

MIROSLAV HANZELKA A KOLEKTIV

# Fyzikální korespondenční seminář

XXIX. ročník – 2015/16



Copyright © Miroslav Hanzelka, 2017  
Copyright © MatfyzPress, nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty  
Univerzity Karlovy, 2017

ISBN 978-80-7378-337-2



# Obsah

<b>Předmluva</b>	<b>4</b>
<b>Zadání teoretických úloh</b>	<b>7</b>
<b>Řešení teoretických úloh</b>	<b>14</b>
<b>Zadání experimentálních úloh</b>	<b>77</b>
<b>Řešení experimentálních úloh</b>	<b>78</b>
<b>Seriál o termodynamice</b>	<b>126</b>
Kapitola 1: Termodynamika . . . . .	126
Kapitola 2: Termodynamické procesy . . . . .	131
Kapitola 3: Entropia . . . . .	139
Kapitola 4: Tepelné stroje . . . . .	144
Kapitola 5: Termodynamické potenciály . . . . .	151
Kapitola 6: Termodynamické potenciály a fotónový plyn . . . . .	157
<b>Řešení úloh ze seriálu</b>	<b>165</b>
<b>Akce FYKOSu</b>	<b>185</b>
Podzimní soustředění v Hřibčícím, Dolní Cerekvi . . . . .	185
Jarní soustředění v Lomech u Konstantinových lázní . . . . .	186
FYKOSí Fyziklání . . . . .	188
Fyziklání online . . . . .	190
Týden s aplikovanou fyzikou . . . . .	191
Den s experimentální fyzikou . . . . .	194
Cyklus přednášek pro středoškoláky . . . . .	195
<b>Pořadí řešitelů</b>	<b>197</b>



## Předmluva

Milá čtenářko, milý čtenáři!

Do rukou se Ti dostala publikace, která shrnuje veškerou činnost Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v jeho XXIX. ročníku, který probíhal ve školním roce 2015/16.

FYKOS je nejstarší a také největší fyzikálně zaměřenou korespondenční soutěží pro žáky středních škol v České republice. Je organizován studenty především Matematicko-fyzikální fakulty UK, ale i jiných fakult a škol v České republice i zahraničí, a podporován zaměstnanci Matematicko-fyzikální fakulty UK. Snaží se oslovit studenty se zájmem o fyziku, matematiku, techniku, zkrátka svět kolem nás. Naším cílem je rozvíjet talent a fyzikální myšlení, protože věříme, že člověk, který se umí zastavit a zamyslet (nejen nad fyzikálními problémy) a cítí touhu dobrat se řešení, se v životě vždy velmi dobře uplatní.

Během školního roku každý z řešitelů obdrží celkem sedm brožur, v nichž nalezneme šest sérií po osmi úlohách, z nichž dvě jsou „jednoduché“ (zaměřené především na první dva ročníky středních škol), jedna více problémová, jedna experimentální a jedna tzv. seriálová. Zbýlé tři úlohy se týkají libovolného fyzikálního tématu a tvoří jádro série. Zadávané úlohy však nejsou příliš podobné těm, které znáte z hodin fyziky. Vyžadují mnohdy poněkud hlubší úvahu, trochu důvtipu nebo něco z vyšší matematiky. Nezřídka je třeba zapátrat na internetu nebo v odborné literatuře. Účastníci si mohou vybrat, které úlohy nakonec vypracují a pošlou nám k opravení, ať už klasicky poštou, nebo přes internet. Opravující pak jejich řešení okomentují a vysvětlí případné chyby. To vše pošleme zpět řešitelům, včetně výsledkových listin, kde se každý může podívat, jak obstál v konkurenci svých vrstevníků. Na konci ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Mimo samotnou korespondenční soutěž pro řešitele připravujeme i další akce. Bezesporu nejpoblábnějšími jsou dvě týdenní soustředění v některém z malebných koutů české země. Jejich účastníci si užijí bohatý program, založený na dopoledních matematických nebo fyzikálních přednáškách a odpoledních aktivitách v přírodě. Nechybí ani prostor pro fyzikální experimenty a výlety na atraktivní místa.

Další akcí je Den s experimentální fyzikou, na kterém se spolupodílejí jednotlivé katedry MFF, ale i pracoviště Akademie věd ČR, resp. Ústav jaderného výzkumu v Řeži. Naším řešitelům tak umožňujeme navštívit velmi zajímavá výzkumná pracoviště, kde se dělá opravdová fyzika.

FYKOS umožňuje svým řešitelům podívat se také na špičkové zahraniční vědecké instituce formou poznávacího zájezdu, který se nazývá Týden s aplikovanou fyzikou a patří mezi nepravidelné FYKOSí akce.

Proběhl již jubilejní desátý ročník tradičního FYKOSího Fyziklání, soutěže pěticeletých týmů v řešení fyzikálních úloh na čas. Vyhrává tým s největším bodovým ziskem, přičemž rozhoduje jak správnost, tak i rychlost. V letošním roce se soutěže

zúčastnilo 105 družstev z ČR i ze Slovenska. To je pro nás skvělým důkazem, že se fyzika a přírodní vědy obecně mezi středoškolskými studenty stále těší popularitě.

FYKOSím Fyzikláním je inspirovaná internetová soutěž Fyziklání online (v zahraniční verzi Online Physics Brawl). V prosinci 2015 proběhl její pátý ročník a opět zaznamenala velký úspěch. Soutěž byla díky její elektronické formě otevřena všem zájemcům, nejenom středoškolákům, pro které je vytvořena především. Čtvrtého ročníku se zúčastnilo 178 středoškolských a 43 jiných týmů. To svědčí o narůstající popularitě soutěže, a nyní se již řadí mezi tradiční FYKOSí akce.

Kromě toho FYKOS organizuje i další menší akce, o nichž se dozvíte dále v této publikaci nebo na našich webových stránkách.

Tato ročenka obsahuje kompletní zadání i řešení jednotlivých úloh XXIX. ročníku FYKOSu. Zadání jsou záměrně oddělena od řešení, abychom podnítili čtenáře k samostatnému zamýšlení nad možným řešením problému. Příklady jsou navíc pro snazší orientaci rozděleny na teoretické a experimentální. Další částí knihy je Seriál o teorii chaosu, který je rovněž doplněn úlohami. Na konci publikace se nachází krátké ohlédnutí za letošními soustředěními a jinými akcemi a seznam nejlepších řešitelů ročníku.

Pokud Tě FYKOS zaujal natolik, že by ses chtěl stát řešitelem nebo se pouze na něco zeptat, ať už se to týká fyziky, či studia na MFF, neváhej a napiš nám.



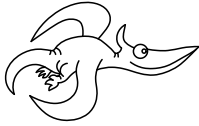
**FYKOS**  
**UK, Matematicko-fyzikální fakulta**  
**Ústav teoretické fyziky**  
**V Holešovičkách 2**  
**180 00 Praha 8**

www: <http://fykos.cz>  
 e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)

A jak vypadal XXIX. ročník očima statistiků? FYKOS řešilo 147 studentů z 102 středních škol z České a Slovenské republiky. Přehled škol podle úspěšnosti jejich studentů uvádíme níže. Pro zajímavost ještě dodejme, že organizátoři opravili celkem 2 253 došlých řešení a udělili 6 147 bodů.

Pořadí škol

Škola	Počet řešitelů	Průměr	Celkem
G Jana Keplera, Praha	4	109	<b>435</b>
G Havlíčkův Brod	2	166	<b>332</b>
G J. Ressela, Chrudim	3	80	<b>239</b>
Wichterlovo G, Ostrava	2	107	<b>213</b>
G Opatov, Praha	3	68	<b>205</b>
G, Dašická, Pardubice	3	60	<b>181</b>
Masarykovo G, Plzeň	2	85	<b>169</b>
G J. Škody, Přerov	5	33	<b>164</b>
G Golianova, Nitra	2	80	<b>159</b>
G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	34	<b>134</b>
G, Pelhřimov	1	129	<b>129</b>
G, Žamberk	1	128	<b>128</b>
G, Lovosice	1	126	<b>126</b>
G L. Svobodu, Humenné	1	123	<b>123</b>
G, Třeboň	1	122	<b>122</b>
G, Třinec	1	122	<b>122</b>
G, Havlíčkova, Český Těšín	2	54	<b>107</b>
G, Tanvald	1	107	<b>107</b>
G Námestovo	1	97	<b>97</b>
G P. de Coubertina, Tábor	2	48	<b>96</b>
G dr. A. Hrdličky, Humpolec	1	92	<b>92</b>
G Z. Wintra, Rakovník	2	46	<b>91</b>
G Uherské Hradiště	4	23	<b>90</b>
G B. Němcové, HK	2	43	<b>86</b>
G Kysucké Nové Mesto	1	86	<b>86</b>
G PdC, Piešťany	1	85	<b>85</b>
G, Komenského, Havířov	1	85	<b>85</b>
G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	2	42	<b>84</b>
G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	83	<b>83</b>
G, Nymburk	1	83	<b>83</b>
G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	2	41	<b>82</b>
Církevní G, Plzeň	1	81	<b>81</b>
G, Olomouc – Hejčín	3	27	<b>81</b>
G a SOŠZZE Vyškov	1	63	<b>63</b>
G O. Havlové, Ostrava	1	63	<b>63</b>
G F. Palackého, Val. Mez.	2	29	<b>58</b>
G, Benešov	1	58	<b>58</b>
G, Mostecká, Chomutov	1	52	<b>52</b>
G Nové Zámky	1	51	<b>51</b>
G, Brandýs n. L.	2	26	<b>51</b>
G, Dvůr Králové n. L.	1	51	<b>51</b>
G, Litomyšl	2	25	<b>50</b>



## Zadání teoretických úloh

### Úloha I.1 ... zahušťující Hofmann

2 body

Při elektrolýze vody v Hofmannově přístroji je elektrolytem roztok kyseliny sírové ve vodě. Hmotnost kyseliny v roztoku je prakticky konstantní, ale jak již samotný název napovídá, voda se postupně rozkládá na vodík a kyslík. Tím se zvyšuje zastoupení kyseliny v roztoku. Za jak dlouho stoupne hmotnostní zlomek kyseliny v roztoku na dvojnásobek, pokud roztokem prochází proud  $I = 1 \text{ A}$ , původní hmotnostní procento kyseliny bylo  $w_0 = 5\%$  a objem roztoku v nádobě byl původně  $V_0 = 21\text{ l}$  (řešení str. 14)

### Úloha I.2 ... výskok z vlaku

2 body

Ve vlaku, který se může pohybovat po kolejích bez tření, stojí 2 lidé, každý s hmotností  $m$ . Kdy dosáhne vlak větší rychlosti? Když oba vyskočí z vlaku naráz, nebo když budou vyskakovat z vlaku postupně? Člověk vyskočí z vlaku relativní rychlostí  $u$  (rychlost vyskakujícího člověka vůči vlaku po výskoku). (řešení str. 15)

### Úloha I.3 ... zlatá koule

3 body

Zlatá koule má na vzduchu hmotnost  $m_1 = 96,25 \text{ g}$ . Při ponoření do vody je vyvážena závažím o hmotnosti  $m_2 = 90,25 \text{ g}$ . Rozhodněte, zda je předmět dutý. Pokud ano, určete objem dutiny. Hustota zlata je  $\rho_{\text{Au}} = 19,25 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ , hustota vody  $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1,000 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ . Tíhové zrychlení je  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . (řešení str. 16)

### Úloha I.4 ... čočka smrti

4 body

Představte si, že kolem Slunce obíhá po kruhové dráze spojná čočka o průměru rovném slunečnímu průměru, jejíž ohnisko obíhá s dostatečnou přesností po oběžné dráze Země. Určete, jak moc čočka Zemi sežehne během jednoho svého oběhu (tj. kolik jí předá sluneční energie), bude-li obíhat kolem Slunce ve vzdálenosti Merkuru, a porovnejte tento výsledek se stavem, kdy bude obíhat ve vzdálenosti Venuše.

*Bonus:* Uvažujte navíc zatmění, které čočka při oběhu způsobí. (řešení str. 17)

### Úloha I.5 ... černobylská

4 body

Pokud by někdo snědl  $5 \mu\text{g}$  izotopu cesia  $^{137}\text{Cs}$ , za jak dlouho bude mít v těle pouze  $0,04\%$  původního množství částic tohoto izotopu? Předpokládejme, že cesium  $^{137}\text{Cs}$  má poločas rozpadu  $30,42 \text{ let}$  a jeho biologický poločas (tedy doba, za kterou se z těla vyloučí právě polovina původního množství látky) je přibližně

15 dní. Zjistěte také, kolik částic se do té doby stihne v těle radioaktivně rozpadnout. (řešení str. 24)

**Úloha I.P ... dekompresní nemoc** 5 bodů

Jistě jste někdy slyšeli (alespoň třeba ve filmu) o tom, že je nebezpečné se potápět ve velkých hloubkách a ihned poté cestovat letadlem. Pokud člověk toto udělá, hrozí mu tzv. dekompresní nemoc. Popište co nejpřesněji, jaké fyzikální procesy v lidském těle při této „nemoci“ probíhají (jak přesně obecné fyzikální zákony v tomto konkrétním případě působí) a proč jsou pro člověka nebezpečné. Je pro lidi nebezpečná i opačná posloupnost akcí, tedy cestování letadlem a následné potápění? (Při řešení můžete využívat všechny dostupné zdroje informací, ale následně musíte problém popsat vlastními slovy!) (řešení str. 25)

**Úloha II.1 ... potkan na ledě** 2 body

Na ledě běží potkan rychlostí  $v$ . Najednou se rozhodne, že se chce otočit o  $90^\circ$  tak, aby po otočení běžel pořád rychlostí o velikosti  $v$ , ale v novém směru. Jaký nejmenší čas na to potřebuje? Předpokládejte, že potkaní nožičky se mohou po ledě pohybovat nezávisle; koeficient tření mezi nožičkami a ledem je  $f$ . (řešení str. 27)

**Úloha II.2 ... numismatická** 2 body

Občas nastane stav, kdy je nominální hodnota mincí nižší, než jejich výrobní náklady. Mějme dvě mince vyrobené ze slitiny zlata a stříbra. První má průměr  $d_1 = 1$  cm, druhá  $d_2 = 2$  cm, obě mají tloušťku  $h = 2$  mm. Menší mince při ponoření do nádoby se rtutí klesne ke dnu, zatímco větší mince se začne vynořovat. Ponořili-li do rtuti obě mince, menší na větší, budou se v kapalině vznášet. Určete, kolik hmotnostních procent stříbra obsahuje větší mince, jestliže menší je celá zlatá. *Bonus* Jak se změní výsledek úlohy, pokud menší mince může obsahovat i stříbro? (řešení str. 28)

**Úloha II.3 ... fatální upuštění** 3 body

Z rakety obíhající po kružnici ve výšce  $h = 2000$  km nad Zemí hodíme směrem k Zemi nebohý šroubovák rychlostí  $v = 5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  vůči lodi. Za jak dlouho dopadne? (řešení str. 29)

**Úloha II.4 ... svítíme si na zrcadla** 5 bodů

Máme optickou soustavu tvořenou třemi polopropustnými zrcadly v jedné ose za sebou. Každé zrcadlo by samo o sobě polovinu dopadajícího záření propustilo a polovinu odrazilo. Jaká část světla celkově projde naší optickou soustavou? *Bonus* Vyřešte úlohu pro  $n$  zrcadel. (řešení str. 31)



**Úloha II.5 ... je šišaté, bude s ním veselo**

5 bodů

Mirkovi během zimních měsíců přišlo, že má doma na čtení příliš šero. Umyslel si proto, že nechá do zdi pokoje vybourat otvor pro další okno. Nejdřív se ale vydal do sklárství koupit okenní tabulku. Moc se mu líbila jedna kruhová, ale ještě než ji koupil, potřeboval prozkoumat, jestli není sklo příliš křivé (vypuklé). Položil tabulku na dokonale rovnou skleněnou desku na pultě obchodu a pozoroval duhové kroužky, které vznikly kolem středu tabulky interferencí kolmo dopadajícího bílého světla na vzduchové mezeře mezi skly. Mírek náhodně vybral dva sousední červené kroužky ( $\lambda \approx 700 \text{ nm}$ ) a pravítkem změřil jejich průměry  $d_k = (10,5 \pm 0,5) \text{ mm}$  a  $d_{k+1} = (13,0 \pm 0,5) \text{ mm}$ . Na základě těchto údajů už dokázal určit poloměr křivosti kruhového skla. Určete ho i vy a zamyslete se nad tím, s jakou přesností byl stanoven. (řešení str. 32)

**Úloha II.P ... rodičovská**

5 bodů

Představte si, že za vámi přijde inteligentní sedmileté dítě a zeptá se: „A co je to ta supravodivost?“ Co všechno byste ho museli naučit a co vše mu postupně vysvětlit, abyste mu tento jev teoreticky mohli objasnit bez užití „lží dětem“<sup>1</sup> na odborné úrovni? Řešení zkuste rozpracovat co nejvíce. (řešení str. 34)

**Úloha III.1 ... bláznivá rybička**

2 body

V akváriu ve tvaru koule s poloměrem  $r = 10 \text{ cm}$  plně naplněném vodou plavou v opačných směrech dvě stejné rybičky. Rybička má průřez  $S = 5 \text{ cm}^2$ , Newtonův odporový koeficient  $C = 0,2$  a plave rychlostí  $v = 5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  vůči vodě. Jak dlouho musí rybičky v akváriu plavat, aby ohřály vodu o 1 stupeň Celsia? Tepelné ztráty a biologické procesy v rybičkách zanedbejte. (řešení str. 36)

**Úloha III.2 ... alchymista začátečník**

2 body

Náš nejmenovaný mladý alchymista, řijeme mu Jirka N., se naučil používat elektrolýzu a měřit elektrochemický ekvivalent látky. Dokonce se mu podařilo naměřit u jednoho vzorku hodnotu elektrochemického ekvivalentu relativně přesně, a to  $A = (6,74 \pm 0,01) \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{C}^{-1}$ . Ale sám si neví rady, jak určit, o jakou látku se jedná. Poradte mu! (řešení str. 37)

**Úloha III.3 ... kdy vyskočí?**

3 body

Mějme nehmotnou pružinu o tuhosti  $k$ . Na jednom jejím konci je připevněno závaží o hmotnosti  $m$ , na jejím druhém konci je připevněno druhé závaží o hmotnosti  $M$ . Tuto sestavu položíme na vodorovnou desku tak, že závaží o hmotnosti  $M$  bude ležet na desce a závaží o hmotnosti  $m$  bude trčet na pružině přímo nad prvním závažím. Soustava je v rovnovážném stavu (tj. první závaží nekmitá) a délka pružiny

<sup>1</sup>Význam pojmu „lež dětem“ můžete najít v knížce Věda na Zeměploše; zjednodušeně se jedná o vysvětlení, které není úplně pravdivé, ale má pomoci danou věc alespoň zhruba pochopit, klasicky třeba představa atomů jako malinkatých, pevných kuliček

v tomto stavu je  $l$ . Určete jak moc musíme pružinu stlačit, aby po jejím uvolnění závaží o hmotnosti  $M$  nadskočilo. Uvažujte pouze vertikální pohyb.

