Úloha IV.5 ... skluzavka

5 bodů; průměr 2,79; řešilo 38 studentů

Na vodorovné ploše jsou rovnoběžně položeny dva stejné kvádry o hmotnosti m a délce l. Vzdálenost bližších stěn těchto kvádrů je $2x_0$. Mezi kvádry začneme lít vodu objemovým tokem Q. Na krajích těchto kvádrů jsou mantinely zabraňující odtékání vody z prostoru mezi kvádry. Statický koeficient tření mezi kvádrem a podložkou je f_0 a dynamický f. Tření mezi kvádry a mantinely neuvažujte. Jaká je podmínka na f_0, aby se kvádry vůbec nerozpohybovaly? V případě, kdy je f_0 dostatečně malé, vypočítejte závislost zrychlení kvádrů na jejich poloze a vzdálenost, ve které kvádry zastaví.

Veškerý pohyb vody považujeme za dostatečně pomalý, takže v ní nevznikají žádné vlny ani víry, nezahřívá se třením a ani sama nemá žádnou kinetickou energii. Protože je tedy i Q malé, můžete uvažovat, že přilévání další vody po rozpohybování kvádrů nemá na jejich pohyb vliv.
Bonus: *Najděte podmínku pro překlopení kvádru.*

Kubovi se zdálo o plavání v divném bazénu.

První věc, co se hodí zmínit, je, že situace je symetrická na obě strany. Proto budeme vyšetřovat pouze pohyb jednoho kvádru a ten druhý se bude pohybovat stejně, tedy v každém okamžiku bude mít stejný (s opačným znaménkem) polohový vektor, rychlost i zrychlení.

Na kvádry působí tíhová síla, třecí síla a tlaková síla od vody. Nejprve spočtěme, jak je velká tlaková síla F_p, když je mezi kvádry vody do výšky h. Označme $\mathrm{d}y$ tloušťku tenké vrstvy vody v hloubce y. V této hloubce je hydrostatický tlak o velikosti $p = y\varrho g$ a ten působí na element plochy kvádru o velikosti $\mathrm{d}S = l\mathrm{d}y$. Zintegrujme působící sílu přes celou výšku vody.

$$\int_0^F \mathrm{d}F = \int_0^h y\varrho g l \mathrm{d}y \,,$$

$$F = \varrho g l \frac{h^2}{2} \,.$$

Ke stejnému výsledku se lze dostat tak, že hydrostatický tlak lineárně roste s hloubkou y, a tak celkový průměrný tlak na kvádr bude polovina maximálního tlaku v hloubce h.

Zřejmě maximální tlak na kvádr nastane, když bude celý prostor mezi kvádry vyplněn vodou. Pokud se ani v tomto okamžiku kvádry nerozjedou, pak už se nerozjedou vůbec. Označme výšku kvádru H, pak podmínka, aby se kvádry nerozpohybovaly, vypadá následovně

$$\frac{1}{2}\varrho g l H^2 < m g f_0 \,,$$

$$f_0 > \frac{\varrho l H^2}{2m} \,.$$

Dále předpokládejme, že f_0 je nižší. V okamžiku, kdy se kvádry začnou pohybovat, nastává rovnost mezi silou tlakovou a silou třecí. Odtud můžeme spočítat výšku hladiny vody v tomto okamžiku,

$$h_0 = \sqrt{\frac{2mf_0}{\varrho l}} \,.$$

Podle zadání je vliv přilévání vody na pohyb zanedbatelný. To je ekvivalentní tomu, že se od tohoto okamžiku už nepřilévá další voda. Zachovává se tedy objem vody mezi kvádry. Voda bude mít v tomto hydrostatickém modelu vodorovnou hladinu[1], proto píšeme

$$V = 2xlh = 2x_0lh_0 = 2x_0l\sqrt{\frac{2mf_0}{\varrho l}}\,,$$

$$h = \frac{x_0}{x}\sqrt{\frac{2mf_0}{\varrho l}}\,,$$

kde přirozeně používáme index 0 pro počáteční hodnoty. Pokud spočítáme sílu, kterou působí voda na kvádr jako tlakovou sílu od přilehlé vrstvy vody (svislé vrstvy), nemusí nás zajímat, co se děje se zbytkem vody a jak tam působí síly. Celkovou sílu působící na kvádr v libovolném okamžiku během pohybu můžeme spočítat jako

$$F = \frac{1}{2}\varrho g l h^2 - mgf = mg\left(\frac{f_0x_0^2}{x^2} - f\right)\,,$$

$$a = \frac{F}{m} = g\left(\frac{f_0x_0^2}{x^2} - f\right)\,,$$

kde jsme rovnou spočetli i zrychlení kvádru v závislosti na jeho poloze.

Nyní vyšetřujme, kdy kvádr zastaví. První věc, co by mohla někoho napadnout, je, že zastaví, když se síly vyrovnají. Jenže v ten okamžik je pouze zrychlení nulové, ale kvádr má stále nějakou rychlost (dokonce svou maximální rychlost).

