{(1)}}), \dots, \overline{v_n^{(k)}}) - u_{1 - \frac{\alpha}{2}} S < f(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) < f(\overline{v_n^{(1)}}), \dots, \overline{v_n^{(k)}}) + u_{1 - \frac{\alpha}{2}} S \right). \end{aligned}$$

V nejvíce zkrácené podobě se tento intervalový odhad bude zapisovat stejně jako v předchozích případech pouze jako

$$f(\overline{v_n^{(1)}}), \dots, \overline{v_n^{(k)}}) \pm S,$$

kde S se označuje jako standardní odchylka.

¹¹Tj. dosazení odhadů našich fyzikálních veličin do vzorce (7).

¹²Tento vzorec využívá parciální derivace a maticové násobení. Pokud toto neumíte, můžete se podívat na poslední kapitulu tohoto dílu seriálu, kde je vše stručně vysvětleno, nebo můžete pokračovat dále, neboť jak uvidíme, v praxi nejčastěji používaných případech se tento vzorec značně zjednoduší.

¹³Používají se jen algebraické úpravy nerovností a nahrazení $u_{\frac{\alpha}{2}}$ pomocí $-u_{1 - \frac{\alpha}{2}}$.

Několik poznámek k intervalovým odhadům založeným na vícerozměrné CLV

Zde uvedeme několik důležitých poznámek.

- V odvození jsme uvažovali vícerozměrný případ, tedy obecně $k \in \mathbb{N}$. Celou odvozenou teorii lze samozřejmě aplikovat i na speciální případ, kdy zvolíme $k = 1$ (tedy jen jednorozměrný případ). Toto se při zpracování fyzikálních experimentů vyskytuje poměrně často (měříme jen jednu veličinu a chceme ji dosadit do určitého fyzikálního vzorce).
- Vícerozměrnou centrální limitní větu lze použít jen pro dostatečně velký počet měření. Pokud jsme provedli více než 30 měření každé fyzikální veličiny, potom už bude aproximace pomocí vícerozměrné CLV velmi přesná. Pokud jsme provedli alespoň 10 měření každé fyzikální veličiny aproximace pomocí vícerozměrné CLV nebude tolik spolehlivá, ale stále bude poměrně přesná. Pro menší počet měření nějaké veličiny než 10 platí, že použití vícerozměrné CLV už může dávat značně nepřesné výsledky. Zároveň ale platí, že žádný lepší postup než výše uvedený neexistuje. Proto se i pro malý počet měření (menší než 10) výsledek většinou uvádí stejný, ale je nutné přidat upozornění, že může jít o značně nepřesný výsledek¹⁴!
- V rámci typů nejistot měření můžeme standardní odchylku S považovat za kombinovanou nejistotu měření, pokud jsme jako $s_{n_i}^{(i)}$ používali kombinované nejistoty měření, nebo ji můžeme považovat pouze za nejistotu typu A, pokud jsme jako $s_{n_i}^{(i)}$ používali pouze nejistoty typu A.

Zákon šíření nejistot

V nejobecnějším modelu (kdy uvažujeme závislá měření různých fyzikálních veličin) nemůžeme vzorec (8) nijak zjednodušit a musíme opravdu provést celý takto složitý výpočet. V určitých speciálních případech se ovšem tento vzorec značně zjednoduší.

Ve speciálním případě, kdy budeme uvažovat, že jsou všechna měření na sobě nezávislá (tj. nebudeme ani odhadovat kovariance měření různých fyzikálních veličin, ale rovnou budeme předpokládat, že jsou nulové), se nám vzorec (8) zjednoduší na tvar

$$S = \sqrt{\left(\frac{\partial f(\bar{v})}{\partial v^{(1)}}\right)^2 s_{n_1}^{(1)2} + \dots + \left(\frac{\partial f(\bar{v})}{\partial v^{(k)}}\right)^2 s_{n_k}^{(k)2}}.$$

Tomuto vzorci se také někdy říká zákon šíření nejistot (případně zákon propagace nejistot).