(řešení str. 41)

### Úloha III.4 ... ubrzdi to

4 body

Po sebezprudším sešlápnutí brzdového pedálu nezačne auto brzdit okamžitě, ale brzdná síla po dobu  $t_r$  lineárně narůstá až na hodnotu  $F_m$ . Koeficient statického třetí mezi pneumatikou a vozovkou je  $f$ . Jakou maximální rychlostí se může tento automobil pohybovat, aby ani při nouzovém brzdění nedošlo ke smyku?

(řešení str. 42)

### Úloha III.5 ... sešit dezertér

5 bodů

Na lavici se sklonem  $\alpha = 5^\circ$  leží sešit formátu A4 o hmotnosti  $m$ , mezi lavicí a sešitem působí statická třecí síla s koeficientem  $f_0 = 0,52$ . Poté kdosi do lavice strčí a ta začne kmitat ve směru sklonu desky s frekvencí  $\nu = 10$  Hz a amplitudou  $A = 1$  mm.

- Určete, jakou dodatečnou silou musíme na sešit tlačit (kolmo na lavici), aby se sešit nezačal pohybovat.
- Určete, za jak dlouho sešit spadne z lavice, jestliže je na počátku jeho spodní hrana (ta kratší) na dolním okraji lavice. Dynamický koeficient tření je  $f$ , sešit považujte za tuhou desku.

(řešení str. 44)

### Úloha III.P ... Lukášova díra

5 bodů

Lukáš posiloval a povedlo se mu vyrobit černou díru o hmotnosti 1 kg. Protože nemá úplně v lásce kvantovou teorii pole na křivém pozadí, tak jeho díra nic nevyzařuje. Lukáš tuto díru upustí a ona začne kmitat uvnitř Země. Zkuste odhadnout, za jak dlouho se hmotnost díry zdvojnásobí. Je nebezpečné si doma pokoutně vyrábět černé díry?

(řešení str. 47)

### Úloha IV.1 ... kofolová

2 body

Mějme kofolu s energetickou hodnotou  $Q_k = 1\,360$  kJ·kg<sup>-1</sup> a teplotou  $t_k = 24$  °C a kofolu bez cukru s energetickou hodnotou  $Q_{bez} = 14,4$  kJ·kg<sup>-1</sup> a teplotou  $t_{bez} = 4$  °C. Pokud předpokládáme, že v jiných vlastnostech se kofoly od vody neliší, při jaké teplotě můžeme pít směs těchto kapalin tak, aby byla celková získaná energie nulová?

(řešení str. 48)

### Úloha IV.2 ... mozek v mikrovlnce

2 body

Jak daleko musí být člověk od BTS (základnové převodní stanice), aby působení jejího vysílání na mozek bylo srovnatelné s vysíláním mobilu přímo u hlavy? Předpokládejte, že BTS vysílá rovnoměrně do poloprostoru a má vysílací výkon 400 W. Vysílací výkon mobilu je 1 W.

(řešení str. 49)

**Úloha IV.3 ... šetřeme lesy**

3 body

Máme roli toaletního papíru o poloměru  $R = 8$  cm s dutou částí o poloměru  $r = 2$  cm. Každá vrstva namotaného papíru má tloušťku  $d = 200$   $\mu\text{m}$  a vrstvy na sebe dokonale přiléhají. O kolik útržků více v takovéto roli máme, pokud má jeden útržek délku  $l_1 = 9$  cm, než když má jeden útržek délku  $l_2 = 13$  cm? Jako součást řešení vyžadujeme odhad chyby použité aproximace.

*Bonus:* Vypočítejte přesnou délku spirály, kterou papír vytváří. (řešení str. 50)

**Úloha IV.4 ... bubliny znovu spojeny!**

4 body

Kolik nejméně stejně velkých mýdlových bublinek o poloměru  $r$  se musí spojit, aby vytvořily jednu bublinu, která má poloměr alespoň  $3r$ ? Uvažujte, že vzduch v bublinách má stále stejnou teplotu. (řešení str. 52)

**Úloha IV.5 ... skluzavka**

5 bodů

Na vodorovné ploše jsou rovnoběžně položeny dva stejné kvádry o hmotnosti  $m$  a délce  $l$ . Vzdálenost bližších stěn těchto kvádrů je  $2x_0$ . Mezi kvádry začneme lít vodu objemovým tokem  $Q$ . Na krajích těchto kvádrů jsou mantinely zabraňující odtékání vody z prostoru mezi kvádry. Statický koeficient tření mezi kvádrem a podložkou je  $f_0$  a dynamický  $f$ . Tření mezi kvádry a mantinely neuvažujte. Jaká je podmínka na  $f_0$ , aby se kvádry vůbec nerozpohybovaly? V případě, kdy je  $f_0$  dostatečně malé, vypočítejte závislost zrychlení kvádrů na jejich poloze a vzdálenost, ve které kvádry zastaví.

Veškerý pohyb vody považujeme za dostatečně pomalý, takže v ní nevznikají žádné vlny ani víry, nezahřívá se třením a ani sama nemá žádnou kinetickou energii. Protože je tedy i  $Q$  malé, můžete uvažovat, že přilévání další vody po rozpohybování kvádrů nemá na jejich pohyb vliv.

*Bonus:* Najděte podmínku pro překlopení kvádrů. (řešení str. 53)

**Úloha IV.P ... dietní věž**

5 bodů

Jak vysoká věž by se dala postavit z hliníkových plechovek od dietního nápoje kolového typu? (řešení str. 56)

**Úloha V.1 ... už to teče**

2 body

Tenký drát s odporem  $R = 100$  m $\Omega$  a délkou  $l = 1$  m, který je připojen ke zdroji stejnosměrného napětí  $U = 3$  V, obsahuje ve svém objemu  $N = 10^{22}$  volných elektronů, kterými přispívá k toku elektrického proudu. Určete, jak velkou průměrnou (přesněji střední) rychlostí se elektrony v drátu pohybuji. (řešení str. 60)

**Úloha V.2 ... mnohočásticová**

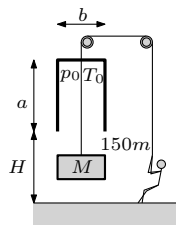
2 body

Mějme nádobu, která je pomyslně rozdělena na dvě shodné disjunktní oblasti A a B. V nádobě je  $n$  částic, z nichž se každá nachází s pravděpodobností 50 % v části A a s pravděpodobností 50 % v části B. Určete, s jakou pravděpodobností bude

v části A  $n_A = 0,6n$ , resp.  $n_A = 1 + n/2$  částic. Řešte pro  $n = 10$  a  $n = N_A$ , kde  $N_A \doteq 6 \cdot 10^{23}$  je Avogadrova konstanta. (řešení str. 60)

### Úloha V.3 ... egyptská brána

3 body



Ve starověkém Egyptu uměli vyrobit bránu, ale ještě neznali mříže, tak brány zavírali nilany (vápencovými kameny). Na obrázku vidíte 150 otroků o hmotnosti  $m = 60$  kg, kteří právě velmi pomalu otevírají bránu zavřenou nilanem o hmotnosti  $M = 8$  t. Nilan přesně (vzduchotěsně) pasuje do konstrukce nad bránou ve tvaru kvádra, která má vnitřní rozměry  $a = 3$  m,  $b = 0,5$  m a  $c = 3$  m. Uvnitř konstrukce je na počátku tlak  $p_0 = 100$  kPa a teplota  $T_0 = 300$  K a je umístěna ve výšce  $H = 3$  m.

Určete, jak vysoko jsou otroci schopni vlastní vahou nilan zdvihnout, jestliže se teplota vzduchu nemění. (řešení str. 62)

### Úloha V.4 ... bezpečná jízda

4 body

Máme auto, které se blíží kolmo ke zdi. Řidič, který v autě jede, by se ale chtěl přibližovat ke zdi bezpečně. Jaký by muselo mít auto průběh rychlosti, aby vzdálenost od auta ke zdi v každý okamžik odpovídala dráze, kterou by auto s okamžitou rychlostí v té chvíli urazilo za  $T = 2$  s? (řešení str. 64)

### Úloha V.5 ... Rolling Stones

5 bodů

Na nakloněné rovině stojí koule s nehomogenním rozložením hustoty. Známe úhel sklonu nakloněné roviny  $\alpha$ , poloměr koule  $R$  a vzdálenost  $t$  těžiště koule od jejího středu. Pokud si označíme střed koule S, bod dotyku koule s rovinou D a těžiště koule T, pak definujeme úhel  $\varphi_0 = \angle DST$  jako úhel před začátkem pohybu. Těžiště se navíc nachází v rovině určené úsečkou DS (normálou k rovině) a směrem z kopce dolů. V závislosti na těchto parametrech podrobně rozeberte, jak se bude dál vyvíjet pohybový stav koule. Koule na rovině neprokluzuje. (řešení str. 65)

### Úloha V.P ... metrová

5 bodů

Jak všichni víme, v jeskyních střední Evropy je docela zima, okolo  $4^\circ\text{C}$ . Proč je v metru docela teplo celý rok? Uvolňuje se více tepla z přítomných lidí, nebo spíše z technického zázemí? (řešení str. 67)

### Úloha VI.1 ... mám toho plnou hlavu

2 body

V roce 2015 byla udělena Nobelova cena za fyziku za experimentální prokázání oscilace neutrin. O neutrinech jste už jistě někdy slyšeli a možná víte, že s látkou interagují jen velmi slabě, a proto dokáží bez zpomalení proletět Zemí a jinými velkými objekty. Zkuste za pomoci literatury a internetových zdrojů určit, kolik neutrin se v jednom okamžiku nachází v průměrném člověku. Nezapomeňte citovat zdroje! (řešení str. 69)

**Úloha VI.2 ... dioptrická**

2 body

Pikošova kamarádka nosí brýle. Když si je nasadí, její oči se zdají menší. Je krátkozraká či dalekozraká? Svou odpověď dobře zdůvodněte. (řešení str. 70)

**Úloha VI.3 ... jedeme z kopce**

4 body

Autem o hmotnosti  $M$  jedeme nahoru do kopce a dolů ze stejného kopce se sklonem  $\alpha$  stejnou rychlostí  $v$  se zařazeným stejným převodovým stupněm, a tedy stejnými otáčkami motoru. Jaký je rozdíl tažného (do kopce) a brzdného (z kopce) výkonu motoru? (řešení str. 71)

**Úloha VI.4 ... fire in the hole**

4 body

Pro ohřev plasmatu ve fúzních zařízeních se používají svazky neutrálních částic. V takovém zařízení se nejprve urychlí ionty deuteria na vysokou energii a následně se přenosem náboje neutralizují, přičemž si zachovávají téměř původní rychlost. Na tokamaku COMPASS mají částice na výstupu ze svazku energii 40 keV a proud ve svazku těsně před neutralizací je 12 A. Jaká síla působí na generátor svazku? Jaký je jeho výkon? (řešení str. 72)

**Úloha VI.5 ... závody částic**

5 bodů

V homogenním magnetickém poli  $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ ,  $B_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$  obíhají po kružnicích v rovině  $xy$  dvě částice, elektron s hmotností  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  a nábojem  $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  a alfa částice s hmotností  $m_{\text{He}} = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  a nábojem  $2e$ . Poloměr trajektorie elektronu je  $r_e = 2 \text{ cm}$ , poloměr trajektorie alfa částice je  $r_{\text{He}} = 200 \text{ m}$ . V jednom okamžiku zapneme slabé homogenní elektrické pole  $\mathbf{E} = (0, 0, E_0)$ ,  $E_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ . Určete, jaké dráhy  $s_e$  a  $s_{\text{He}}$  urazí každá z částic za čas  $t = 1 \text{ s}$  od zapnutí elektrického pole. Předpokládejte, že částice jsou dostatečně vzdálené a nevyzařují. (řešení str. 73)

**Úloha VI.P ... i-jablko**

6 bodů

Vymyslete co nejvíce způsobů, jak sestavit zařízení, které pozná, jakým směrem je natočeno vůči směru tíhového zrychlení a tuto informaci nějakým způsobem převede na elektrický signál. (Zařízení na způsob akcelerometru v chytrých telefonech.) (řešení str. 74)



## Řešení teoretických úloh

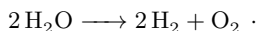
### Úloha I.1 ... zahušťující Hofmann

Při elektrolýze vody v Hofmannově přístroji je elektrolytem roztok kyseliny sírové ve vodě. Hmotnost kyseliny v roztoku je prakticky konstantní, ale jak již samotný název napovídá, voda se postupně rozkládá na vodík a kyslík. Tím se zvyšuje zastoupení kyseliny v roztoku. Za jak dlouho stoupne hmotnostní zlomek kyseliny v roztoku na dvojnásobek, pokud roztokem prochází proud  $I = 1 \text{ A}$ , původní hmotnostní procento kyseliny bylo  $w_0 = 5\%$  a objem roztoku v nádobě byl původně  $V_0 = 21$ ?

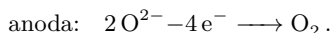
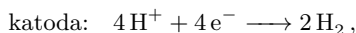
Ze všeho nejdříve si zjistíme, jaká je počáteční hmotnost celého roztoku. Tu spočítáme jednoduše jako

$$m_{\odot} = V_0 \rho_0,$$

kde  $\rho_0 = 1032 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  je hustota 5% roztoku kyseliny sírové, jejíž hodnotu můžeme najít na internetu.<sup>1</sup> Ze zadání víme, že množství kyseliny sírové se nemění. Aby tedy hmotnostní zlomek stoupl na dvojnásobek, musí hmotnost roztoku klesnout na polovinu, tj. na hodnotu  $m_{\odot}/2$ . Proto celý úbytek hmotnosti  $\Delta m = m_{\odot}/2$  musí být dán rozkladem vody podle rovnice



Jednotlivé děje na elektrodách můžeme zjednodušeně popsat jako



Z Faradayových zákonů elektrolýzy umíme spočítat množství vyloučené látky na elektrodě podle vztahu

$$m = \frac{ItM}{zF},$$

kde  $I$  je proud procházející roztokem,  $t$  čas, po který elektrolýza probíhá,  $M$  molární hmotnost vyloučené látky,  $z$  počet elementárních nábojů potřebných pro vyloučení jedné molekuly a  $F = 9,65 \cdot 10^4 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$  je Faradayova konstanta. Vyberme si jednu vylučovanou látku, třeba kyslík  $\text{O}_2$  (výpočet při výběru vodíku je analogický). Z poměru molárních hmotností  $M_{\text{O}} = 0,016 \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ ,  $M_{\text{H}_2\text{O}} = 0,018 \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$  vyplývá, že při rozložení vody o hmotnosti  $\Delta m$  se na anodě vyloučí kyslík o hmotnosti

$$\frac{16}{18} \Delta m = \frac{4}{9} V_0 \rho_0.$$

<sup>1</sup><http://chemicron.wz.cz/hustoty.html>

Dále si je ještě třeba uvědomit, že na vyloučení jedné molekuly kyslíku o molekulové hmotnosti  $M_{O_2} = 0,032 \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$  jsou třeba  $z = 4$  elektrony. Nyní si již z rovnice výše můžeme vyjádřit  $t$ , dosadit hodnoty všech veličin a vypočítat čas, po který musí elektrolýza probíhat

$$t = \frac{zFm_{O_2}}{IM_{O_2}} = \frac{4V_0q_0zF}{9IM_{O_2}} \doteq 128 \text{ dní}.$$

Všimněme si, že výsledný čas je velmi dlouhý, což je ovšem dáno velkým množstvím vody, které je nutné rozložit.

## Úloha 1.2 . . . výskok z vlaku

*Ve vlaku, který se může pohybovat po kolejích bez tření, stojí 2 lidé, každý s hmotností  $m$ . Kdy dosáhne vlak větší rychlosti? Když oba vyskočí z vlaku naráz, nebo když budou vyskakovat z vlaku postupně? Člověk vyskočí z vlaku relativní rychlostí  $u$  (rychlost vyskakujícího člověka vůči vlaku po výskoku).*

V zadání nie je uvedené, akým smerom vzhľadom na pohyb vlaku osoby vyskakujú. Keby osoby vyskakovali z vlaku kolmo na smer pohybu, tak to vlaku nedodá žiadnu rýchlosť, keďže vlak sa môže pohybovať len po kolajach. Teda ak by osoby vyskakovali pod nejakým uhlom, môžeme ich rýchlosť rozložiť na zložku kolmú (ktorá nebude mať vplyv na rýchlosť vlaku) a zložku rovnobežnú s pohybom. Najväčšiu zmenu rýchlosti logicky dostaneme, keď z vlaku budeme vyskakovať po smere alebo proti smeru jazdy. Ak by sme vyskakovali v smere jazdy, tak vlak budeme týmto výskokom spomaľovať, teda najvýhodnejšie pre nás je vyskakovať proti smeru jazdy.

Na začiatok si musíme uvedomiť, že v tomto prípade bude platiť zákon zachovania hybnosti (ZZH), ale nebude platiť zákon zachovania energie. Zákon zachovania hybnosti nám hovorí, že hybnosť sústavy hmotných bodov je konštantná.<sup>2</sup> V našom prípade

$$p = p_v + p_{o1} + p_{o2} = \text{konst}, \quad (1)$$

pričom  $p_v$  je hybnosť vlaku,  $p_{o1}$  a  $p_{o2}$  sú hybnosti ľudí. Na začiatku sa vlak s ľuďmi pohybuje rýchlosťou  $v_0$ , teda rovnicu (1) môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} Mv_0 + mv_0 + mv_0 &= \text{konst}, \\ v_0(M + 2m) &= \text{konst}. \end{aligned}$$

Najskôr si rozoberieme prípad, keď budú vyskakovať osoby postupne. Po výskoku prvej osoby bude mať vlak rýchlosť  $v_1$ . Osoba, ktorá vyskočí z vlaku bude mať rýchlosť  $v_1 - u$  (rýchlosť voči zemi). Teda podľa ZZH bude platiť

$$Mv_0 + 2mv_0 = v_1(M + m) + m(v_1 - u). \quad (2)$$

<sup>2</sup> Pokiaľ na telesá nepôsobia vonkajšie sily.

Následne nám však musí platit ZZH aj pre jednu osobu a vlak, avšak už sa vlak nepohybuje rýchlosťou  $v_0$ , ale  $v_1$

$$v_1(M + m) = Mv_2 + m(v_2 - u), \quad (3)$$

kde  $v_2$  je rýchlosť vlaku po skoku druhej osoby a druhá osoba bude mať po výskoku rýchlosť  $v_2 - u$ . Vidíme, že ľavá strana rovnice (3) je rovnaká ako časť rovnice (2), preto ju dosadíme. Dostávame

$$Mv_0 + 2mv_0 = Mv_2 + m(v_2 - u) + m(v_1 - u). \quad (4)$$

Ak obaja vyskočia naraz, tak môžeme zapísať ZZH pre túto situáciu ako

$$Mv_0 + 2mv_0 = v_3M + 2m(v_3 - u), \quad (5)$$

kde  $v_3$  je výsledná rýchlosť vlaku a osoby po výskoku budú mať rýchlosť voči zemi  $v_3 - u$ .