Asi nejspolehlivější a nejjednodušší cesta je přes energie.[2] Práce, kterou vykoná síla F (vykonává voda, ale část energie se disipuje kvůli tření), tedy $\int F\mathrm{d}x$, je rovna kinetické energii kvádru. Když kvádr zastaví, bude mít nulovou kinetickou energii. Máme tedy rovnici

$$0 = \int\limits_{x_0}^{x} F\mathrm{d}x = \int\limits_{x_0}^{x} mg\left(\frac{f_0x_0^2}{x^2} - f\right)\mathrm{d}x = mg\left(f_0x_0^2\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}\right) - f\left(x - x_0\right)\right)\,,$$

$$f_0x_0^2\frac{x - x_0}{xx_0} = f(x - x_0)\,,$$

$$x = x_0\frac{f_0}{f}\,.$$

Rozeberme si, co jsme to vlastně získali. Předně je koeficient statického tření vyšší než dynamického, proto se opravdu kvádry rozjedou. Pokud by se koeficienty rovnaly, což je také možné, je třeba si uvědomit, že jsme počítali, kde se kvádr zastaví, když nebudeme přilévat vodu. Pokud bychom ji stále pomalu přilévali, kvádr by se trochu rozjel, ale vzápětí by opět zastavil, protože by hladina klesla zpět pod kritickou výšku. Takže by se kvádr pozvolna odsouval dál, ale rychlost by měl neustále prakticky nulovou. Pro tento limitní případ náš model nefunguje.

[1] Toto platí jen díky tomu, že zanedbáváme kinetickou energii vody, což znamená, že je rychlost vody celou dobu nulová, a tedy i zrychlení. Ve skutečnosti se však i voda musí pohybovat se zrychlením, jinak by jí kvádr ujel. Pokud si rozdělíme vodu na svislé plátky a napíšeme si pohybové rovnice pro tyto plátky, zjistíme, že jediná působící síla je tlaková od sousedních plátků. Aby bylo zrychlení nenulové (kladné), musí výška vody klesat se vzdáleností od středu. To znamená, že u kvádru bude hladina vody nejnižší, a bude na něj působit síla jiná, než jakou uvažujeme v našem modelu.

[2] Stejně tak bychom mohli řešit diferenciální rovnici $a = g(f_0x_0^2/x^2 - f)$ s okrajovými podmínkami $v(x_0) = v(x_1) = 0$. K jednoduchému řešení této rovnice se využije trik $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}x \cdot v$, kterým převedeme rovnici na rovnici prvního řádu, navíc separovatelnou.

Bonus

Vedle síly působí voda na kvádr i momentem síly, v analogii s předchozím zde působí třecí a tíhový moment. Vztáhněme veškeré momenty vzhledem k ose procházející vnější spodní hranou kvádru, tedy tou hranou, kolem které hrozí překlopení. Vůči této ose má třecí síla nulový moment. Když označíme šířku kvádru b, působí na kvádr tíhová síla momentem o velikosti $M_{\mathrm{G}} = mgb/2$. Moment tlakové síly si budeme muset zintegrovat.[3] Využijme toho, že už máme vyjádření pro element síly a pouze ho vynásobme příslušným ramenem elementu síly, čímž získáme element momentu síly

$$\mathrm{d}M_{\mathrm{P}} = (h-y)dF = (h-y)y\varrho gl\mathrm{d}y\,,$$

$$M_{\mathrm{P}} = \int_0^{M_{\mathrm{P}}} \mathrm{d}M_{\mathrm{P}} = \int_0^h (h-y)y\varrho gl\mathrm{d}y = \frac{1}{6}\varrho glh^3\,.$$

Pokud moment tlakové síly převýší moment tíhové síly, kvádr se nadzdvihne a začne na něj působit ještě moment vztlakové síly, a navíc se i rameno tíhové síly bude zmenšovat, a tak už se kvádr převrátí úplně. Krom tohoto efektu však vztlak nadlehčí kvádr, a tím sníží maximální třecí sílu, a voda kvádr pravděpodobně odnese. To už je ale mnohem složitější problém než naše úloha.

Podmínka pro překlopení kvádru tedy je, že tlakový moment převýší tíhový alespoň v okamžiku, kdy je ještě kvádr celý na zemi. To nastane když

$$\frac{1}{6}\varrho glh^3 = \frac{1}{2}mgb\,,$$

$$h^3 = \frac{3mb}{\varrho l}\,,$$

tedy hladina vody se musí dostat nad určitou hranici. To se určitě nestane, pokud bude výška kvádrů nižší než tato hranice, tedy pokud bude splněná podmínka

$$H^3 > \frac{3mb}{\varrho l}\,.$$

Porušení této podmínky však stále nezaručí, že se kvádr převrátí. Pokud se rozjede dříve, než se hladina vody dostane do výšky $\sqrt[3]{3mb/\varrho l}$, bude už hladina vody jen klesat – je tedy třeba, aby při rozjezdu byla výška hladiny vyšší než tato mez. V okamžiku rozjezdu platí $h^2 = 2mf_0/\varrho l$. Po dosazení za h do podmínky pro překlopení kvádru dostáváme

$$\left(\frac{2mf_0}{\varrho l}\right)^3 > \left(\frac{3mb}{\varrho l}\right)^2\,,$$

$$\frac{8mf_0^3}{9\varrho lb^2} > 1\,.$$

Aby se tedy kvádr překlopil, musí být současně splněny dvě podmínky, které můžeme spojit do jedné řetězové nerovnosti $H^3 > 3mb/\varrho l > 27b^3/8f_0^3$. Vidíme, že první a třetí člen můžeme

[3] Někdo si mohl spočítat působiště tlakové síly a pak ho vynásobit výslednou silou, ale působiště se stejně počítá jako poloha, kde by musela výsledná síla působit, aby měla stejný moment síly jako ten, který na těleso opravdu působí. (Síla působí ve výšce $h/3$.)

odmocnit, z čehož získáme nutnou, ale ne postačující podmínku překlopení kvádru, a sice, že rameno tíhové síly musí být menší než f_0-násobek ramene tlakové síly.

Jakub Dolejší
`krasnykuba@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.