V praxi se vyplatí znát přesnou podobu zákona šíření nejistot pro nejčastěji se vyskytující funkce, které můžeme vidět v tabulce 3. Pilný čtenář si může platnost všech uvedených vzorců ověřit dosazením příslušných funkcí do zákona šíření nejistot.

Občas se lze v praxi setkat také s pojmem relativní nejistota měření, která je definována jako

$$\delta_x = \frac{\bar{x}_n}{s_n}.$$

Je důležité poznamenat, že relativní nejistota měření je bezrozměrná veličina (na rozdíl od klasické nejistoty). Přejít od relativní nejistoty měření ke klasické nejistotě měření si jistě

¹⁴Pokud bychom věděli, že námi měřená data mají normální rozdělení, lze odvodit přesný postup (tj. bez jakékoliv aproximace) analogický jednorozměrnému případu. Tento postup je ovšem příliš složitý a nebudeme ho zde uvádět (v praxi se stejně téměř nepoužívá).

Tab. 3: Nejdůležitější příklady použití zákona šíření nejistot.

Použitá funkce	Vzorec na výslednou nejistotu měření
$f(v^{(1)}, v^{(2)}) = v^{(1)} + v^{(2)}$	$S = \sqrt{s_{n_1}^{(1)2} + s_{n_2}^{(2)2}}$
$f(v^{(1)}, v^{(2)}) = v^{(1)} - v^{(2)}$	$S = \sqrt{s_{n_1}^{(1)2} + s_{n_2}^{(2)2}}$
$f(v^{(1)}, v^{(2)}) = v^{(1)} \cdot v^{(2)}$	$S = \sqrt{\frac{v_{n_2}^{(2)2}}{v_{n_1}^{(1)2}} s_{n_1}^{(1)2} + \frac{v_{n_1}^{(1)2}}{v_{n_2}^{(2)2}} s_{n_2}^{(2)2}}$
$f(v^{(1)}, v^{(2)}) = \frac{v^{(1)}}{v^{(2)}}$	$S = \sqrt{\frac{1}{v_{n_2}^{(2)2}} s_{n_1}^{(1)2} + \frac{v_{n_1}^{(1)2}}{v_{n_2}^{(2)4}} s_{n_2}^{(2)2}}$
$f(v) = v^a, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$	$S = a \cdot \overline{v_n}^{a-1} s_n$

už každý čtenář dokáže odvodit sám. Celá teorie by se dala podobným způsobem vybudovat, pokud bychom používali relativní nejistoty měření, ale až na výjimečné příklady¹⁵ by to nevedlo k jednodušším výsledkům. V dalším pokračování seriálů i v řešení seriálových úloh se nebudeme relativními nejistotami měření dále zabývat, zde je uvádíme jen jako drobné rozšíření vykládané látky.

Parciální derivace a násobení matic (vektorů)

Jelikož se ve vzorcích (8) vyskytly parciální derivace a násobení matic, což možná není všem úplně známé, uvedeme zde stručné objasnění použitých pojmů.

V tomto díle seriálu bohužel nemůžeme podrobně vysvětlit, jak je definována derivace (resp. parciální derivace) a jaké má vlastnosti. Proto pouze uvedeme, že parciální derivace funkce k proměnných podle i -té proměnné se spočítá jako normální derivace funkce, když budeme na všechny proměnné kromě i -té pohlížet jako na konstanty.

Matice jsou v podstatě jen tabulky čísel, nic více. U matice rozlišujeme její rozměry (tj. kolik má řádků a sloupců), říkáme, že matice A je typu k krát n (píšeme $A_{k \times n}$ – první číslo udává počet řádků, druhé počet sloupců). Matice typu 1×1 je pouze číslo a matici typu $1 \times n$ (resp. $n \times 1$) se říká řádkový (resp. sloupcový) vektor.