Vidíme, že ľavé strany rovníc (5) a (4) sa rovnajú, teda ich môžeme porovnať

$$\begin{aligned} v_3M + 2m(v_3 - u) &= Mv_2 + m(v_2 - u) + m(v_1 - u), \\ v_3(M + 2m) - 2mu &= v_2(M + m) - 2mu + mv_1, \\ v_3(M + 2m) &= v_2(M + m) + mv_1, \\ \frac{v_3}{v_2} &= \frac{M + m + m\frac{v_1}{v_2}}{M + 2m}. \end{aligned} \quad (6)$$

Z rovnice (2) je jednoduchou úvahou možné vidieť, že  $v_2 > v_1$ . Tým pádom celý zlomok na pravej strane rovnice (6) je menší ako 1. A z toho vyplýva

$$v_3 < v_2,$$

z čoho dostávame záver, že vlak dosiahne väčšiu rýchlosť, ak osoby vyskočia postupne.

### Úloha I.3 ... zlatá koule

Zlatá koule má na vzduchu hmotnosť  $m_1 = 96,25$  g. Při ponoření do vody je vyvážena závažím o hmotnosti  $m_2 = 90,25$  g. Rozhodněte, zda je předmět dutý. Pokud ano, určete objem dutiny. Hustota zlata je  $\rho_{Au} = 19,25$  g·cm<sup>-3</sup>, hustota vody  $\rho_{H_2O} = 1,000$  g·cm<sup>-3</sup>. Tíhové zrychlení je  $g = 9,81$  m·s<sup>-2</sup>.

Na kouli ve vodě působí tíhová síla  $F_G = m_1g$  směrem dolů a vztlaková síla dle Archimédova zákona  $F_v = \rho_{H_2O}V_kg$  směrem nahoru. Soustava se nepohybuje, velikost vektorového součtu těchto sil je tedy rovna velikosti tíhové síly působící na závaží  $m_2g$ . Z této rovnosti si můžeme vyjádřit objem koule  $V_k$ :

$$m_1g - \rho_{H_2O}V_kg = m_2g \quad \Rightarrow \quad V_k = \frac{m_1 - m_2}{\rho_{H_2O}} = 6 \text{ cm}^3.$$



Nyní si pro porovnání vypočítáme objem zlata v kouli

$$V_{\text{Au}} = \frac{m_1}{\rho_{\text{Au}}} = 5 \text{ cm}^3.$$

Vidíme, že celkový objem koule je větší než objem zlata v ní obsaženého, koule je tedy dutá a objem dutiny je  $V_d = V_k - V_{\text{Au}} = 1 \text{ cm}^3$ .

## Úloha I.4 ... čočka smrti

*Představte si, že kolem Slunce obíhá po kruhové dráze spojná čočka o průměru rovném slunečnímu průměru, jejíž ohnisko obíhá s dostatečnou přesností po oběžné dráze Země. Určete, jak moc čočka Zemi sežehne během jednoho svého oběhu (tj. kolik jí předá sluneční energie), bude-li obíhat kolem Slunce ve vzdálenosti Merkuru, a porovnejte tento výsledek se stavem, kdy bude obíhat ve vzdálenosti Venuše.*

*Bonus: Uvažujte navíc zatmění, které čočka při oběhu způsobí.*

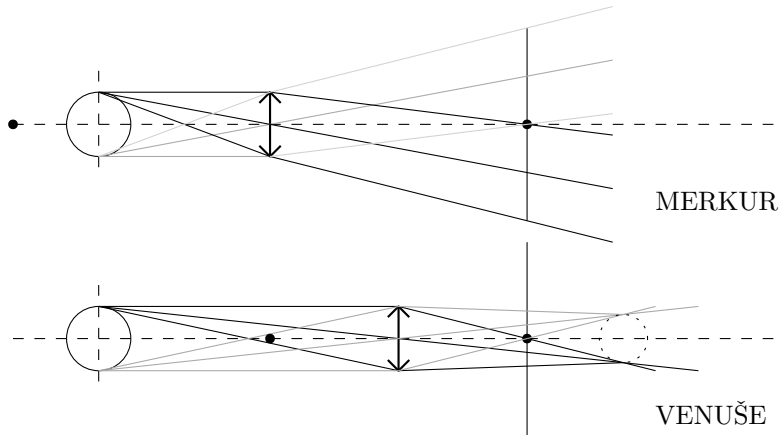
Pokud vás po přečtení úlohy napadlo, že ta čočka bude asi trochu hmotnější, nejste sami. Přes tyto drobné problémy se však přeneseme a gravitační působení čočky nebudeme uvažovat (je prostě velmi tenká).

V geometrii úlohy se vyskytuje jedna záludnost. Obvykle předpokládáme, že paprsky ze Slunce, které dopadají na planety, jsou rovnoběžné se spojnicí těles. Když si na Zemi vezmeme obyčejnou lupu, tak její vzdálenost od Slunce je řádově větší než její ohnisková vzdálenost, takže skutečně můžeme předpokládat, že paprsky přicházejí z nekonečna a zobrazí Slunce do bodu. V naší úloze jsou však vzdálenosti optických elementů srovnatelné s ohniskovou vzdáleností a zmíněné zjednodušení nelze použít.

Úloha nás tedy staví před následující problém: Bez přítomnosti čočky se Země pohybuje po kružnici, která leží na sféře s homogenním rozložením plošné hustoty energie slunečního záření (uvažujeme kruhové orbity, Slunce nechť vyzářuje homogenně izotropně). Umístěním čočky se rozložení energie v určitém výřezu sféry změní a naším úkolem je určit, jak. Také budeme muset vypočíst, kolik sluneční energie na čočku dopadá.

Na obrázku 1 je vyobrazen chod paprsků optickou soustavou. Všimněme si nejprve poměrů vzdáleností v soustavě. Tvrdíme, že rozměr Země je řádově menší, než je „obraz“ Slunce ve vzdálenosti 1 au, že rozměry Slunce jsou řádově menší než vzdálenost Země od Slunce (obojí lze snadno ověřit) a že ohnisková vzdálenost je blízká vzdálenostem Slunce – čočka, čočka – Země. Na základě těchto skutečností poté budeme budovat různé aproximace. Rovnou upozorňujeme, že necílíme na přesný výpočet, jenž by nezbytně vyžadoval buďto netriviální integrování nebo numerické modelování.

Zatím jsme mluvili velmi obecně, pusťme se do konkrétních výpočtů. Jako první si určíme, kolik energie (resp. jaký výkon) ze Slunce na čočku dopadá. Předpokládejme, že Slunce vyzářuje jen na jedné vlnové délce, čímž se zbavíme barevné vady čočky. Mohli bychom zářivý výkon Slunce určit ze Stefan-Boltzmannova zákona, ale protože bychom k tomu beztak museli vyhledávat teplotu Slunce, můžeme si



Obr. 1: Chod paprsků optickou soustavou. Černé body znázorňují ohniska. Šedé a černé význačné paprsky zobrazují póly Slunce a zároveň ohraničují kužel (trojúhelník), který nás bude později zajímat.

rovnou najít jeho zářivý výkon  $L_0 \doteq 4 \cdot 10^{26}$  W. Jelikož je čočka dostatečně vzdálená, můžeme tvrdit, že na ni dopadá výkon

$$L_1 = \frac{\pi r_1^2}{4\pi D_1^2} L_0, \quad (7)$$

kde  $r_1$  je poloměr čočky a  $D_1$  je vzdálenost čočky od Slunce. Zanedbali jsme přitom zakřivení sféry o poloměru  $D_1$  na ploše čočky, konkrétně tedy předpokládáme  $r_1 \ll D_1$ . Zlomek ve vzorci tedy vyjadřuje poměr obsahu čočky a plochy pomyslné sféry, na které čočka leží. (Jednoduše řečeno jsme použili aproximaci, kdy jsme kulový vrchlík nahradili kruhem.) Ztrátu energie při průchodu čočkou, která by vedla k jejímu zahřátí, zanedbáváme. Jelikož pro nás bude později pohodlnější pracovat s hustotou výkonu, zavedeme si ještě hustotu výkonu slunečního záření ve vzdálenosti čočky

$$\mathcal{L}_1 = \frac{L_0}{4\pi D_1^2}.$$

Dále se podíváme na oběh čočky. Předpokládejme, že tělesa obíhají nejen po kruhové trajektorii, ale navíc v jedné rovině – rovině ekliptiky. Oběhy těles ve sluneční soustavě podléhají Keplerovým zákonům. Přírozená tělesa obíhají obvykle v jednom směru, ale čočka je objekt umělý, může tedy obíhat v obou směrech. Úhlové rychlosti zjistíme z Keplerova zákona

$$GM_s = \omega^2 D_1^3. \quad (8)$$

V zadání je napsáno, že nás zajímá energie předaná během jednoho oběhu čočky. Jelikož čočka obíhá podle rovnice (8) rychleji než Země, nastanou tedy situace

(v závislosti na směru oběhu), kdy čočka potká Zemi jednou, dvakrát nebo vůbec. Nejlepší způsob, jak zadání interpretovat, je středovat předanou energii přes velký počet oběhů. Obíhá-li Země s periodou  $T_Z$  a čočka s periodou  $T_1$ , potom se setkají za

$$T = \frac{1}{\frac{1}{T_1} \pm \frac{1}{T_Z}},$$

kde  $+$  je pro oběh v opačném směru a  $-$  pro oběh v souhlasném směru. Počet střetnutí ohniska čočky se Zemí potom bude

$$N = T_1 \left( \frac{1}{T_1} \pm \frac{1}{T_Z} \right) = \frac{(\omega_1 \pm \omega_Z)}{\omega_1}. \quad (9)$$

Tímto koeficientem později budeme násobit energii předanou při jednom střetnutí. To pro výpočet  $N$  považujeme za instantní. Nadále budeme používat označení  $\omega_1 \pm \omega_Z = \Delta\omega$ .

Už jsme se několikrát zmínili o energii, kterou má čočka Zemi předat, ale stále jsme se nezmínili o tom, jak přesně se bude energie k Zemi šířit. Už jdeme na to. Podívejme se znovu na obrázek 1. V případě polohy čočky u Venuše se zobrazí Slunce jako převrácený zmenšený obraz za Zemí, v případě Merkuru skutečný obraz neexistuje. Nás však nezajímá, kam se Slunce zobrazí, ale jak procházejí paprsky okolo Země. Zcela obecný postup by vypadal následovně: Na základě geometrické optiky bychom zjistili, jak se změní směr paprsků při průchodu čočkou; jakmile bychom věděli, jak je rozložená intenzita slunečních paprsků vycházejících z jednoho bodu, provedli bychom integraci přes všechny body na Slunci a tím bychom získali celkové rozložení hustoty energie v oblasti, kterou Země prochází.

Nyní se pokusíme postupovat tak, abychom se vyhnuli obtížnější integraci a zároveň zachovali rozumnou přesnost výpočtu. Slunce nahradíme plošným kruhovým zdrojem, který bude vyzařovat rovnoměrně směrem k Zemi, neboť vznikl zploštěným polokoule (projekce do roviny odstraní vlastnosti kosinového zářiče). K tomu dále potřebujeme paraxiální aproximaci (paprsky se šíří pod malými úhly vůči optické ose), která dodá smysl uvedenému zploštění a zajistí, že oblasti uzavřené na obrázku 1 paprsky vycházejícími z jednoho bodu a dopadajícími na čočku budou kuželové. Potom bude rozložení zářivé energie na kolmém řezu kuželem homogenní. Na tomto základu postavíme tvrzení, že „obraz“ (není ve skutečnosti ostrý) ve vzdálenosti Země se bude lineárně posouvat spolu s bodem, ze kterého paprsky přicházejí.

Na celou situaci se stále díváme z boku, ale to nám nevádí, protože víme, že rozložení energie u Země je symetrické podél optické osy. Na obrázku tedy pracujeme s úsečkami, ale ve skutečnosti se jedná o malé kroužky. Abychom určili velikost takového kroužku, budeme už muset využít geometrickou optiku, omezíme se ale na zobrazovací rovnici a podobnost trojúhelníků.

Označme si vzdálenost čočky a Země  $D_{1Z}$ , potom podle zobrazovací rovnice

$$a' = \frac{D_{1Z}D_1}{D_1 - D_{1Z}},$$

kde  $a'$  je vzdálenost obrazu od čočky. Velikost obrazu (poloměru  $r_1$ ) je

$$|y| = \frac{r_1 D_{1Z}}{D_1 - D_{1Z}}.$$

Jelikož šířka světelného kužele vycházející z jednoho bodového zdroje na povrchu Slunce lineárně klesá směrem od čočky k Zemi, využijeme této linearitu pro výpočet průměru řezu kužele u Země

$$d' = \frac{2D_{1Z}r_1}{D_1}. \quad (10)$$

Všimněte si, že pro případ Merkuru bude  $|y'| > r_1$ , sluneční záření se tedy po průchodu čočkou rozptýlí.

Pokud vám není zřejmé, proč by výše zmíněné lineární vlastnosti měly platit, stačí si paraxiální geometrickou optiku přepsat do maticového formalismu (tak také autor tohoto textu postupoval). Paprsek vyslaný ze Slunce z elementární plošky ve vzdálenosti  $r$  od optické osy pod úhlem  $\alpha$  popíšeme vektorem

$$\begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix}$$

a do polohy v oblasti Země ho zobrazí matice přenosu<sup>3</sup>

$$\begin{pmatrix} 0 & -D_{1Z} \\ 1/D_{1Z} & 1 - D_1/D_{1Z} \end{pmatrix}.$$

Když z bodu  $r = r_1$ , tedy z "krajního" bodu Slunce, vyšleme paprsky na krajní body čočky, tedy pod úhly

$$\alpha_1 = \frac{r_1 + r}{D_1}$$

pro dolní bod čočky v obrázku 1 a<sup>4</sup>

$$\alpha_2 = -\frac{r_1 - r}{D_1}$$

pro horní bod, dostaneme pro výsledné vzdálenosti paprsků od optické osy hodnoty

$$\begin{aligned} r'_1 &= -\frac{2r_1 D_{1Z}}{D_1}, \\ r'_2 &= 0. \end{aligned}$$

Vidíme, že jsme ve shodě s (10) a navíc si dosazením obecného  $r$  můžeme ověřit, že nezávisle na počátečním bodu bude poloměr fokusovaného kruhu vždy  $r_1 D_{1Z}/D_1$  a že se jeho střed posouvá lineárně s  $r$ . Navíc si můžeme povšimnout, že z každého bodu na Slunci prochází alespoň jeden paprsek přesně polohou Země; zde bude hustota výkonu nejvyšší.

---

<sup>3</sup>Více o maticové optice naleznete v řešení 5. úlohy V. série 28. ročníku nebo v učebnicích optiky.

<sup>4</sup>Pozor na znaménkovou konvenci, vždy měříme od paprsku směrem k ose.

Každý kruh (řez světelného kužele na úrovni Země) má v každém bodě své plochy hustotu výkonu

$$\mathcal{L}_2 = \frac{dS}{2\pi r_1^2} \frac{L_0}{4\pi D_1^2} \left( \frac{2r_1}{r'_2 - r'_1} \right)^2 = \frac{dS}{\pi r_1^2} \frac{L_0}{8\pi D_1^2} \frac{D_1^2}{D_{1Z}^2},$$

kde  $dS$  je velikost elementární plošky na Slunci,  $\pi r_1^2$  je plocha slunečního disku (a tedy i plocha čocky) a faktor  $1/2$  zohledňuje fakt, že ploché Slunce má dvě strany. Výraz v závorce je ve čtverci, nebo hustota výkonu je úměrná ploše promítnutého kruhu – jinými slovy, řez světelného kužele se při vzdalování od čocky směrem k Zemi zmenšuje a proto hustota výkonu na tomto řezu narůstá. Speciálně na optické ose, kde přispívají všechny plošky, bude hustota výkonu

$$\frac{\pi r_1^2}{dS} \mathcal{L}_2.$$

Jak nyní ošidíme integraci těchto kruhů s homogenním rozložením intenzity záření? Již jsme si řekli, že v rovině, na kterou promítáme paprsky, je rozložení hustoty výkonu radiálně symetrické. Dále víme, že žádný paprsek nedopadne dále od optické osy než  $d'$  a tedy že množina středů  $\mathcal{M}$  zmíněných kruhů má poloměr  $r' = d'/2$ . Když nyní kolem Země vytvoříme pomyslný kruh o poloměru  $r'$ , bude nám jeho překryv  $A(\varrho)$  s množinou  $\mathcal{M}$  udávat poměr hustoty výkonu vůči poloze  $\varrho = 0$ , přičemž  $\varrho$  je parametr vyjadřující vzdálenost Země od optické osy. Hustota výkonu v místě Země bude v závislosti na  $\varrho$  tedy dána jako

$$\mathcal{L}(\varrho) = \frac{A(\varrho)}{\pi r'^2} \frac{L_0}{8\pi D_1^2} \frac{D_1^2}{D_{1Z}^2} = L_0 \frac{A(\varrho)}{8\pi^2 r_1^2} \frac{D_1^2}{D_{1Z}^4}.$$

Nyní potřebujeme určit tvar funkce  $A(\varrho)$ . Pro případ kruhů se stejnými poloměry je její tvar ještě relativně jednoduchý:

$$A(\varrho) = 2r'^2 \arccos\left(\frac{\varrho}{2r'}\right) - \frac{\varrho}{2} \sqrt{4r'^2 - \varrho^2}.$$

Jelikož jsme si slíbili, že nebudeme provádět integraci složitějších funkcí, provedeme následující aproximaci: nahradíme kruhy čtverci o stejné ploše, tedy čtverci se stranou  $a = r'\sqrt{\pi}$ . Vlastně to znamená, že jsme Slunce nahradili čtvercem, ale není důvod se tím znepokojovat.<sup>5</sup>

Nyní tedy máme lineární překryvovou funkci

$$A(\varrho) = \pi r'^2 - \varrho r' \sqrt{\pi}$$

a odpovídající hustotu výkonu (po algebraických úpravách)

$$\mathcal{L} = L_0 \left( \frac{1}{8\pi D_{1Z}^2} - \varrho \frac{D_1}{8\pi^{3/2} r_1 D_{1Z}^3} \right)$$

<sup>5</sup>Lze ověřit, že se pro účely následující integrace dopouštíme chyby menší než 5%.

