Úloha III.1 ... bláznivá rybička

2 body; průměr 1,70; řešilo 89 studentů

V akváriu ve tvaru koule s poloměrem $r = 10\,\mathrm{cm}$ plně naplněném vodou plavou v opačných směrech dvě stejné rybičky. Rybička má průřez $S = 5\,\mathrm{cm}^2$, Newtonův odporový koeficient $C = 0{,}2$ a plave rychlostí $v = 5\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ vůči vodě. Jak dlouho musí rybičky v akváriu plavat, aby ohřály vodu o 1 stupeň Celsia? Tepelné ztráty a biologické procesy v rybičkách zanedbejte.

Kubovi byla zima v bazénu.

Při plavbě akváriem musí rybičky překonávat odpor vody. Každá tedy koná práci W. Jelikož zanedbáváme veškeré tepelné ztráty (z akvária do vzduchu), biologické procesy v rybičkách, objem rybiček atp., veškerá rybičkami vykonaná práce se předá vodě ve formě tepla. Můžeme tedy psát, že

$$2W = Q\,.$$

V tomto případě je odporová síla celou dobu konstantní, a tak z klasické mechaniky víme, že práce, kterou rybička vykoná, je rovna $W = F_\mathrm{O} s$, kde F_O je Newtonova odporová síla prostředí, kterým se rybička pohybuje a s je dráha, po které tato síla působí. Pro Newtonovu odporovou sílu platí rovnice

$$F_\mathrm{O} = \frac{1}{2} C \varrho S v^2\,,$$

kde C je Newtonův odporový koeficient, S je průřez rybičky, ϱ je hustota prostředí (tedy vody) a v je její rychlost. Jelikož je rychlost rybičky celou dobu konstantní, pro dráhu platí vztah $s = vt$. Dosazením těchto rovnic do sebe můžeme psát

$$W = \frac{1}{2} C \varrho S v^3 t\,.$$

Nyní jsme si vyjádřili práci, kterou vykoná jedna rybička. Dále si vyjádřeme teplo Q. To můžeme vyjádřit z kalorimetrické rovnice jako

$$Q = mc\Delta T\,.$$

V této rovnici je c měrná tepelná kapacita vody a jedná se o úplně jinou veličinu než Newtonův koeficient odporu C. Hmotnost vody v akváriu můžeme spočítat jednoduše jako $m = V\varrho$. Akvárium je kulového tvaru a známe jeho vnitřní poloměr, objem tedy spočteme jako

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3\,.$$

Spojením výše zmíněných rovnic dostaneme, že

$$Q = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho c \Delta T$$

a dosazením do původní rovnice $2W = Q$

$$2 \cdot \frac{1}{2} C \varrho S v^3 t = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho c \Delta T\,.$$

Z této rovnice vyjádříme čas, jakožto jedinou neznámou

$$t \doteq \frac{4\pi r^3 c \Delta T}{3 C S v^3}\,.$$

Číselným dosazením dostaneme, že $t = 18{,}2\,\mathrm{h}$.

Jakub Sláma
slama@fykos.cz