Násobení matic je definováno poněkud složitěji. Uvažujme, že máme matice $A_{k \times n}$ a $B_{n \times l}$ (aby byl součin těchto matic definován musí být počet sloupců první matice roven počtu řádků

¹⁵Pokud bychom formulovali zákon šíření nejistot v řeči relativních nejistot, potom by například pro volbu funkce $f(u, v) = u \cdot v$ výsledná relativní nejistota měření byla jen kvadratickým součtem relativních nejistot měření veličin u a v . Ve většině ostatních případů by ale používání relativních nejistot vedlo spíše ke složitějším výsledkům.

druhé matice), potom součin AB je definován následovně¹⁶

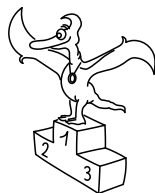
$$\begin{aligned}
 A \cdot B &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,l} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,l} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \langle a_{1,\bullet}, b_{\bullet,1} \rangle & \langle a_{1,\bullet}, b_{\bullet,2} \rangle & \cdots & \langle a_{1,\bullet}, b_{\bullet,l} \rangle \\ \langle a_{2,\bullet}, b_{\bullet,1} \rangle & \langle a_{2,\bullet}, b_{\bullet,2} \rangle & \cdots & \langle a_{2,\bullet}, b_{\bullet,l} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_{k,\bullet}, b_{\bullet,1} \rangle & \langle a_{k,\bullet}, b_{\bullet,2} \rangle & \cdots & \langle a_{k,\bullet}, b_{\bullet,l} \rangle \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

kde $a_{i,\bullet}$ označuje i -tý řádek matice A , $b_{\bullet,j}$ označuje j -tý sloupec matice B a výraz $\langle a_{i,\bullet}, b_{\bullet,j} \rangle$ označuje skalární součin vektorů $a_{i,\bullet}$ a $b_{\bullet,j}$ definovaný jako

$$\langle a_{i,\bullet}, b_{\bullet,j} \rangle = \sum_{g=1}^n a_{i,g} \cdot b_{g,j}.$$

Výsledkem součinu matic $A_{k \times n}$ a $B_{n \times l}$ je tedy matice tvaru $C_{k \times l}$. Pokud chceme násobit vektor s maticí (nebo 2 vektory spolu) stačí na vektory pohlížet jako na speciální případ matice a řídit se pravidly pro maticové násobení.

¹⁶Je důležité poznamenat, že maticové násobení není komutativní, tedy obecně platí $A \cdot B \neq B \cdot A$, ale je asociativní, tedy platí $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ pro libovolné matice A, B, C , pro které je takovýto součin definován.



Pořadí řešitelů po II. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
Student Pilný	MFF UK	6	6	6	6	7	9	12	10	62	100	122
1. Václav Zvoníček	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	6	6	6	7	-	11	9	51	89	101
2. Martin Vavřík	G, Šumperk	8	6	3	2	7	-	14	8	48	88	99
3. Matěj Prokop	G Dašická, Pardubice	8	2	5	2	7	-	10	9	43	79	89
4.-5. Jakub Jobus	G PdC, Piešťany	6	6	3	6	6	-	8	10	45	83	86
4.-5. Radka Krížová	G J. Heyrovského, Praha	6	6	4	3	7	-	11	3	40	76	86
6. Martin Schmiéd	G Jihlava	6	6	3	4	1	-	9	10	39	72	77
7. Viktor Materna	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	6	6	2	-	-	10	3	33	70	65
8. Matěj Krátký	PORG, Praha	6	6	7	6	4	-	-	-	29	88	64
9.-10. Miroslav Macko	ŠpMNDaG, Bratislava	8	2	-	-	5	-	8	-	23	76	57
9.-10. Eva Vochozková	Biskupské G, Brno	6	4	3	3	2	-	13	-	31	70	57
11. Jakub Pravda	ŠpMNDaG, Bratislava	6	4	4	-	-	-	9	2	25	61	53
12. Richard Hamerlík	ŠpMNDaG, Bratislava	6	6	1	1	-	6	2	2	24	52	52
13. Filip Novotný	G Jihlava	2	6	2	-	5	-	-	-	15	66	44
14. Petr Doubravský	Akademické G, Praha	-	4	-	-	-	-	9	-	13	72	43
15. Šimon Brázda	G, Hlinsko	6	4	3	-	3	-	-	-	16	53	42
16.-17. Kateřina Barotová	G, Olomouc-Hejčín	6	-	-	-	-	-	9	-	15	80	33
16.-17. Filip Wagner	G Tišnov	4	4	-	-	-	-	-	-	8	67	33
18.-19. Adam Vavrečka	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	-	-	72	28