Energii předanou Zemi získáme jako integrál z  $2\mathcal{L}$  podle  $\varrho$  v mezích  $\varrho \in [0, a]$ , který vydělíme rychlostí Země vůči čočce  $v = \Delta\omega(D_1 + D_{1Z})$  a vynásobíme plochou zemského disku  $\pi r_Z^2$ . Tedy

$$E_1 = \frac{2\pi r_Z^2}{\Delta\omega(D_1 + D_{1Z})} \int_0^{\sqrt{\pi}r_1 D_{1Z}/D_1} \mathcal{L}(\varrho) d\varrho = \pi r_Z^2 L_0 \frac{r_1}{8\sqrt{\pi}\Delta\omega D_1 D_{1Z} (D_1 + D_{1Z})}. \quad (11)$$

Energii ještě potřebujeme vystředovat, tedy vynásobit koeficientem  $N$  z (9). Dostaneme

$$\bar{E}_1 = E_1 \frac{\Delta\omega}{\omega_1} = \pi r_Z^2 L_0 \frac{r_1}{8\sqrt{\pi}\omega_1 D_1 D_{1Z} (D_1 + D_{1Z})}.$$

Nyní rovnou vyřešíme i bonusovou část, neboť bez ní zanedbáváme důležitou skutečnost, že po určité době je slunce v pouze částečném zákrytu a čočka tedy vrhá polostín. Na čočku zde budeme pohlížet jako na stínítko, neboť energii  $E_1$  jsme již spočetli a paprsky procházející čočkou nás tedy nezajímají. Stále jsme v paraxiální aproximaci, úhlová velikost oblasti polostínu (viz obr. 2) je

$$\varphi_s = \frac{2r_1 D_{1Z}}{D_1(D_1 + D_{1Z})}.$$

Dokud je Slunce odkryté, dopadá na zemi výkon o hustotě

$$\mathcal{L}_3 = \frac{L_0}{4\pi(D_1 + D_{1Z})^2}.$$

Nyní budeme řešit podobný integrál jako (11) s tím rozdílem, že integrační proměnou zde bude úhel  $\varphi$ , integrovat budeme v intervalu  $[0, \varphi_s]$  a dělit budeme úhlovou rychlostí  $\Delta\omega$ , přičemž ve zmíněném intervalu klesne hustota výkonu lineárně z  $\mathcal{L}_3$  na nula. Používáme tedy hrubší aproximaci než předtím, kdy kruh aproximujeme čtvercem o straně rovné dvojnásobku poloměru kruhu<sup>6</sup>. Integrujeme tedy hustotu ve tvaru

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{L_0}{4\pi(D_1 + D_{1Z})^2} - \varphi \frac{D_1 L_0}{8\pi r_1 D_{1Z} (D_1 + D_{1Z})}.$$

Hledaná energie je

$$E_2 = \frac{2\pi r_Z^2}{\Delta\omega} \int_0^{\frac{2r_1 D_{1Z}}{D_1(D_1 + D_{1Z})}} \mathcal{L}(\varphi) d\varphi = \pi r_Z^2 L_0 \frac{r_1 D_{1Z}}{2\pi \Delta\omega D_1 (D_1 + D_{1Z})^3},$$

po vystředování

$$\bar{E}_2 = E_2 \frac{\Delta\omega}{\omega_1} = \pi r_Z^2 L_0 \frac{r_1 D_{1Z}}{2\pi \omega_1 D_1 (D_1 + D_{1Z})^3}.$$

---

<sup>6</sup>Překryvová funkce  $A(\varrho)$ , resp.  $A(\varphi)$ , by zde měla podstatně složitější tvar, neboť zdánlivá velikost čočky ze Země je jiná než velikost Slunce, jedná se tedy o překryv dvou kruhů s různými poloměry. Numericky jsme spočetli, že výsledná hodnota integrálu touto aproximací vzroste o méně než 20%.

Celková energie, která v průměru dopadne na Zemi v oblasti ovlivněné čočkou, je

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \frac{L_0 r_Z^2 r_1}{\omega_1 (D_1 + D_{1Z})} \left( \frac{D_{1Z}}{2D_1(D_1 + D_{1Z})^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{8D_1 D_{1Z}} \right).$$

Relativní nárůst dopadené sluneční energie<sup>7</sup> je tedy

$$\varepsilon = \frac{\bar{E}}{E_0} = \frac{D_1}{D_1 + 2D_{1Z}} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{(D_1 + D_{1Z})^2}{(2D_{1Z} + D_1)D_{1Z}}, \quad (12)$$

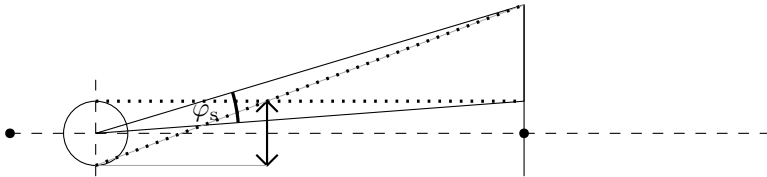
kde

$$\bar{E}_0 = \frac{L_0 r_Z^2 r_1}{2\omega_1 (D_1 + D_{1Z})^3} \left( \frac{2D_{1Z}}{D_1} + 1 \right)$$

je průměrná dopadená energie bez přítomnosti čočky na celém intervalu od začátku první oblasti polostínu do konce druhé oblasti polostínu. Pokud výraz (12) vyjádříme v astronomických jednotkách, můžeme psát  $D_{1Z} = 1 - D_1$  a

$$\varepsilon(D_1) = \frac{D_1}{2 - D_1} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{(2 - D_1)(1 - D_1)}. \quad (13)$$

Nás zajímá hodnota této funkce pro  $D_1 = 0,387$  a  $D_1 = 0,723$ , což jsou vzdálenosti Merkuru a Venuše od Slunce v astronomických jednotkách (hlavní poloosy, excentricitu jsme zanedbali). Dostaneme  $\varepsilon_M \doteq 0,69$  a  $\varepsilon_V \doteq 1,8$ . Vidíme tedy, že pokud čočku umístíme do vzdálenosti Merkuru, tak Zemi příliš nesežehneme, naopak ji ještě o část sluneční energie připravíme.



Obr. 2: Znázornění úhlu  $\varphi_s$ , ve kterém je při pohledu ze Země Slunce částečně zakryto čočkou (ekvatoriální rovina).

Několik poznámek na závěr: Během řešení jsme prováděli různé aproximace a je zřejmé, že naše výsledky nebudou zcela odpovídat skutečnosti. Obzvláště pro malá  $D_1$  či naopak  $D_1$  blízká vzdálenosti Země od Slunce selže paraxiální aproximace, pro  $D_1 = 1$  výraz (13) dokonce diverguje. Dále poznamenejme, že pokud bychom počítali relativní hodnoty energie vzhledem k celé dráze Země, byly by pro velký interval  $D_1$  rovny téměř jedné, neboť úhel, ve kterém čočka Zemi ovlivňuje, považujeme za malý. Také si snadno všimneme, že naše výpočty selžou pro  $\Delta\omega = 0$ . To nás ale nemusí příliš trápit, protože to zároveň podle (8) implikuje, že by čočka obíhala po oběžné dráze Země.

<sup>7</sup>Zanedbáváme albedo apod.

## Úloha 1.5 ... černobylská

Pokud by někdo snědl 5  $\mu\text{g}$  izotopu cesia  $^{137}\text{Cs}$ , za jak dlouho bude mít v těle pouze 0,04% původního množství částic tohoto izotopu? Předpokládejme, že cesium  $^{137}\text{Cs}$  má poločas rozpadu 30,42 let a jeho biologický poločas (tedy doba, za kterou se z těla vyloučí právě polovina původního množství látky) je přibližně 15 dní. Zjistěte také, kolik částic se do té doby stihne v těle radioaktivně rozpadnout.

Poznáme rovnici rádioaktivního rozpadu a zadání nám napovídá, že bude asi popisovat aj biologické vylučování

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = N_0 \cdot \exp\left(-\frac{t \ln 2}{T}\right),$$

kde  $N_0$  je počet částic v čase  $t = 0$  a  $T$  je poločas – či už rozpadu alebo biologického vylučovania. Potom je rýchlosť vylučovania (a rovnako aktivita rozpadu) popísaná vzťahom

$$\frac{dN}{dt} = -N(t) \frac{\ln 2}{T}. \quad (14)$$

Keďže sa látka aj rádioaktívne rozpadá, aj biologicky vylučuje. Celkovú rýchlosť odstraňovania získame sčítaním týchto rýchlostí.

$$\frac{dN}{dt} = -N(t) \left( \frac{1}{T_R} + \frac{1}{T_B} \right) \ln 2 = -N(t) \frac{\ln 2}{T_E},$$

kde  $T_B$  je biologický poločas,  $T_R$  je poločas rozpadu a  $T_E$  je efektívny poločas rozpadu. Z tohto môžeme určiť, ako bude množstvo látky v tele klesať, keďže vidíme, že rovnica vyzerá rovnako ako (14). Jej riešenie bude

$$N(t) = N_0 \cdot \exp\left(-\frac{t \ln 2}{T_E}\right) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_E}}. \quad (15)$$

Potom pre čas  $\tau$ , keď  $N/N_0 = 4 \cdot 10^{-4}$ , dostaneme

$$\tau = -\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) \cdot \frac{T_R T_B}{(T_R + T_B) \ln 2} \doteq 169 \text{ dní}.$$

Pre druhú časť úlohy sa stačí pozrieť na rovnice (14) a (15). Z prvej vieme podiel částic, ktorý sa rozpadne za element času, z druhej zasa, koľko částic v tele v každom čase je. Potom vidíme, že počet částic, ktoré sa rozpadnú za čas  $dt$ , je

$$dN_R = N_0 \cdot \frac{\ln 2}{T_R} \cdot \exp\left(-\frac{t(T_R + T_B) \ln 2}{T_R T_B}\right) dt,$$

kde sme zmenili – na +, keďže nás zaujíma počet rozpadnutých částic, teda ich úbytok. Toto už len zintegrujeme po čas  $\tau$

$$N_R = N_0 \cdot \frac{T_B}{T_R + T_B} \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau(T_R + T_B) \ln 2}{T_R T_B}\right) \right].$$



Exponenciála sa samozrejme nezmenila, a teda za ňu dosadíme podľa (15) pomer  $N/N_0$  a vyjadríme  $N_0$  pomerom celkovej hmotnosti a hmotnosti jedného atómu  $A_r m_u$ , kde  $A_r = 137$  je relatívna atómová hmotnosť izotopu cézia  $^{137}\text{Cs}$  a  $m_u \doteq 1,66 \cdot 10^{-27}$  kg je atómová hmotnostná jednotka.

$$N_R = \frac{m}{A_r m_u} \cdot \frac{T_B}{T_R + T_B} \cdot \left(1 - \frac{N}{N_0}\right).$$

Za tento čas sa teda v tele rozpadne  $N_R \doteq 3,0 \cdot 10^{13}$  častíc. Celkovo, teda do úplného odstránenia, keď  $N \ll N_0$  (v limite  $t \rightarrow \infty$ ), sa rozpadne len  $T_B/(T_R + T_B) \doteq 0,1\%$  látky.

## Úloha I.P . . . dekompresní nemoc

*Jistě jste někdy slyšeli (alespoň třeba ve filmu) o tom, že je nebezpečné se potápet ve velkých hloubkách a ihned poté cestovat letadlem. Pokud člověk toto udělá, hrozí mu tzv. dekompresní nemoc. Popište co nejpřesněji, jaké fyzikální procesy v lidském těle při této „nemoci“ probíhají (jak přesně obecné fyzikální zákony v tomto konkrétním případě působí) a proč jsou pro člověka nebezpečné. Je pro lidi nebezpečná i opačná poslušnost akcí, tedy cestování letadlem a následné potápění? (Při řešení můžete využívat všechny dostupné zdroje informací, ale následně musíte problém popsat vlastními slovy!)*

Kesonová (taktéž dekompresní) nemoc není nemoc v pravém slova smyslu, jedná se spíš o poškození lidského těla vlivem náhlého poklesu tlaku. K dobrému pochopení, co se v lidském těle při této nemoci děje, si nejprve musíme popsat, jak funguje rozpouštění plynů v kapalinách.

### Henryho zákon

Henryho zákon popisuje závislost koncentrace rozpuštěného plynu v kapalině na tlaku. Vzorcem jde vyjádřit takto:

$$c = \alpha(t)P, \quad (16)$$

kde  $c$  je molární zlomek plynu v kapalině,  $\alpha$  je absorpční koeficient pro danou látku a daný plyn, který je obecně závislý na teplotě kapaliny  $t$ , a  $P$  označuje tlak v kapalině. My se omezíme na případ konstantní teploty, tedy  $\alpha(t)$  pro nás bude konstanta, kterou budeme dál značit jen  $\alpha$ .

### Vznik dekompresní nemoci

Nyní se můžeme začít zabývat tím, co se děje v lidském těle při potápění a následném vynořování. Před ponořením je v krevním řečišti a tkáňových kapalinách určitý tlak, označme ho  $P_0$  a určitá koncentrace atmosférických plynů  $c_0$  (zejména dusíku  $\text{N}_2$ , který je v krevním řečišti zastoupen v nevázané podobě nejvíce ze všech plynů). Při ponořování pod vodu roste tlak, který na potápečce působí, roste tedy i tlak v jeho krevním řečišti a tkáňových mocích, který vystoupá až na hodnotu  $P_1$ . Jelikož je člověk teplokrevný tvor, bude jeho teplota stále stejná (nebo

jen zanedbatelně jiná). Co se bude v těle potápěče dít s koncentrací rozpuštěných plynů? Odpověď je jednoduchá, stačí se podívat na vzorec (16). Absorpční koeficient  $\alpha$  je stále stejný, tlak vzrostl, takže musí vzrůst i koncentrace rozpuštěných plynů. Tento proces probíhá postupně, jak potápěč dýchá, postupně se mu v krvi a tkáňových mocích rozpouští více plynů. Co se nyní stane, když se potápěč náhle vynoří? Tlak v jeho těle se vrátí zpět na hodnotu  $P_0$  a aby byl zachován Henryho zákon, musí se i koncentrace rozpuštěných plynů v jeho těle vrátit na hodnotu  $c_0$ , tento proces ovšem probíhá velmi rychle. Část rozpuštěných plynů v potápěčově těle už dále nemůže zůstat rozpuštěna, místo toho se z tělních tekutin uvolní ve formě plynových bublinek. Tyto bublinky mají velmi negativní vliv na fungování lidského těla, zejména na nervovou a oběhovou soustavu.

Náš potápěč bude cítit bolesti svalů a kloubů, při výraznějším poklesu tlaku (a tedy větším množstvím uvolněného plynu) se dostaví svalové obrny a selhávání smyslových vjemů, nakonec i ztráta vědomí. Asi největším rizikem je vzduchová embolie (tj. zablokování cév vzduchovými bublinami), která může vyústit až v potápěčovu smrt. Náš potápěč trpí dekompresní nemocí.

#### *Odhad množství uvolněného dusíku*

Nyní si zkusíme jen přibližně vypočítat, jaký objem dusíku se v potápěčově těle uvolní, pokud se rychle vynoří z hloubky 50 m pod vodní hladinou. Děláme jen řádový odhad, proto místo s absorpčním koeficientem pro lidskou krev budeme počítat s absorpčním koeficientem pro dvojici dusík  $N_2$  a voda, který je přibližně  $\alpha = 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ MPa}^{-1}$ , což lze najít v tabulkách. Henryho zákon si můžeme upravit do tvaru

$$\Delta c = \Delta P \cdot \alpha. \quad (17)$$

Rozdíl tlaku v hloubce 50 m pod vodní hladinou a atmosférického tlaku můžeme odhadnout na  $h_{gg} = 0,5 \text{ MPa}$ . Když tato čísla dosadíme do vzorce (17) dostáváme, že rozdíl molárních zlomků dusíku v potápěčově těle je přibližně  $\Delta c = 9 \cdot 10^{-5}$ . Když si uvědomíme, že v lidském těle je přibližně 5 l krve, tedy přibližně 280 molů krve (hustotu i molární hmotnost krve aproximujeme hustotou a molární hmotností vody, která je přibližně  $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ). Nakonec tedy dostáváme, že se v potápěčově těle uvolní přibližně  $280 \cdot 9 \cdot 10^{-5} = 0,025$  molů dusíku, který ovšem při atmosférickém tlaku zaujme objem  $V = 24 \cdot 0,025 \text{ l} = 0,6 \text{ l}$ , kde jsme využili znalost toho, že ideální plyn při atmosférickém tlaku zaujímá objem přibližně 24 l.

Vidíme tedy, že objem uvolněného dusíku v potápěčově těle zdaleka není zanedbatelný.

#### *Ochrana proti dekompresní nemoci*

Náš potápěč se proti dekompresní nemoci mohl ochránit, kdyby se z velké hloubky (tedy z oblasti velkého tlaku) vynořoval postupně a dělal v průběhu vynořování bezpečnostní zastávky. V takovém případě by totiž pokles tlaku v jeho těle nebyl tolik skokový, koncentrace rozpuštěných plynů v jeho těle by se snižovala postupně a přebytečný plyn by se mohl přes jeho dýchací soustavu odvést pryč z těla.

Dekompresní nemoc nenastává jen u náhlého vynořování, ale obecně při náhlém poklesu tlaku v lidském těle, tedy například při porušení přetlakové komory letadla ve velké nadmořské výšce atd.

Léčba dekompresní nemoci je velmi jednoduchá, je jen potřeba člověka vrátit do prostředí se zvýšeným tlakem, aby se bublinky plynu v jeho těle opět rozpustili v jeho tělních tekutinách a následně snižovat tlak postupně až na hodnotu atmosférického tlaku. K tomu se používají přetlakové (hyperbarické) komory.

Při opačné posloupnosti akcí, tedy při náhlém zvyšování tlaku uvnitř potápěčova těla mu dekompresní nemoc nehrozí, neboť se žádný plyn v jeho těle neuvolňuje. To ale neznamená, že by to nebylo pro lidské tělo nebezpečné. Při náhlém zvyšování tlaku, který na lidské tělo působí, mohou být nevratně poškozeny různé orgány, zejména ty, které obsahují dutiny naplněné vzduchem (např. hrozí protržení ušních bubínků nebo poškození plic). Je nutné si ale uvědomit, že v tomto případě je lidské tělo poškozeno v důsledku naprosto jiných fyzikálních zákonů, než v případě dekompresní nemoci.

## Úloha II.1 . . . potkan na ledě

*Na ledě běží potkan rychlostí  $v$ . Najednou se rozhodne, že se chce otočit o  $90^\circ$  tak, aby po otočení běžel pořád rychlostí o velikosti  $v$ , ale v novém směru. Jaký nejmenší čas na to potřebuje? Předpokládejte, že potkaní nožičky se mohou po ledě pohybovat nezávisle; koeficient tření mezi nožičkami a ledem je  $f$ .*

Když chce potkan zatočit co nejrychleji, musí využít veškeré zrychlení, které je mu třecí síla schopna poskytnout. Proto bude co nejusilovněji pohybovat všema nohama na jednu stranu. Velikost jeho zrychlení bude

$$a = fg.$$

V soustavě spojené s ledovou podložkou se potkan pohybuje s rychlostí  $\mathbf{v}_1 = (v, 0)$  a chce se zatočit tak, aby byla jeho rychlost  $\mathbf{v}_2 = (0, v)$ . Dívejme se na problém ze soustavy pohybující se rychlostí  $v$  spolu s potkanem (jakmile začne potkan zatáčet, naše soustava bude stále pokračovat původní rychlostí v původním směru). V této potkaní soustavě je na začátku potkan v klidu a na konci má rychlost

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = (-v, v).$$

V tuto chvíli se problém změnil na jednorozměrný (zrychlení z klidu na pevně danou rychlost  $\mathbf{v}_3$ ). Pro rovnoměrně zrychlený pohyb platí

$$|\mathbf{v}_3| = at.$$

Zároveň víme, že

$$|\mathbf{v}_3| = |(-v, v)| = v\sqrt{2}.$$

Když tyto poznatky spojíme, získáme

$$t_{\min} = \frac{|\mathbf{v}_3|}{a} = \frac{v\sqrt{2}}{fg},$$

čož je minimální čas potřebný k tomu, aby se potkan na ledě otočil o  $90^\circ$ . Pro lepší představu odhadneme číselné hodnoty: potkan běží rychlostí  $v = 4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a součinitel smykového tření mezi potkaní nohou a ledem je  $f = 0,1$ . Otočení o  $90^\circ$  mu zabere nejméně 5 s.

## Úloha II.2 ... numismatická

Občas nastane stav, kdy je nominální hodnota mincí nižší, než jejich výrobní náklady. Mějme dvě mince vyrobené ze slitiny zlata a stříbra. První má průměr  $d_1 = 1 \text{ cm}$ , druhá  $d_2 = 2 \text{ cm}$ , obě mají tloušťku  $h = 2 \text{ mm}$ . Menší mince při ponoření do nádoby se rtutí klesne ke dnu, zatímco větší mince se začne vynořovat. Ponoříme-li do rtuti obě mince, menší na větší, budou se v kapalině vznášet. Určete, kolik hmotnostních procent stříbra obsahuje větší mince, jestliže menší je celá zlatá.

Bonus Jak se změní výsledek úlohy, pokud menší mince může obsahovat i stříbro?

V tomto texte budeme používat nasledovné značenie: index 1, resp. 2 prislúcha menšej, resp. väčšej minci, podobne ako v zadaní. Indexy Hg, Au a Ag odpovedajú príslušným chemickým značkám daných prvkov čiže ortuť, zlato a striebro. V tomto texte sa vyskytnú aj kombinácie týchto indexov, napríklad  $V_{1,\text{Au}}$  je objem zlata v menšej minci.

Pre túto úlohu budeme používať tabuľkové hodnoty hustôt  $\rho_{\text{Hg}} = 13\,546 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $\rho_{\text{Au}} = 19\,320 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  a  $\rho_{\text{Ag}} = 10\,503 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

Pre prípad, keď sú obe minca položené na sebe a ponorené do ortuti platí vzťah

$$m_1 g + m_2 g = (V_1 + V_2) \rho_{\text{Hg}} g, \quad (18)$$

Po použití základných vzťahov na výpočet objemu a hmotnosti valcov dostaneme zo vzťahu (18)

$$\rho_2 = \rho_{\text{Hg}} (1 + k) - \rho_1 k, \quad (19)$$

kde  $k = (d_1/d_2)^2$ . Hustoty daných mincí musia vyhovovať vzťahu (19).

Zo zadania vieme, že malá minca je celá zo zlata, čiže  $\rho_1 = \rho_{\text{Au}}$ . Táto voľba nám presne určila aj hustotu väčšej mince zo vzťahu (19):

$$\rho_2 = \rho_{\text{Hg}} (1 + k) - \rho_{\text{Au}} k.$$

Teraz nám už len stačí určiť hmotnosti zlata a striebra v druhej minci. Pre jej hustotu platí vzťah

$$\rho_2 = \frac{m_2}{V_2} = \frac{\rho_{\text{Au}} V_{2,\text{Au}} + \rho_{\text{Ag}} V_{2,\text{Ag}}}{V_2} = \frac{\rho_{\text{Au}} V_{2,\text{Au}} + \rho_{\text{Ag}} (V_2 - V_{2,\text{Au}})}{V_2}. \quad (20)$$

Z rovnice (20) nám plyní vzťah pre objem zlata v druhej minci

$$V_{2,\text{Au}} = \frac{V_2 (\rho_2 - \rho_{\text{Ag}})}{\rho_{\text{Au}} - \rho_{\text{Ag}}}.$$

Objem striebra v tejto minci môžeme dopočítat zo vzťahu

$$V_{2,\text{Ag}} = V_2 - V_{2,\text{Au}}.$$

Akonáhle poznáme objemy zlata a stříbra v jednotlivých minciach, dopočítanie hmotnosti už nebude robiť problém. Použitím známeho vzorca  $m = \rho V$  dostávame, že  $m_{1,Au} = 3,0$  g,  $m_{1,Ag} = 0,0$  g,  $m_{2,Au} = 2,2$  g,  $m_{3,Ag} = 5,4$  g. Zo známych hmotností dopočítame hmotnostné percentá. Dostaneme, že v prvej minci sa nachádza 100 % zlata, zatiaľ čo vo väčšej sa nachádza približne 29 % zlata a 71 % striebra.

### Bonus

V našom riešení sme použili predpoklad, že menšia minca je celá zo zlata. Aby však boli splnené podmienky zo zadania úlohy, stačí, aby hustota malej mince spĺňala podmienku  $\rho_{Hg} < \rho_1 \leq \rho_{Au}$ . Pokiaľ teda hustota menšej mince túto podmienku spĺňa, vieme zo vzťahu

$$V_{1,Au} = V_1 \frac{\rho_1 - \rho_{Ag}}{\rho_{Au} - \rho_{Ag}},$$

ktorý sme dostali analogickým postupom, ako je uvedený vyššie, vypočítať objem zlata v menšej minci. Následne vieme zo vzťahu

$$V_{1,Ag} = V_1 - V_{1,Au}$$

dopočítať objem striebra v menšej minci. Zo vzťahu (19) si vieme dopočítať hustotu väčšej mince. Počítanie hmotností a hmotnostných percent je už analogické postupu uvedenému vyššie.

Interval hmotnostných percent striebra v menšej minci je teda  $[0; 52,4)$  %. Hmotnostné percento zlata v menšej minci už pre danú hodnotu hmotnostných percent striebra ľahko dopočítame.

## Úloha II.3 ... fatální upuštění

*Z rakety obíhající po kružnici ve výšce  $h = 2000$  km nad Zemí hodíme směrem k Zemi nebohý šroubovák rychlostí  $v = 5$  km·h<sup>-1</sup> vůči lodi. Za jak dlouho dopadne?*

Pred tým, ako skrutkovač hodíme, obieha spolu s nami po kruhovej dráhe. Rýchlosť  $v_0$ , ktorou obieha, určíme z rovnosti odstredivej a gravitačnej sily  $mv_0^2/r_0 = GMm/r_0^2$ , kde  $M$  je hmotnosť Zeme a  $r_0$  polomer pôvodnej dráhy, čím dostávame

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}.$$

Keďže skrutkovač vrhneme smerom do stredu Zeme, voči osi kolmej na rovinu dráhy prechádzajúcu stredom Zeme sa moment hybnosti nezmení. Keďže v perigeu (najnižšom bode na novej, eliptickej dráhe skrutkovača) bude rýchlosť znova kolmá na sprievodič, zo zachovania momentu hybnosti dostaneme

$$v_0 r_0 = v_p r_p, \tag{21}$$

kde  $v_0, r_0; v_p, r_p$  sú rýchlosti a vzdialenosti od stredu Zeme v momente pred hodením; resp. v perigeu. Tiež vieme, že na novej dráhe sa musí zachovávať energia. Pre energiu v momente po odhodení dostaneme

$$E_1 = \frac{m(v_0^2 + v^2)}{2} - \frac{GMm}{r_0} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{2r_0},$$

kde sme využili znalosť  $v_0$ . V perigeu bude energia vyzerat podobne a dostaneme podmienku zachovania energie

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{2r_0} = \frac{mv_p^2}{2} - \frac{GMm}{r_p}. \quad (22)$$

Čím už máme všetko, čo na riešenie potrebujeme. Stačí len vyriešiť sústavu rovníc (21) a (22), čím dostaneme kvadratickú rovnicu voči  $1/r_p$

$$0 = \frac{1}{r_p^2} v_0^2 r_0^2 - 2GM \frac{1}{r_p} + \frac{GM}{r_0} - v^2,$$

ktorej riešením po dosadení za  $v_0$  dostaneme

$$\frac{1}{r_p} = \frac{1}{r_0} \left( 1 + \sqrt{\frac{r_0 v^2}{GM}} \right) = \frac{1}{r_0} \left( 1 + \frac{v}{v_0} \right),$$

kde sme vybrali riešenie so +, pretože ide o  $1/r_p$  a potrebujeme perigeum, teda nižšie  $r_p$ . Riešenie so znamienkom – by nám dalo druhý bod, v ktorom platia všetky naše predpoklady, teda apogeum. Keďže vieme, že v našom prípade  $v/v_0 \ll 1$ , môžeme vzťah aproximovať

$$r_p \approx r_0 \left( 1 - \sqrt{\frac{r_0 v^2}{GM}} \right).$$

Sem už stačí len dosadiť hodnoty zo zadania a následne odečítať polomer Zeme  $r_Z$ , dostaneme  $r_p - r_Z \doteq 1998$  km, takže vyhodenie má len minimálny vplyv na dráhu skrutkovača a na Zem nedopadne.

Ak by sme chceli, aby na Zem dopadol (teda aby sme dostali  $r_p = r_Z$ ), potrebovali by sme výrazne väčšiu rýchlosť  $v$ , a teda naša aproximácia už nemusí platiť. Dostaneme

$$\frac{1}{r_Z} = \frac{1}{r_Z + h} \left[ 1 + \sqrt{\frac{(r_Z + h) v^2}{GM}} \right],$$

z čoho vyjadríme potrebnú rýchlosť

$$v = \frac{h}{r_Z} \sqrt{\frac{GM}{r_Z + h}} = \frac{h}{r_Z} v_0 \doteq 2,2 \text{ km/s}.$$

Pre predstavu, keby sme takouto rýchlosťou hodili skrutkovač zo Zeme nahor, vyletel by do výšky skoro 250 km. Ešte zaujímavejšie ale je, že ak by sme takto aj dokázali skrutkovač odhodíť a ak by skrutkovač vážil 0,3 kg a my 60 kg, tak by nás spätný ráz vrazil do Zeme takou silou ako pád zo šiestich metrov.

## Úloha II.4 . . . svítíme si na zrcadla

Máme optickou soustavu tvořenou třemi polopropustnými zrcadly v jedné ose za sebou. Každé zrcadlo by samo o sobě polovinu dopadajícího záření propustilo a polovinu odrazilo. Jaká část světla celkově projde naší optickou soustavou?

Bonus Vyřešte úlohu pro  $n$  zrcadel.

Než se pustíme do řešení, připomeňme si jednu důležitou vlastnost polopropustných zrcadel: Pokud zrcadlo z jedné strany propouští zlomek  $p$  dopadajícího světla a odrazí  $1 - p$ , tak také nutně<sup>8</sup> z druhé strany propouští  $p$  a odrazí  $1 - p$ . Dále také víme, že se veškeré záření odrazí nebo projde, zrcadla se tedy nezařívají.

Řešme úlohu nejprve pouze pro  $n = 2$ . Po průchodu prvním zrcadlem projde zlomek záření  $p$ , po průchodu druhým zrcadlem  $p^2$ . Při dopadu na druhé zrcadlo se však také  $p(1-p)$  odrazí zpět na první zrcadlo.<sup>9</sup> Část záření projde prvním zrcadlem do oblasti zdroje, zpět k druhému zrcadlu se vrátí  $p(1-p)^2$  a druhým zrcadlem projde  $p^2(1-p)^2$ . Znovu se však odrazí  $p(1-p)^3$ . . . Takto bychom mohli pokračovat velmi dlouho, konkrétně do nekonečna. Stačí si však všimnout, že záření, které projde soustavou dvou zrcadel, prodělá 2 průchody a  $2k$  odrazů, kde  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Naším úkolem je tedy sečíst geometrickou řadu s kvocientem  $(1-p)^2$

$$p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{2k} = p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} [(1-p)^2]^k = p^2 \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}.$$

Po dosazení  $p = 1/2$  dostaneme, že zrcadlem projde  $1/3$  záření.

Kdybychom nyní chtěli obdobně postupovat pro  $n = 3$ , zjistíme, že nám přítomnost prostředního zrcadla naše výpočty značně ztíží. My se však nezalekneme a rovnou si ukážeme, jak úlohu vyřešit pro obecné  $n \in \mathbb{N}$ . Budeme postupovat indukčně. Stačí si totiž uvědomit, že soustavu dvou zrcadel můžeme označit za nový optický prvek, který propouští  $P_2 = p/(2-p)$  a odrazí  $1 - P_2 = 2(1-p)/(2-p)$ . Pak už můžeme opět použít jednoduchou geometrickou řadu. Pouze si nyní musíme lépe rozmyslet, kde vystupuje  $p$  a kde  $P_2$ . Dva průchody vytvoří prefaktor  $pP_2$ , kvocient řady bude  $(1-p)(1-P_2)$ . Potom

$$pP_2 \sum_{k=0}^{+\infty} [(1-p)(1-P_2)]^k = pP_2 \frac{1}{1-(1-p)(1-P_2)} \equiv P_3.$$

Zde jsme označili  $P_3$  jako část záření, která projde optickou soustavou tří zrcadel. Po dosazení  $p = 1/2$  dostaneme

$$P_3 = pP_2 \frac{1}{1-(1-p)(1-P_2)} = \frac{p}{3-2p} = \frac{1}{4}.$$

<sup>8</sup> Jedná se důsledek zákonů termodynamiky.

<sup>9</sup> Jelikož  $p = 1/2$ , mohli bychom psát  $1-p = p$ , budeme však postupovat obecněji. Stále ale používáme alespoň předpoklad, že všechna zrcadla mají stranu propouštějící  $p$  směrem ke zdroji.

Nyní si můžeme všimnout podobnosti

$$P_2 = \frac{p}{2-p} \quad \text{a} \quad P_3 = \frac{p}{3-2p}.$$

Možná vás napadne, že by tedy mohlo platit

$$P_n = \frac{p}{n - (n-1)p},$$

konkrétně pro  $p = 1/2$

$$P_n = \frac{1}{n+1}.$$

Abychom ukázali, že hledaným řešením je skutečně zmíněná harmonická posloupnost  $1/(n+1)$ , využijeme našeho indukčního postupu a přepíšeme vztah pro  $n = 3$  pro obecně  $n > 1$

$$P_n = pP_{n-1} \frac{1}{1 - (1-p)(1 - P_{n-1})} = \frac{pP_{n-1}}{p + P_{n-1} - pP_{n-1}}.$$

Tento vztah dále upravíme do tvaru

$$P_n = \frac{1}{\frac{1-p}{p} + \frac{1}{P_{n-1}}}.$$

Když dodefinujeme  $P_1 \equiv p$ , snadno už vyjádříme kýžený výsledek

$$P_n = \frac{1}{\frac{1-p}{p} + \frac{1}{P_{n-1}}} = \frac{1}{\frac{1-p}{p} + \frac{1-p}{p} + \frac{1}{P_{n-2}}} = \dots = \frac{1}{(n-1)\frac{1-p}{p} + \frac{1}{p}} = \frac{p}{n - (n-1)p}.$$

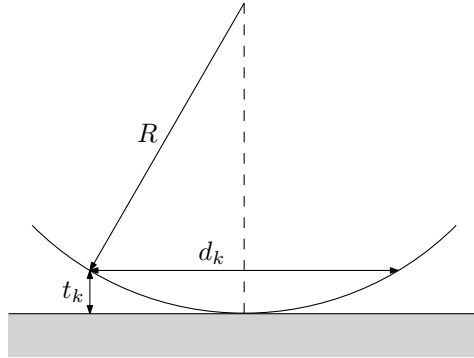
Všimněme si, že posloupnost konverguje k nule, což fyzikálně znamená, že i skrz velmi dobře propustná skla neuvidíme, pokud jich bude v řadě velký počet.

## Úloha II.5 ... je šišaté, bude s ním veselo

Mirkovi během zimních měsíců přišlo, že má doma na čtení příliš šero. Usmyslel si proto, že nechá do zdi pokoje vybourat otvor pro další okno. Nejdřív se ale vydal do sklářství koupit okenní tabulku. Moc se mu líbila jedna kruhová, ale ještě než ji koupil, potřeboval prozkoumat, jestli není sklo příliš křivé (vypuklé). Položil tabulku na dokonale rovnou skleněnou desku na pultě obchodu a pozoroval duhové kroužky, které vznikly kolem středu tabulky interferencí kolmo dopadajícího bílého světla na vzduchové mezeře mezi skly. Mírek náhodně vybral dva sousední červené kroužky ( $\lambda \approx 700$  nm) a pravítkem změřil jejich průměry  $d_k = (10,5 \pm 0,5)$  mm a  $d_{k+1} = (13,0 \pm 0,5)$  mm. Na základě těchto údajů už dokázal určit poměr křivosti kruhového skla. Určete ho i vy a zamyslete se nad tím, s jakou přesností byl stanoven.

Zadání úlohy popisuje dobře popsany jev interference světla na tenké vrstvě proměnné tloušťky. Vzniklé duhové kroužky se nazývají Newtonovy. Ke studiu problému nám pomůže nákres na obrázku 3.





Obr. 3: Kolmý řez skly s vyznačeným průměrem kroužku  $d_k$ , poloměrem křivosti  $R$  a tloušťkou vzduchové vrstvy  $t_k$ .

Interference světla odraženého na kruhové části a na rovné skleněné desce bude záviset na tloušťce vzduchové vrstvy  $t$ . Pomocí Pythagorovy věty nalezneme vztah

$$\left(\frac{d_k}{2}\right)^2 = R^2 - (R - t)^2 \approx 2Rt \quad (23)$$

mezi poloměrem křivosti vypuklého skla  $R$  a tloušťkou vzduchové vrstvy  $t_k$  v místě, kde pozorujeme kroužek. Jelikož vyklenutí skla musí být malé, aby bylo vůbec možné kroužky pozorovat, použili jsme aproximaci  $R \gg t$ . Vyjádříme tloušťku

$$t = \frac{d_k^2}{8R}. \quad (24)$$

Dále víme, že kroužky představují interferenční maximum, vlny tedy musí být fázově posunuty o celistvý násobek vlnové délky  $k\lambda$ . Kromě dráhového rozdílu  $t_k$  nesmíme zapomenout na skutečnost, že na rovinné destičce dochází k odrazu zpět do opticky řidšího prostředí. V takovém případě se fáze vlny posune<sup>10</sup> o  $\lambda/2$  Celkem tedy na tloušťku vrstvy klademe požadavek

$$2t_k + \frac{\lambda}{2} = k\lambda,$$

po úpravě

$$t_k = (2k - 1)\frac{\lambda}{4}.$$

V našem případě pracujeme se sousedními maximy, dostaneme tedy

$$t_{k+1} - t_k = \frac{\lambda}{2}.$$

<sup>10</sup>Pokud vás zajímá fyzikální zdůvodnění tohoto jevu, hledejte heslo *Fresnelovy vzorce*. Jako mechanická představa poslouží odraz vlny na pevném konci. Skutečnost, že se tento posun později ve výpočtech odečte, nás neopravňuje ho zde vynechat.