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
Student Pilný	MFF UK	6	6	6	6	7	9	12	10	62	100	122
1. Kateřina Rosická	G J. Ortena, Kutná Hora	6	6	6	6	7	-	13	10	54	97	110
2. Josef Minařík	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	6	6	1	7	-	10	9	41	81	92
3. Lucie Kundratová	G, nám. TGM, Zlín	6	6	4	6	6	-	11	9	48	81	91
4. Ladislav Trnka	G, Havlíčkův Brod	2	6	5	2	5	-	11	12	43	83	89
5. Jakub Růžička	G, Nymburk	6	6	6	-	2	-	11	10	41	83	84
6. Jindřich Dušek	G Jana Keplera, Praha	8	2	5	6	7	-	-	9	37	82	83
7. Ivan Hudák	ESS, Lip. Mikuláš	6	4	6	2	-	-	12	6	36	86	76
8. Jiří Blaha	G, Uherské Hradiště	6	6	3	-	6	-	13	-	34	84	68
9. Kristian Matušík	G, Benešov	8	6	3	-	3	-	6	-	26	70	57
10. Tereza Pavlišová	G, Olomouc-Hejčín	6	4	3	2	-	-	-	7	22	56	45
11. Jakub Smolka	Slezské G, Opava	6	4	2	-	3	-	3	-	18	61	41
12. Marie Grunová	G Moravský Krumlov	-	4	0	-	-	-	9	-	13	55	36
13. Veronika Vohníková	Nový PORG, Praha	-	6	-	-	-	-	7	-	13	77	23
14.-15. Karel Balej	G a SOŠ, Rokycany	6	-	3	-	-	-	-	-	9	88	21
14.-15. Jakub Rajnštajn	G F. M. Pelcla, Rychnov n. Kn.	-	-	-	-	6	-	-	-	6	70	21

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
		6	6	6	6	7	9	12	10	62	<i>100</i>	122
16. <i>Kateřina Charvátová</i>	G B. Němcové, HK	-	-	-	-	-	-	-	-	-	75	18
17.–19. <i>Martin Dinh</i>	G, Třinec	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	17
17.–19. <i>Daniel Martyněk</i>	G, Třinec	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	17
17.–19. <i>Štěpán Stryja</i>	G, Třinec	-	-	-	-	-	-	-	-	-	68	17
20.–21. <i>Dominik Beňo</i>	G L. Svobodu, Humenné	-	-	-	-	-	-	-	-	-	84	16
20.–21. <i>Šimon Kondrk</i>	SPŠ Dubnica nad Váhom	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	16
22. <i>Jakub Zemek</i>	G, Uherské Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	-	-	65	13
23.–24. <i>Andrea Bínová</i>	G, Česká Lípa	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	12
23.–24. <i>Josef Sabol</i>	G Chotěboř	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	12