S využitím vztahu (24) dostaneme rovnost

$$t_{k+1} - t_k = \frac{\lambda}{2} = \frac{d_{k+1}^2 - d_k^2}{8R}.$$

Z ní už vyjádříme hledaný poloměr

$$R = \frac{d_{k+1}^2 - d_k^2}{4\lambda} \doteq 21 \text{ m}. \quad (25)$$

Rychlým pohledem na (23) odhadneme, že při průměru okna 0,5 m by byly okraje o 1 mm tenčí, což už je lehce na pováženou vzhledem ke standardní tloušťce tažných skel 4 mm.

Nakonec nám úloha ukládá spočítat, s jakou přesností jsme poloměr stanovili. Označme  $\sigma_R$  nejistotu nepřímého měření poloměru a  $\sigma = 0,5$  mm nejistotu měření délky. Z Gaussova kvadratického zákona hromadění chyb<sup>11</sup> nalezneme vztah

$$\sigma_R = \frac{\sigma}{2\lambda} \sqrt{d_{k+1}^2 + d_k^2} \doteq 6 \text{ m}.$$

Nalezený poloměr je tedy  $R = (21 \pm 6)$  m. Nejistota je poměrně velká, a i tak je pravděpodobně podhodnocená, protože na duhovém kroužku je nesnadné určit přesně barvu odpovídající  $\lambda = 700$  nm. Hlavním zdrojem nejistoty je však skutečnost, že ve výrazu (25) pracujeme s rozdílem blízkých hodnot. Přesnost měření bychom tedy mohli vylepšit tím, že bychom pozorovali vzdálenější proužky  $l - k > 1$  nebo že bychom použili monochromatické světlo a odečítali průměr kroužků v minimech, která jsou lépe rozlišitelná.

## Úloha II.P ... rodičovská

*Představte si, že za vámi přijde inteligentní sedmileté dítě a zeptá se: „A co je to ta supravodivost?“ Co všechno byste ho museli naučit a co vše mu postupně vysvětlit, abyste mu tento jev teoreticky mohli objasnit bez užití „lži dětem“<sup>12</sup> na odborné úrovni? Řešení zkuste rozpracovat co nejlépe.*

Sedmileté dítě tuší, že existuje elektřina (Nestrkej ruce do zásuvky!, Nesahej na ten ohradník!). Také si všimlo, že elektřina je potřeba třeba k tomu, aby svítila lampička, a vede k ní ze zásuvky nějakým kabelem. Už ale asi neví, co to ta elektřina je a jak tyhle věci dělá. Před výkladem supravodivosti bychom se měli dostat k pojmům jako jsou proud, vodič, odpor.

Látky se skládají z malých částic, kterým říkáme atomy. Velikost jednoduchých atomů je řádově  $1 \text{ \AA} = 1 \cdot 10^{-10}$  m. Atomy se dále skládají z dalších částí, malého

<sup>11</sup>Jde o vztah, který budete potřebovat při většině fyzikálních měření. Jeho znění a další užitečné informace naleznete např. v knihovničce Fyzikální olympiády: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/mereni.pdf>

<sup>12</sup>Význam pojmu „lež dětem“ můžete najít v knížce Věda na Zeměploše; zjednodušeně se jedná o vysvětlení, které není úplně pravdivé, ale má pomoci danou věc alespoň zhruba pochopit, klasicky třeba představa atomů jako malinkatých, pevných kuliček

( $1 \text{ fm} = 1 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ ) jádra uprostřed a dalších částic, elektronů, které se pohybuje kolem jádra a tvoří jeho obal. Jádro se skládá z protonů a neutronů. Existuje řada vlastností, kterými se tyto částice liší. Pro nás bude důležitý náboj. Protony mají kladný náboj, neutrony žádný, celkově je proto jádro kladné. Elektrony mají záporný náboj. Každý náboj kolem sebe vytváří elektrické pole, do kterého když dáme náboj opačný, je k němu přitahován, a když do něj dáme náboj stejný, je odpuzován. Elektrony jsou tedy k jádru přitahovány. Zároveň však nemají z kvantové mechaniky dovoleno přiblížit se k jádru příliš blízko, proto zůstávají v pohybu v dovolených místech v blízkosti jádra a tvoří tak stabilní systém. Dále se ještě hodí vědět, že další vlastností, kterou mohou částice mít, je spin – elektrony mohou mít spin  $1/2$  nebo  $-1/2$ .

Atomy mohou být v látkách uspořádány různými způsoby a podle toho pak mají různé vlastnosti. V následujícím textu budeme mluvit o skupině látek, které se říká kovy. Ty mají atomy uspořádány do nějaké pravidelné struktury, říkáme, že tvoří krystaly. Na těchto strukturách je speciální to, že jsou pevně vázána pouze jádra atomů – všechny vodivostní elektrony, tedy ty, které atom uvolní na interakci, vytvoří tzv. elektronový plyn, který může v krystalu rychle přenášet náboj. Pokud bude na jednom místě krystalu více kladného náboje než na druhém konci (říkáme, že je mezi nimi napětí), bude se záporný náboj, jehož nosiči jsou elektrony, pohybovat směrem ke kladnému náboji. Když se látkou šíří náboj nějakým směrem, říkáme, že látka vede elektrický proud. Látkám, které vedou elektrický proud dobře, říkáme vodiče. Proud je tedy uspořádaný pohyb náboje v čase.

Elektrony pohybující se v krystalu pociťují elektrická pole kladných nábojů a jsou tímto polem brzděny. Pro každý kov je toto brzdění jiné; charakterizuje jej vlastnost, které říkáme odpor.

Sedmileté dítě se také už setkalo s teplotou – když se vaří voda, řekneme, že má  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ , když zamrzá, má  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Nejnižší dosažitelná teplota je  $-273,15 \text{ }^\circ\text{C}$ . Ve fyzice se častěji používá jednotka Kelvin, K – jeden Kelvin má stejnou velikost jako jeden stupeň Celsia, avšak počátek stupnice je definovaný jako  $0 \text{ K} = -273,15 \text{ }^\circ\text{C}$ . Jádra atomů nejsou ve svých polohách napevno, spíše kolem nich kmitají, a to tím více, čím vyšší je teplota. Čím více kmitají, tím více brzdí pohyb elektrického proudu. Snižujeme-li tedy teplotu, odpor látky bude klesat.

Roku 1911, tedy před 104 lety, holandský fyzik Heike Kammerlingh Onnes dokázal pomocí kapalného helia zchladit látky na velmi nízkou teplotu, na 4 K, a začal zkoumat vlastnosti látek za velmi nízkých teplot. Měřil odpor různých kovů a u některých zjistil, že odpor klesá s teplotou až do jisté teploty, která se pohybuje mezi 1 K a 25 K, kdy odpor téměř skokově klesne na nulu. Látka přešla do zcela nového stavu, který označil za supravodivost. Za tyto objevy dostal Onnes v roce 1913 Nobelovu cenu.

K čemu je to dobré? Prochází-li vodičem elektrický proud, který vytváří proměnné elektrické pole (například pokud postupně zvětšujeme napětí), vytváří procesem elektromagnetické indukce také magnetické pole. Když látkou teče proud, tak se látka kvůli odporu zahřívá. Když je v supravodivém stavu, žádný odpor nemá, nezahřívá se a nic nebrání průchodu i velkých proudů, můžeme tak získat i silná a stálá magnetická pole. Magnet dítě zná, ví, že drží na ledničce. Perma-

nentní magnet, tedy třeba ten na ledniče, má severní a jižní pól a vytváří kolem sebe magnetické pole. Když do tohoto pole vložíme další magnet, natočí se tak, aby severní pól směřoval k jižnímu a naopak.

Vysvětlit supravodivost se podařilo zatím u nízkoteplotních supravodičů I. druhu. Těmi jsou kovy, které v silných magnetických polích supravodivé vlastnosti zase ztrácí. Vysvětlení jevu spočívá v existenci tzv. Cooperových párů elektronů. Dva elektrony s opačnými spiny jsou k sobě přitahovány mechanismem podobným chemické vazbě prvků a chovají se dohromady jako boson, tj. jako částice s celočíselným spinem přenášející interakce (jako například foton přenášející světlo). Této teorii se říká BSC teorie podle fyziků Johna Bardeena, Leona Coopera a Johna Roberta Schrieffera, kteří jsou za tuto teorii spolunositeli Nobelovy ceny za rok 1972. Supravodivost u supravodičů II. druhu, materiálů obsahujících měď nebo nekovové složky, a které také ztrácí supravodivé vlastnosti při stokrát i vícekrát vyšších magnetických polích než supravodiče I. druhu, zatím čeká na vysvětlení.

Později byly objeveny vysokoteplotní supravodiče, materiály, u kterých se supravodivé vlastnosti projevují už v vyšších teplot, v průměru okolo 90 K. Této teploty lze dosáhnout pomocí mnohem levnějšího kapalného dusíku. S kapalným dusíkem se často ukazují pokusy týkající se supravodivosti. Typický vysokoteplotní supravodič je například z materiálu  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ . Pokud jej zchladíme kapalným dusíkem a roztočíme nad ním malý permanentní magnet, bude se nad ním vznášet. Tento efekt využívá Meissnerův-Ochsenfeldův jev: pokud supravodič vložíme do magnetického pole, tak supravodič všechno vnější magnetické pole vytěsni ze svého objemu pryč a odpuzuje jakékoliv další magnety. Supravodiče II. druhu, jako například  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ , tento jev nevykazují úplně – zůstávají v nich kanálky, tzv. vortexy, kde magnetické pole zůstává. Tím může dojít k takovému rozložení magnetického pole, že další vložený magnet se bude vznášet nad supravodičem ve stabilní poloze. Pro větší stabilitu se hodí vložený magnet ještě roztočit.

Pro větší atraktivitu bychom mohli výklad zakončit takovými a podobnými pokusy s vysokoteplotními supravodiči a kapalným dusíkem a zbylý dusík použít na výrobu zmrzliny.

### Úloha III.1 ... bláznivá rybička

V akváriu ve tvaru koule s poloměrem  $r = 10$  cm plně naplněném vodou plavou v opačných směrech dvě stejné rybičky. Rybička má průřez  $S = 5$  cm<sup>2</sup>, Newtonův odporový koeficient  $C = 0,2$  a plave rychlostí  $v = 5$  km·h<sup>-1</sup> vůči vodě. Jak dlouho musí rybičky v akváriu plavat, aby ohřály vodu o 1 stupeň Celsia? Tepelné ztráty a biologické procesy v rybičkách zanedbejte.

Při plavbě akváriem musí rybičky překonávat odpor vody. Každá tedy koná práci  $W$ . Jelikož zanedbáváme veškeré tepelné ztráty (z akvária do vzduchu), biologické procesy v rybičkách, objem rybiček atp., veškerá rybičkami vykonaná práce se předá vodě ve formě tepla. Můžeme tedy psát, že

$$2W = Q.$$

V tomto případě je odporová síla celou dobu konstantní, a tak z klasické mechaniky víme, že práce, kterou rybička vykoná, je rovna  $W = F_O s$ , kde  $F_O$  je Newtonova odporová síla prostředí, kterým se rybička pohybuje a  $s$  je dráha, po které tato síla působí. Pro Newtonovu odporovou sílu platí rovnice

$$F_O = \frac{1}{2} C \rho S v^2,$$

kde  $C$  je Newtonův odporový koeficient,  $S$  je průřez rybičky,  $\rho$  je hustota prostředí (tedy vody) a  $v$  je její rychlost. Jelikož je rychlost rybičky celou dobu konstantní, pro dráhu platí vztah  $s = vt$ . Dosazením těchto rovnic do sebe můžeme psát

$$W = \frac{1}{2} C \rho S v^3 t.$$

Nyní jsme si vyjádřili práci, kterou vykoná jedna rybička. Dále si vyjádříme teplo  $Q$ . To můžeme vyjádřit z kalorimetrické rovnice jako

$$Q = mc\Delta T.$$

V této rovnici je  $c$  měrná tepelná kapacita vody a jedná se o úplně jinou veličinu než Newtonův koeficient odporu  $C$ . Hmotnost vody v akváriu můžeme spočítat jednoduše jako  $m = V\rho$ . Akvárium je kulového tvaru a známe jeho vnitřní poloměr, objem tedy spočteme jako

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Spojením výše zmíněných rovnic dostaneme, že

$$Q = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho c \Delta T$$

a dosazením do původní rovnice  $2W = Q$

$$2 \cdot \frac{1}{2} C \rho S v^3 t = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho c \Delta T.$$

Z této rovnice vyjádříme čas, jakožto jedinou neznámou

$$t = \frac{4\pi r^3 c \Delta T}{3CSv^3}.$$

Číselným dosazením dostaneme, že  $t = 18,2$  h.

### Úloha III.2 ... alchymista začátečník

Náš nejmenovaný mladý alchymista, říkejme mu Jirka N., se naučil používat elektrolýzu a měřit elektrochemický ekvivalent látky. Dokonce se mu podařilo naměřit u jednoho vzorku hodnotu elektrochemického ekvivalentu relativně přesně, a to  $A = (6,74 \pm 0,01) \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{C}^{-1}$ . Ale sám si neví rady, jak určit, o jakou látku se jedná. Poradte mu!

*Úvod k elektrolýze a úloze*

Nejprve si připomeneme něco o tom, jaké vztahy se týkají elektrolýzy. Jedná se o tzv. Faradayovy zákony. První z nich nám říká, že hmotnost látky vyloučené na elektrodě je přímo úměrná náboji, který prošel elektrolytem. Zákon můžeme zapsat pomocí rovnice  $m = AQ$ , kde konstantu úměrnosti  $A$  nazýváme elektrochemickým ekvivalentem látky. Ta se pro různé látky může lišit. Naopak pro některé dvě různé látky může být velice podobná.

Druhý Faradayův zákon nám pak říká, že látková množství vyloučená na elektrodách stejným nábojem jsou chemicky ekvivalentní. Tedy  $A$  bude přímo úměrně záviset na molekulové molární hmotnosti  $M_m$  dané látky a dále nepřímo úměrně na tom, jaké oxidační číslo (v absolutní hodnotě  $-\nu$ ) má vylučovaná látka. Můžeme jej zapsat jako

$$A = \frac{M_m}{F\nu}, \quad (26)$$

kde  $F = 9,65 \cdot 10^4 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$  je Faradayova konstanta.

Nyní se vraťme k našemu konkrétnímu zadání. Jirka N. nám toho moc o látce neprohlásil. Budeme ale předpokládat, že se na elektrodě vylučoval nějaký chemický prvek. Tedy ne nějaké celé molekuly, což by také mohlo nastat. Současně budeme předpokládat, že se nejedná o směs různých sloučenin, ze kterých se prvek uvolňuje, ale že se v elektrolytu vyskytoval pouze v jednom oxidačním čísle. Pokud by se mohlo jednat o směs v libovolném poměru, tak by to bylo další docela zajímavou komplikací. Samozřejmě musíme mít na paměti, že chemický prvek se skládá, obvykle, z více izotopů. Uvažovat má smysl pouze izotopy, co jsou dostatečně stabilní na to, aby vůbec mohly být proměřeny. Například u poločasu rozpadu jedna sekunda bychom obvyklými metodami měření naměřili spíše produkty, na které se daný izotop rozpadá.

Další nejistotou je, v čem vlastně probíhá elektrolýza. Obvykle si člověk představí vodný roztok dané látky. Elektrolýza ovšem může probíhat i přímo v tavenině dané látky nebo v roztoku jiné kapaliny než vody. Argument v tom smyslu, že daná látka není rozpustná ve vodě, tedy není dostatečný k prohlášení, že to daný prvek být nemůže.

Vyjádríme z (26) molekulovou molární hmotnost (a máme na paměti, že jde vlastně o atomovou a ne molekulovou)

$$M_m = AF\nu.$$

No a nyní prostě zkusíme dosazovat různá přirozená čísla za  $\nu$  a hledat v periodické tabulce prvků.<sup>13</sup> Respektive hledat izotopy jednotlivých prvků, co jsou blízko tomu, který má danou atomovou hmotnost.

*Oxidační číslo 1*

První atomová hmotnost, která nás zajímá je 65, tomu odpovídá měď (Cu).  $^{65}\text{Cu}$  je jeden ze dvou stabilních izotopů a vyskytuje se v přírodě<sup>14</sup> v zastoupení cca 31 %.

<sup>13</sup>Například v této: <http://www.ptable.com>, kde si v tabulce izotopů můžete zobrazit jednotlivé prvky po izotopech a jejich poločasy rozpadu.

<sup>14</sup><https://cs.wikipedia.org/wiki/Měď>

Druhým izotopem je  $^{63}\text{Cu}$ . Pokud bychom tedy měli relativně izotopově čistou měď 65, pak by měla právě takové  $A$ . Měli bychom ještě zkontrolovat, jestli se měď vyskytuje v tomto oxidačním čísle, což se vyskytuje – např.  $\text{CuCl}$ . Byť se jedná o látky, které se špatně rozpouští ve vodě a na vzduchu v průběhu delší doby (týdny, měsíce) dojde k chemické reakci vedoucí ke změně oxidačního čísla na  $\text{Cu}^0$  a  $\text{Cu}^{+2}$ , tak mohlo jít o elektrolýzu např. stále syčeného roztoku  $\text{CuCl}$  ve vodě tuhým  $\text{CuCl}$  na dně či o elektrolýzu jeho taveniny.

Nechceme ale naše první hmotnostní číslo 65 zanedbat, a proto se podíváme i na okolní prvky v periodické tabulce. Nikl<sup>15</sup> se vyskytuje stabilní v nejvyšším nukleonovém čísle 64, tedy ten měřen nebyl. Zinek<sup>16</sup> se pak vyskytuje v přírodě v nukleonových číslech 64 i 66 a je možné připravit dokonce i izotop 65, který má poločas rozpadu 244 dnů. Ten se sice obvykle vyskytuje v oxidačním čísle II, ale jsou známy sloučeniny, kde efektivně vystupuje s oxidačním číslem I – obsahují ionty  $\text{Zn}_2^{2+}$ . Mohlo by jít tedy i o zinek. Gallium<sup>17</sup> se pak v nukleonovém čísle 65 s poločasem rozpadu, který by stál za řeč, nevyskytuje.

### Oxidační číslo 2

Pokračujme s  $\nu = 2$ . První prvek, co se vyskytuje s nukleonovým číslem 130 a nerozpadne se příliš rychle, je tellur.<sup>18</sup> 130 je sice radioaktivní izotop, ale jeho dlouhý poločas rozpadu, který je řádově  $8 \cdot 10^{20}$  let vede k tomu, že jde o v přírodě nejčastěji se vyskytující izotop a dá se o tomto prvku z hlediska délky života člověka říkat, že je stabilní. Sice je nejčastější v oxidačním čísle +4, ale vyskytuje se i v oxidačních číslech +2 a -2. Opět jde o problematické sloučeniny co do rozpustnosti ve vodě a reaktivitě na vzduchu, ale elektrolýza taveniny by možná byla.

Jód se v nukleonovém čísle 130 nevyskytuje.<sup>19</sup> Leda by šlo o směs dvou různých radioaktivních izotopů.

Xenon<sup>20</sup> je sice stabilní prvek přímo v izotopu 130. Ale jde o relativně málo reaktivní prvek, který obecně nevytváří moc sloučenin a většina z nich je v oxidačním čísle 0. Existují sice i sloučeniny s oxidačním číslem +2, ale asi nepůjde zrovna o nejlepší kandidáty na elektrolýzu.

Cesium<sup>21</sup> se vyskytuje striktně s oxidačním číslem +1, což nás jistě potěší. A když zjistíme, že jediný stabilní izotop je 133 a izotop 130 má poločas rozpadu půl hodiny, tak si říkáme, proč jsme o něm vlastně uvažovali.

Baryum<sup>22</sup> má izotop 130 jako nejlehčí z těch relativně stabilních. Jeho poločas rozpadu je ještě delší než u telluru. Mohlo by tedy jít o něj, zejména s ohledem na to, že se vyskytuje prakticky jenom v oxidačním čísle +2.

<sup>15</sup><https://cs.wikipedia.org/wiki/Nikl>

<sup>16</sup><https://cs.wikipedia.org/wiki/Zinek>

<sup>17</sup><https://cs.wikipedia.org/wiki/Gallium>

<sup>18</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Tellurium>

<sup>19</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Iodine>

<sup>20</sup><https://cs.wikipedia.org/wiki/Xenon>

<sup>21</sup><https://cs.wikipedia.org/wiki/Cesium>

<sup>22</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Barium>

Lanthan a další prvky pak už izotop 130 a nižší mají příliš nestabilní na naši elektrolyzu.

### *Oxidační číslo 3*

Pokročili jsme k oxidačnímu číslu 3. Teď už se zaměřujeme na izotopy prvků s nukleonovým číslem 195. Osmium a iridium to kvůli nestabilitě nebude (stejně jako další předchozí prvky). Mohlo by jít o platinu<sup>23</sup> která se v tomto izotopu vyskytuje stabilní a jedná se současně o nejhojněji se vyskytující izotop v přírodě. Ale docela velký problém je oxidační číslo 3. Platina se vyskytuje většinou v oxidačním čísle +2 a +4. Pokud by se mělo jednat o ni, tak by muselo jít pravděpodobně o směs dvou sloučenin, ve kterých má různou mocnost, což jsme si řekli, že nebudeme předpokládat.

Docela nadějně je zlato<sup>24</sup> Poločas rozpadu má 186 dne a současně se vyskytuje nejčastěji v oxidačním čísle +3. A to bude pravděpodobně poslední vážný kandidát. Rtuť<sup>25</sup> má totiž v izotopu 195 poločas rozpadu 10 hodin a vyskytuje se jenom v oxidačních číslech +1 a +2. Thallium a další prvky se pak vyskytují až v těžších izotopech.

### *Oxidační čísla 4 a vyšší*

Oxidační číslo by odpovídalo nukleonovému číslu 260. Prvním prvkem poločasem rozpadu delším než hodina, je mendelevium<sup>26</sup> <sup>260</sup>Md má poločas rozpadu v řádu desítek dnů, ale jeho chemické sloučeniny jsou pouze oxidačního čísla +2 a +3. Nobelium opět není moc stabilní a nevyskytuje se v oxidačním čísle 4. Lawrencium má oxidační číslo pouze +3. Rutherfordium by konečně mělo oxidační číslo +4, ale jeho reálnost naměření kazí poločasy rozpadu izotopů 206 a nižších, z nichž nejdelší jsou v řádu sekund. Další prvky jsou pak opět nestabilní či vůbec nebyly pozorovány v izotopu s nukleonovým číslem 260 či nižším.

Oxidační čísla 5 a vyšší jsou už pak z hlediska současného poznání u prvků nemožná, protože nejtěžší pozorované izotopy měly nukleonové číslo kolem 293, a to s milisekundovými poločasy rozpadu.

### *Povzdech autora a závěr*

Jak vidíte, tak pokud si vyberete jeden konkrétní prvek (měď) a jeho jeden konkrétní stabilní izotop (65) a oxidační číslo (1), ve kterém se může vyskytovat, na základě toho určíte *A* a pak budete hledat další možnosti, co se nám to mohlo v rámci elektrolyzy se stejným naměřeným *A* vyloučit na elektrodě, tak dostanete velice mnoho možností.

Pro vyřešení úlohy za plný počet bodů nebylo nutné nalézt všechna řešení, ale zejména popsat postup a uvážit alespoň většinu uvedených komentářů autorského řešení.

---

<sup>23</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Platinum>

<sup>24</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Gold>

<sup>25</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Mercury\\_\(element\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Mercury_(element))

<sup>26</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Mendelevium>

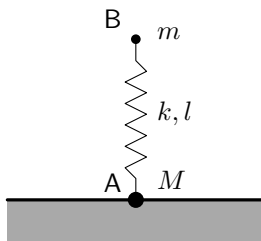


Po předchozí diskuzi bychom mohli prohlásit, že půjde pravděpodobně o měď či nikl, nebo docela pravděpodobně o tellur či baryum, nebo taky o zlato. A nebo měl Jirka nějakou záludnou směs či složitější sloučeninu. Nebo dokáže změřit úplně zázračně elektrolyzu prvku s velice krátkým poločasem rozpadu.

### Úloha III.3 . . . kdy vyskočí?

Mějme nehmotnou pružinu o tuhosti  $k$ . Na jednom jejím konci je připevněno závaží o hmotnosti  $m$ , na jejím druhém konci je připevněno druhé závaží o hmotnosti  $M$ . Tuto sestavu položíme na vodorovnou desku tak, že závaží o hmotnosti  $M$  bude ležet na desce a závaží o hmotnosti  $m$  bude trčet na pružině přímo nad prvním závažím. Soustava je v rovnovážném stavu (tj. první závaží nekmitá) a délka pružiny v tomto stavu je  $l$ . Určete jak moc musíme pružinu stlačit, aby po jejím uvolnění závaží o hmotnosti  $M$  nadskočilo. Uvažujte pouze vertikální pohyb.

Celou sestavu si budeme představovat jako dva hmotné body spojené pružinou (viz 4) a budeme uvažovat jen síly působící ve vertikálním směru.



Obr. 4: Náčrtek problému v situaci, kdy je soustava v klidu

V tomto klidovém stavu nebude závaží B kmitat, výslednice sil na něj působících tedy musí být v tomto okamžiku nulová. Spodní závaží (tj. hmotný bod A) nadskočí, právě když součet sil na něj působících bude směřovat nahoru. Víme, že na závaží A působí tíhová síla směrem dolů, která má velikost

$$F_G = (M + m)g,$$

a jejíž pohybové účinky jsou vyrušeny reakční silou podložky. Když nyní pružinku stlačíme a uvolníme, začne závaží B kmitat. Na tomto místě si musíme uvědomit, že síla, která bude působit na závaží A v důsledku kmitání závaží B, bude rovna síle, kterou působí pružina na závaží B, jen s opačným znaménkem (plyne z Newtonových zákonů). Tuto sílu umíme poměrně jednoduše vyjádřit, jde jen o sílu, kterou působí napnutá pružina, má podle linearizovaného Hookeova zákona tedy tvar

$$F_p = k\Delta l,$$

kde  $\Delta l$  je rozdíl momentální délky pružiny a délky pružiny v klidovém stavu. Zajímá nás, kdy bude tato síla největší (chápáno s orientací nahoru). To zřejmě

nastane ve chvíli, kdy bude hmotný bod  $B$  v nejvyšším bodě kmitavého pohybu, který vykonává. Označme si  $L$  vzdálenost tohoto místa od rovnovážné polohy hmotného bodu  $B$ . Zjevně bude  $L$  rovno vzdálenosti, o kterou jsme pružinu stlačili, neboť neuvažujeme energetické ztráty (maximální výchylky kmitavého pohybu závaží  $B$  budou na obě strany stejné, neboť účinky gravitačního pole jsou již zahrnuty v rovnovážné poloze závaží). Žádné další síly už na hmotný bod  $A$  působit nebudou. Výslednice sil bude mít tedy velikost

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_p - \mathbf{F}_G$$

a závaží  $A$  nadskočí, právě když bude  $\mathbf{F}$  kladná. To nás přivádí k podmínce

$$kL - (M + m)g > 0,$$

což je ekvivalentní podmínce

$$L > \frac{(M + m)g}{k}.$$

Vidíme tedy, že aby závaží  $A$  nadskočilo musíme pružinu stlačit alespoň o něco málo více než o  $L = (M + m)g/k$ . Přičemž si musíme dát samozřejmě pozor, aby byla splněna podmínka  $L < l$ .

### Úloha III.4 ... ubrzdi to

*Po sebepřudším sešlápnutí brzdového pedálu nezačne auto brzdit okamžitě, ale brzdná síla po dobu  $t_r$  lineárně narůstá až na hodnotu  $F_m$ . Koeficient statického třetí mezi pneumatikou a vozovkou je  $f$ . Jakou maximální rychlostí se může tento automobil pohybovat, aby ani při nouzovém brzdění nedošlo ke smyku?*

Nejprve si rozeberme, jaké síly na auto působí. Ve směru svislém je to tíha auta  $G$ , kterou přesně vyrovnává normálová reakční síla  $N$  od silnice. Dále si uvědomme, že brzdy sice působí na kola, která snižují svou úhlovou rychlost, ale to nemá přímý vliv na rychlost auta. Tu snižuje až tření  $T$  mezi koly a silnicí. Kola se sice otáčejí, ale třecí síla na ně stejně působí. Tato třecí síla je právě ona brzdná síla  $F$ , kterou zprostředkovaně působí brzdy na auto.<sup>27</sup>

Podmínka pro neprokluzování kol je

$$T \leq fN,$$

kde  $fN$  označuje maximální sílu, kterou je schopné tření poskytnout. Po překročení této meze už bude platit pouze<sup>28</sup>  $T = fN$ . V tuto chvíli se změní vztah

<sup>27</sup>Rozmyslete si, že při rozjíždění působí motor na kola také pouze momentem síly a auto samo zrychluje až díky tření, které v tomto případě působí ve směru jízdy. I při rozjíždění mohou kola „zahrabat“, a tak platí pro rozjezd bez prokluzu stejná podmínka jako při brzdění.

<sup>28</sup>Ve skutečném případě je koeficient klidového tření častěji vyšší než roven koeficientu smykového tření  $f_k > f_s$ . Tedy při smyku bude brzdná síla  $T = f_s N$  nižší než v mezním případě bez prokluzování kol  $T = f_k N$ .

mezi brzděním kol a zpomalováním auta. Brzdy budou stále působit stejným brzdícím momentem sil na kola, ale tření se silnicí bude najednou nižší a kola začnou prokluzovat.

Z rovností mezi tíhovou a reakční silou a mezi třecí a brzdnou silou dostáváme podmínku, která musí být splněna v každém okamžiku jízdy (brzdění), ve tvaru

$$F \leq fmg.$$

Pokud je maximální brzdná síla  $F_m$  nižší (nebo rovna) než tato hodnota, můžeme bezstarostně brzdít a nikdy se do smyku nedostaneme. Pokud však platí  $F_m > mgf$ , nebudou kola prokluzovat pouze pokud auto stihne zabrzdit dříve než brzdná síla překročí tuto mezní hodnotu.

Protože  $F$  roste lineárně s časem, můžeme ho vyjádřit jako

$$F = F_m \frac{t}{t_r} \leq mgf,$$

což samozřejmě platí pouze pro  $t \leq t_r$ , kde se růst zastaví a brzdná síla bude mít nadále konstantní hodnotu  $F_m$ . To nám ale stačí, protože pokud bude nerovnost splněna v čase  $t_r$ , pak bude splněna i nadále.

Brzdná síla nabude hodnoty  $F_m$  v čase

$$\tau = \frac{mgft_r}{F_m}.$$

Po tuto dobu se auto pohybuje se zrychlením

$$a = -\frac{F}{m} = -\frac{F_m}{m} \frac{t}{t_r}.$$

Z tohoto vyjádření nerovnoměrně zpomaleného pohybu získáme okamžitou rychlost auta jako integrál zrychlení

$$v = \int -\frac{F_m}{m} \frac{t}{t_r} dt = v_0 - \frac{F_m}{2mt_r} t^2.$$

Nás zajímá okamžik zastavení, tedy  $v = 0$ , odkud dostaneme vyjádření pro  $v_0$  jako

$$v_0 = \frac{F_m}{2mt_r} t^2.$$

Vidíme, že původní rychlost  $v_0$  je rostoucí funkcí brzdného času (jak odpovídá zdravému rozumu). Proto, když nás zajímá nejvyšší možná počáteční rychlost auta, použijeme nejvyšší čas, který máme k dispozici, a sice  $t = \tau$ .

$$v_{\max} = \frac{F_m}{2mt_r} \tau^2 = \frac{mg^2 f^2 t_r}{2F_m},$$

což je hledaný výraz pro maximální rychlost auta, aby nedostalo smyk.

Ještě si vypočteme mezní hodnotu zrychlení, kterou si umíme lépe představit díky setrvačné síle, která na nás působí, když sedíme v autě. Kvalitní pneumatika<sup>29</sup> má na silnici koeficient klidového tření  $f = 0,8$ . Z podmínky  $F \leq mgf$  dostaneme

$$a_{\text{mez}} = gf = 0,8g = 7,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2},$$

což je pozitivní, protože většinou brzdíme pozvolněji, a tedy smyk nehrozí.

Protože výraz pro maximální rychlost klesá s maximem brzdné síly  $F_m$ , bude nás zajímat, jaká je maximální rychlost beze smyku obecně v případě, kdy  $F_m \geq mgf$ . Dosadíme tedy do výrazu pro  $v_{\text{max}}$  minimální hodnotu brzdné síly, při které toto nastane, a sice  $F_m = ma_{\text{mez}} = mgf$ . Potom

$$v_{\text{max}} = \frac{gft_r}{2} = 15 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1},$$

pokud jako  $t_r$  bereme jednu vteřinu (reálně to bude spíš méně), tedy toto je opravdu horní odhad rychlosti, při které kola neprokluzují. Celkově vzato, pokud prudce zašlápnete brzdu, dostanete se do smyku téměř bez ohledu na to, jakou jedete rychlostí, pokud právě neparkujete. Pokud se do smyku dostanete i tak, máte pravděpodobně ojeté pneumatiky nebo jste na kluzkém terénu.

### Úloha III.5 . . . sešit dezertér

Na lavici se sklonem  $\alpha = 5^\circ$  leží sešit formátu A4 o hmotnosti  $m$ , mezi lavicí a sešitem působí statická třecí síla s koeficientem  $f_0 = 0,52$ . Poté kdosi do lavice strčí a ta začne kmitat ve směru sklonu desky s frekvencí  $\nu = 10 \text{ Hz}$  a amplitudou  $A = 1 \text{ mm}$ .

- Určete, jakou dodatečnou silou musíme na sešit tlačít (kolmo na lavici), aby se sešit nezačal pohybovat.
- Určete, za jak dlouho sešit spadne z lavice, jestliže je na počátku jeho spodní hrana (ta kratší) na dolním okraji lavice. Dynamický koeficient tření je  $f$ , sešit považujte za tuhou desku.

Pozrime sa na svet otočený o uhol  $\alpha$ . Vtedy je lavica vodorovná a kmitá zvislo, ale tiažové zrýchlenie je od zvislej osi o uhol  $\alpha$  naklonené. Trecia sila pôsobí v smere, v ktorom sa zošit pohybuje alebo chce pohybovať, teda vodorovne.

Tým, že doska kmitá, sa mení sila  $F_p$ , ktorá prtláča zošit na dosku. Konkrétne vieme, že pri harmonických kmitoch závisí poloha dosky na čase podľa vzťahu  $y = A \sin(2\pi\nu t)$ . Dvojitým derivovaním získame zrýchlenie, ktoré pôsobí na dosku  $a_d = -4\pi^2\nu^2 A \sin(2\pi\nu t) = -4\pi^2\nu^2 y$ . Ak zošit leží na doske, pôsobí naňho doska silou  $F = ma_d$ , ktorá mu udeľuje zrýchlenie  $a_d$ .

Tu si ale uvedomme, že zošit nemusí stále ležať na doske. Ak bude maximálna hodnota  $a_d$  väčšia ako hodnota "zvislej" zložky tiažového zrýchlenia  $g \cos \alpha$ , gravitačné zrýchlenie v hornom bode obratu dosky nedokáže na nej držať zošit a ten sa začne lýbať šikmým vrhom, až kým zasa nedopadne na dosku (alebo na zem). Našťastie tento prípad pre naše hodnoty nenastáva; časť b) si ale môžete skúsiť

<sup>29</sup>[http://old.uk.fme.vutbr.cz/zobraz\\_souborace9.pdf?id=245](http://old.uk.fme.vutbr.cz/zobraz_souborace9.pdf?id=245), str. 23

preňho spočítat. Ak ste masochisti, môžete predpokladať aj že zošit sa po dopade na dosku trochu odráža a šmýka.

Ale naspät k úlohe. Sila, ktorá pritláča zošit na dosku, je vektorovým súčtom „zvislej“ (kolmej na dosku) zložky tiažovej sily a sily  $F$ :  $F_p = m(g \cos \alpha - 4\pi^2 \nu^2 y)$ . Vo vodorovnom smere na zošit pôsobí „vodorovná“ zložka tiažovej sily  $F_{gv} = mg \sin \alpha$ , proti ktorej pôsobí trecia sila  $F_t \leq f_0 F_p$ . Na to, aby sa zošit po doske nešmýkal, nesmie  $F_{gv}$  prekročiť maximálnu hodnotu statickej trecej sily, z podmienky  $F_{gv} \leq f_0 F_p$  teda dostávame

$$mg \sin \alpha \leq f_0 m(g \cos \alpha - 4\pi^2 \nu^2 y),$$

$$g \left( \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{f_0} \right) \geq 4\pi^2 \nu^2 y. \quad (27)$$

Je jasné, že ak táto podmienka prestane platiť, bude to pre hodnotu  $y = A$ , teda v hornom bode obratu dosky. Dosadením hodnôt zo zadania ale overíme, že ani vtedy podmienka platiť nenastane... Nuž, číselné výpočty nie sú silnou stránkou matfyzáka. Keď zoberieme  $\nu = 15$  Hz, už vychádza, že sa zošit bez upevnenia z lavice zošmykne. Všimnime si tiež, že tento výsledok nezávisí na hmotnosti zošita. Nestačí teda niečo ťažké naňho položiť, ale potrebujeme ho pritlačiť nejakou pevnou, najlepšie konštantnou silou  $F_a$  (svorka?).