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
		3	3	6	6	7	9	12	10	56	<i>100</i>	110
1. <i>Martin Okánik</i>	G Tajovského, B. Bystrica	3	3	6	6	7	-	10	9	44	94	95
2. <i>Vít Beran</i>	Masarykovo G, Plzeň	3	3	6	6	7	-	-	8	33	96	85
3.–4. <i>Tomáš Dulava</i>	Matičnický G, Ostrava	3	3	6	6	7	-	9	9	43	82	83
3.–4. <i>Viktor Rosman</i>	G, Pelhřimov	4	3	6	6	6	-	11	8	44	82	83
5. <i>Ondřej Knopp</i>	G Christiana Dopplera, Praha	4	-	6	6	7	-	-	8	31	95	82
6. <i>David Košťák</i>	G, Josefská, Praha	3	2	3	1	5	-	10	7	31	75	76
7. <i>Dominik Starý</i>	G, Benešov	3	3	5	-	5	-	5	8	29	81	62
8. <i>Zuzana Richterová</i>	G, Pelhřimov	2	3	3	4	4	-	3	2	21	51	52
9. <i>Katarína Častuláková</i>	1. súkromné G v Bratislave	3	3	3	3	5	-	8	-	25	59	48
10. <i>David Dvořák</i>	ZŠ a G, Konice	-	1	3	-	-	-	5	8	17	65	40
11. <i>John Richard Ritter</i>	G Masarykovo nám., Třebíč	-	-	-	-	-	-	-	-	-	92	33
12. <i>Jiří Löffelmann</i>	G, Litoměřická, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	88	21
13. <i>Filip Keller</i>	G P. de Coubertina, Tábor	3	3	3	-	-	-	-	-	9	72	18
14.–16. <i>Ondřej Buček</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	-	1	1	-	-	-	-	-	2	61	17
14.–16. <i>Jaroslav Paidar</i>	SPŠ Masarykova, Liberec	-	-	-	-	-	-	-	-	-	52	17
14.–16. <i>Matej Parada</i>	G Jura Hronca, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	74	17
17.–18. <i>Markéta Jirmanová</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	3	3	1	-	-	-	9	-	16	67	16
17.–18. <i>Katarína Žatková</i>	Evanjelický G JAK, Košice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	62	16
19. <i>Veronika Funková</i>	G L. Jaroše, Holešov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	63	15
20. <i>Andrej Holmes</i>	G Ružomberok	0	1	-	-	-	-	-	0	1	40	14
21. <i>Pavla Trembuláková</i>	G Jírovcova, České Budějovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	42	13
22.–25. <i>Daniela Hrbáčová</i>	Wichterlovo G, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	35	12
22.–25. <i>Ondřej Komora</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	71	12
22.–25. <i>Martina Kopecká</i>	G J. Barranda, Beroun	-	-	-	-	-	-	-	-	-	92	12

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	3	6	6	7	9	12	10	56	100	110
1. Štěpán Stenclák	G, Třinec	3	3	6	6	7	–	12	10	47	100	101
2. Jáchym Bártík	G, Havlíčkův Brod	4	3	6	6	7	–	12	12	50	97	98
3. Daniela Pittnerová	G L. Svobodu, Humenné	3	3	6	6	7	–	11	10	46	86	87
4. Matěj Mezera	G, Havlíčkův Brod	3	–	5	6	0	–	10	10	34	86	84
5. Klára Ševčíková	G, Uherské Hradiště	3	3	4	–	6	–	9	6	31	82	73
6. Jan Střeleček	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	4	3	4	2	3	–	8	4	28	61	62
7. Lucie Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	1	5	2	5	–	6	0	22	53	48
8. Filip Novotný	G Masarykovo nám., Kromě- říž	3	3	6	6	6	–	–	–	24	77	47
9. Přemysl Štastný	G, Žamberk	3	3	4	3	–	–	–	–	13	85	46
10.–11. Karel Jókai	G, Špitálská, Praha	3	–	–	2	–	6	–	–	11	66	35
10.–11. Samuel Šipikal	G Milana Ráfusa	3	3	3	–	1	–	–	–	10	52	35
12.–13. Alžběta Andrášková	G, Olomouc-Hejčín	3	2	3	–	–	–	–	–	8	76	29
12.–13. Matěj Rzehulka	Wichterlovo G, Ostrava	4	3	5	–	1	–	–	–	13	67	29
14. Branislav Belko	G Milana Ráfusa	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	28
15. Petr Šimůnek	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	–	–	–	–	4	–	–	–	4	80	24
16. Jonáš Fuksa	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	88	21
17. František Zach	G, Litomyšl	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	18
18. Kateřina Stodolová	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	87	13
19.–20. Veronika Gintnerová	G Sv. Františka, Žilina	3	3	–	–	–	–	–	–	6	100	12
19.–20. Martin Vejvoda	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	12
21. Petra Štefaníková	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	91	10
22. Václav Mikeska	G F. Palackého, Val. Mez.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	6
23. Tomáš Tesař	G Jana Keplera, Praha	–	–	0	–	–	–	–	–	0	0	0


**FYKOS**

UK, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>e-mail: fykos@fykos.czFYKOS je také na Facebooku <http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.