Najmenšia hodnota tejto sily je samozrejme taká, aby nastala rovnováha síl  $F_{gv}$  a  $F_t = f_0 F_p$  v bode  $y = A$ . V tomto prípade platí  $F_p = m(g \cos \alpha - 4\pi^2 \nu^2 A) + F_a$  a tiež  $mg \sin \alpha = f_0 F_p$ , z čoho dostávame pre hmotnosť zošita  $m = 400$  g

$$F_a = \frac{mg \sin \alpha}{f_0} - m(g \cos \alpha - 4\pi^2 \nu^2 A) \doteq 0,3 \text{ N},$$

pričom pre číselné výpočty používame spomenutú hodnotu  $\nu = 15$  Hz.

V časti b) žiadnu ďalšiu silu nemáme. Keď prestane platiť nerovnosť  $F_{gv} \leq f_0 F_p$ , začne pôsobiť dynamická trecia sila  $F_t = f F_p$  a zošit sa začne z lavice zošmykovať so zrýchlením

$$a = g \sin \alpha - fg \cos \alpha + 4\pi^2 \nu^2 f y = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) + 4\pi^2 \nu^2 f A \sin 2\pi \nu t \quad (28)$$

až dotedy, kým z lavice nepadne alebo sa nezastaví. Ak sa zastaví a podmienka (27) neplatí, bude sa ďalej pohybovať dynamickým trením; inak počká, kým sa zasa nedostane do bodu, v ktorom (27) platiť prestane, a cyklus sa opakuje.

V skutočnosti ale vieme povedať, že nastane druhý prípad – zošit počká. Časová závislosť zrýchlenia je totiž len sínusovka posunutá dole (keď  $f > \tan \alpha$ , čo je podmienka na to, aby sa zošit nezsošmykol pri najmenšom otrase) a rýchlosť zošitu je plocha pod grafom zrýchlenia od bodu, v ktorom sa začne pohybovať. Tým, že graf posunieme dole, dosiahneme to, že kladné kopčeky majú menšiu plochu ako záporné. Zošit teda zastaví v bode, kde je zrýchlenie podľa (28) záporné, a vtedy musí byť aj statické trenie silnejšie ako gravitácia, lebo statické trenie je silnejšie ako dynamické ( $f < f_0$ ).

Teraz spravíme celkom rozumný predpoklad, že dráha  $s_0$ , ktorú zošit prejde počas jednej periódy kmitov dosky, bude malá – oveľa menšia ako dĺžka jeho hrany.

Potom môžeme zanedbať časť tejto dráhy, ktorú by prešiel počas poslednej periódy pred spadnutím, a povedať, že čas, za ktorý sa posunie o  $l/2$  (pozor, zošit spadne už keď o polovicu trčí), je  $Tl/2s_0 = l/2s_0\nu$ .

Túto dráhu získame integrovaním. Nech sa zošit začne šmýkať v čase  $t_0$ , kedy  $a = 0$ , a prestane v čase  $t_1$ , kedy  $v = 0$ . Rýchlosť v čase  $t \geq t_0$  dostaneme ako

$$\begin{aligned} v &= \int_{t_0}^t (g(\sin \alpha - f \cos \alpha) + 4\pi^2\nu^2 f A \sin 2\pi\nu t) dt \\ &= g(\sin \alpha - f \cos \alpha)(t - t_0) + 4\pi^2\nu^2 f A \int_{t_0}^t \sin 2\pi\nu t dt \\ &= g(\sin \alpha - f \cos \alpha)(t - t_0) - 2\pi\nu f A [\cos(2\pi\nu t) - \cos(2\pi\nu t_0)]. \end{aligned}$$

Dráhu v čase  $t \geq t_0$  teraz dostaneme ako

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_0}^t g(\sin \alpha - f \cos \alpha)(t - t_0) - 2\pi\nu f A [\cos(2\pi\nu t) - \cos(2\pi\nu t_0)] dt \\ &= g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \frac{(t - t_0)^2}{2} + 2\pi\nu f A \cos 2\pi\nu t_0 (t - t_0) - \\ &\quad - f A [\sin(2\pi\nu t) - \sin(2\pi\nu t_0)]. \end{aligned}$$

Hľadáme dráhu  $s_0 = s(t_1)$ . V čase  $t_0$  platí  $g(\sin \alpha - f_0 \cos \alpha) + 4\pi^2\nu^2 f_0 A \sin 2\pi\nu t_0 = 0$ , teda

$$t_0 = \frac{1}{2\pi\nu} \arcsin \frac{g(f_0 \cos \alpha - \sin \alpha)}{4\pi^2\nu^2 f_0 A};$$

čas  $t_1 > t_0$ , kedy  $v = 0$ , ale nemôžeme jednoducho určiť, lebo sme dostali transcendentnú rovnicu. Neostáva nič iné, ako riešiť numericky. Zvolme si koeficient dynamického trenia  $f = 0,4$  (hodnoty pre drevo a papier nie sú veľmi tabuľkové, ak nešpecifikujeme konkrétnu úpravu dreva, typ papiera atď.). Pre našu frekvenciu  $\nu = 15$  Hz dostávame  $t_0 \doteq 12,3$  ms,  $t_1 \doteq 28,1$  ms (perióda je  $T \doteq 67$  ms) a po dosadení do vzťahu pre dráhu máme  $s_0 \doteq 0,42$  mm, teda čas, za ktorý sa zošit A4 s hranou  $l = 21$  cm zošmykne, je približne 17s.

To vyzerá rádovo rozumne. Ešte môžeme prepočítať celý rozsah  $\nu$ , pre ktoré náš model platí – zošit sa hýbe, ale neodletí, teda

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{A} \left( \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{f_0} \right)} \leq \nu \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g \cos \alpha}{A}}.$$

Vidíme, že pri dolnej limite na frekvenciu kmitov padá dráha do nuly, čo zodpovedá tomu, že sa zošit pohybuje len minimálne. Zdanlivú rýchlosť, ktorou by sa zošit pohyboval, vypočítame ako  $s_0/T$ . Vychádza rádovo v milimetroch za sekundu. V skutočnosti ale zošity padajú rýchlejšie.

## Úloha III.P . . . Lukášova díra

Lukáš posiloval a povedlo se mu vyrobit černou díru o hmotnosti 1 kg. Protože nemá úplně v lásce kvantovou teorii pole na křivém pozadí, tak jeho díra nic nevyzařuje. Lukáš tuto díru upustí a ona začne kmitat uvnitř Země. Zkuste odhadnout, za jak dlouho se hmotnost díry zdvojnásobí. Je nebezpečné si doma pokoutně vyrábět černé díry?

Zamysleme se nejprve, co na nás ze zadání kouká a čím bychom mohli začít. V zadání se dočteme o černé díře a její hmotnosti. Letným pohledem na internet zjistíme, že z těchto údajů dokážeme vypočítat například její poloměr,<sup>30</sup> kterému se také jinak říká Schwarzschildův. Tak si jej spočítáme

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} = 1,5 \cdot 10^{-27} \text{ m},$$

kde  $G$  je gravitační konstanta,  $c$  je rychlost světla a  $M$  je hmotnost černé díry. Poloměr, který nám vyšel, vypadá na první pohled velmi malý. Srovnáme jej tedy s různými fyzikálními rozměry a z toho usoudíme, jakou další fyziku bychom měli uvažovat. Poloměr atomu je přibližně  $(0,3 - 3) \cdot 10^{-10}$  m, musíme se tedy zabývat fyzikou na výrazně menší škále. Průměr jádra je přibližně  $10^{-15}$  m, to je stále ještě o hodně více než velikost naší černé díry. Musí nás proto zajímat fyzika stavby jádra, případně vlastností jádra, ale vlastnostmi elektronového obalu se nebudeme muset tolik zabírat.

Víme již, že černá díra je o hodně menší než atomové jádro. Zamysleme se proto nad druhou částí zadání, tedy tím, že by se černá díra měla být schopna nějak „krmit“. Aby přibírala na váze, musí obědvat hlavně atomová jádra. Máme tedy model: černá díra prolétá krystalovou mřížkou a konzumuje atomová jádra. Jaké síly tedy působí na atomová jádra? Jsou to jednak elektromagnetické síly zprostředkované okolními atomy a samozřejmě také gravitační síla způsobená prolétající černou dírou. Rozhodně zajímavým parametrem bude, v jaké vzdálenosti se tyto dvě síly vyrovnají. Pro velikost gravitační síly budeme moci rozhodně použít Newtonův gravitační zákon (obecná relativita je pouze oprava Newtonova gravitačního zákona pro silné pole), ale co se silou, kterou jsou atomy (tedy i atomová jádra) drženy v krystalové mřížce? Na to žádný jednoduchý model neznáme, ale co víme je, že energie chemických vazeb je přibližně kolem jednoho elektronvoltu.<sup>31</sup> Sílu lze odhadnout z poměru vykonané práce na rozbití chemické vazby a dráhy, na které je tato práce vykonána. V našem případě půjde přibližně o průměr atomu, což je již výše zmíněných  $10^{-10}$  m. Velikost síly, kterou musíme působit na atom, abychom jej vytrhli z krystalové mřížky je tedy přibližně  $F_v \approx 10^{-9}$  N. Můžeme nakonec z Newtonova gravitačního zákona určit jak velký prostor okolo sebe dokáže naše černá díra vyčistit od jader

$$\frac{GMm_j}{d_{\max}^2} = F_v \quad \Rightarrow \quad d_{\max} \approx \sqrt{\frac{GMm_j}{F_v}} \doteq 1 \cdot 10^{-14} \text{ m}.$$

<sup>30</sup>[https://cs.wikipedia.org/wiki/Černá\\_díra](https://cs.wikipedia.org/wiki/Černá_díra)

<sup>31</sup>Elektronvolt je energie, kterou získá elektron, který je urychlen potenciálovým rozdílem jednoho voltu, tedy  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

V této části řešení si už můžeme dovolit zanedbat malé konstanty, jako například nukleonové číslo jádra, jde pouze o přibližný výpočet. Zjistili jsme ale důležitou věc a to, že naše černá díra není schopna vytrhnout jádro z mřížky, ale může jej spořádat pouze tehdy, když jej přímo střetne.

Nyní by se hodila *vsuvka* na téma, kde se může jádro nacházet v rámci svého obalu. Jádra v látce nejsou na svých pozicích klidná, ale vibrují. Tyto vibrace jsou způsobeny nenulovou teplotou látky. Jejich relativní (vůči poloměru atomu) amplituda při pokojové teplotě je přibližně<sup>32</sup> 1% K této hodnotě se zanedlouho vrátíme.

Na jednu cestu skrz Zemi potřebuje černá díra 42 minut  $\doteq 10^3$  s. Kolik atomových jader cestou zasáhne? Prolétá-li díra jedním atomem, s jakou pravděpodobností zasáhne jádro? Tato pravděpodobnost je rovna poměru plochy jádra ku ploše atomu, obojí myšleno v půdorysu. Tento poměr je pro stojící jádro roven asi  $10^{-10}$ . Pro oscilující jádro, viz *vsuvka*, může tento poměr být i dokonce  $10^{-4}$ . Počítejme nadále s první hodnotou a na konci budeme diskutovat i hodnotu druhou. Kolik atomů černá díra potká? To zjistíme jednoduše podělením průměru Země a průměru jednoho atomu

$$N \approx \frac{6\,000\text{ km}}{1 \cdot 10^{-10}\text{ m}} \doteq 6 \cdot 10^{16}.$$

Toto číslo vypadá veliké, ale ve skutečnosti je neskutečně malé. Hlavně proto, že černá díra zvládne konzumovat jen  $10^{-10}$  z jader atomů, kterými prolétá, takže při jednom průletu zkonzumuje přibližně  $10^6$  jader. V jednom kilogramu látky je přibližně  $10^{26}$  atomů, to je tedy počet atomů, který musí černá díra zkonzumovat, aby přibrala stejně, kolik sama váží. To se jí tedy povede za  $10^{20}$  průletů Zemí, což je přibližně  $10^{23}$  s  $\doteq 10^{16}$  let. Tento výsledek odpovídá době asi deset tisíckrát delší než je doba existence vesmíru. Pokud bychom užili pro efektivní průměr jádra vyšší hodnotu, zjistili bychom, že by takováto díra zdvojnásobila svou hmotnost za 130 miliónů let.

Pokud bychom si takovouto díru vyrobili, tak můžeme spolehlivě říci, že by naši civilizaci za našeho života zničit nedokázala a nejspíše bychom si její přítomnosti ani nepovšimli.

Závěrem by se ještě hodilo říci, že pokud díra zkonzumuje atomové jádro, tak získá náboj, a proto pro ní bude velmi výhodné spořádat nějaký z okolních elektronů a tím se držet v elektricky nenabitém stavu. Elektrostatická síla je mnohem silnější než síla gravitační; pokud by tomu takto nebylo, tak by náš model zkolažoval a museli bychom použít jiný.

## Úloha IV.1 ... kofolová

Mějme kofolu s energetickou hodnotou  $Q_k = 1\,360\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  a teplotou  $t_k = 24\text{ }^\circ\text{C}$  a kofolu bez cukru s energetickou hodnotou  $Q_{\text{bez}} = 14,4\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  a teplotou  $t_{\text{bez}} = 4\text{ }^\circ\text{C}$ . Pokud předpokládáme, že v jiných vlastnostech se kofoly od vody neliší, při jaké teplotě můžeme pít směs těchto kapalin tak, aby byla celková získaná energie nulová?

<sup>32</sup>[http://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js11/fyz\\_chem/web/fotony/rot\\_vib.htm](http://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js11/fyz_chem/web/fotony/rot_vib.htm)



Směs obou kofol má energetickou hodnotu  $Q_{\text{kof}} = Q_k p + Q_{\text{bez}} q$ , kde  $p, q$  jsou kladná reálná čísla,  $p : q$  je hmotnostní poměr normální kofoly ke kofole bez cukru ve výsledné směsi a  $p + q = 1$ . Taktéž bude mít teplotu  $t_{\text{kof}} = t_k p + t_{\text{bez}} q$ , neboť obě kofoly mají stejné fyzikální vlastnosti a výsledná teplota je pouhým aritmetickým průměrem.

Teplota uvnitř lidského těla je  $t_0 \approx 37^\circ\text{C}$ . Když směs o teplotě  $t_{\text{kof}}$  vypijeme, ohřeje se uvnitř našeho těla na jeho teplotu, tedy jí musíme nějakou energii odevzdat. Předpokládejme, že hmotnost vypité kofoly je mnohem menší než hmotnost lidského těla, tedy změna teploty těla bude zanedbatelná. Jeden kilogram kofoly přijme při ohřátí teplo  $Q_{\text{oh}} = c_{\text{kof}}(t_0 - t_{\text{kof}})$ , přičemž  $c_{\text{kof}} = c_{\text{voda}} = 4180 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

Abyste byla celková přijatá energie rovna nule, musí platit  $Q_{\text{oh}} = Q_{\text{kof}}$ , tedy

$$c_{\text{kof}}(t_0 - t_k p - t_{\text{bez}} q) = Q_k p + Q_{\text{bez}} q.$$

Upravíme a s podmínkou  $p + q = 1$  dostaneme

$$p = \frac{c_{\text{kof}} t_0 - Q_{\text{bez}} - c_{\text{kof}} t_{\text{bez}}}{Q_k + c_{\text{kof}} t_k - Q_{\text{bez}} - c_{\text{kof}} t_{\text{bez}}},$$

$$q = \frac{Q_k + c_{\text{kof}} t_k - c_{\text{kof}} t_0}{Q_k + c_{\text{kof}} t_k - Q_{\text{bez}} - c_{\text{kof}} t_{\text{bez}}}.$$

Hmotnostní zlomky vynásobíme teplotami  $t_k, t_{\text{bez}}$  a vypočteme

$$t_{\text{kof}} = \frac{t_k (c_{\text{kof}} t_0 - Q_{\text{bez}} - c_{\text{kof}} t_{\text{bez}}) + t_{\text{bez}} (Q_k + c_{\text{kof}} t_k - c_{\text{kof}} t_0)}{Q_k + c_{\text{kof}} t_k - Q_{\text{bez}} - c_{\text{kof}} t_{\text{bez}}}$$

$$= \frac{c_{\text{kof}} t_0 (t_k - t_{\text{bez}}) + Q_k t_{\text{bez}} - Q_{\text{bez}} t_k}{c_{\text{kof}} (t_k - t_{\text{bez}}) + Q_k - Q_{\text{bez}}}.$$

Na kalkulačce dosadíme známé hodnoty (energetické hodnoty v  $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ , teplotu v  $^\circ\text{C}$  a měrnou tepelnou kapacitu v  $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ) a získáme

$$t_{\text{kof}} \doteq 5,7^\circ\text{C}.$$

Je zřejmé, že tedy budeme pít směs, kde bude převážně kofola bez cukru. Pokud by nás zajímal i přesný poměr, snadno nalezneme  $q = 0,914$ .

## Úloha IV.2 ... mozek v mikrovlnce

*Jak daleko musí být člověk od BTS (základnové převodní stanice), aby působení jejího vysílání na mozek bylo srovnatelné s vysíláním mobilu přímo u hlavy? Předpokládejte, že BTS vysílá rovnoměrně do poloprostoru a má vysílací výkon 400 W. Vysílací výkon mobilu je 1 W.*

Keďže mozog má konštantnú veľkosť, tak našou úlohou je nájsť takú vzdialenosť hlavy od BTS vysielača, pri ktorej je rovnaká intenzita žiarenia, ako je intenzita žiarenia v hlave od mobilu, keď držíme mobil pri uchu. Intenzita žiarenia (zvyčajne značená ako  $I$ ) je veličina, ktorá hovorí, aký veľký výkon žiarenia pripadá na

jednotkovou plochu. Například na meter štvorcový povrchu Zeme na rovníku na poludnie dopadá za sekundu žiarenie nesúce 1 360 kJ. Teda možno hovoriť o intenzite žiarenia  $I \approx 1\,360 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ . Intenzita žiarenia sa dá zo vzdialenosti od vysielача  $r$  a výkonu vysielача  $P$  vypočítať z predpokladu, že všetko žiarenie sa rovnomerne rozloží na povrch gule polomeru  $r$ . Plocha gule polomeru  $r$  je  $S = 4\pi r^2$ . Z toho vyplýva, že intenzita žiarenia vo vzdialenosti  $r$  bude

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Odhadnime vzdialenosť mozgu od mobilu ako  $r_m \approx 5 \text{ cm}$ , výkon mobilu označme ako  $P_m = 1 \text{ W}$ , neznámu vzdialenosť mozgu od BTS vysielача ako  $r_v$  a výkon vysielача ako  $P_v = 2P = 800 \text{ W}$ . Keďže v zadaní sa píše o vysielaní do polpriestoru, za výkon vysielача vysielajúceho do priestoru považujeme dvojnásobok výkonu vysielача vysielajúceho do polpriestoru. Inak povedané, aby vysielач vysielal do celého priestoru s rovnakou intenzitou ako teraz do polpriestoru, musel by mať celkový výkon dvojnásobný. Potom z predpokladu rovnosti intenzít žiarenia dostaneme

$$\begin{aligned} I_m &= I_v, \\ \frac{P_m}{4\pi r_m^2} &= \frac{P_v}{4\pi r_v^2}, \\ r_v &= r_m \sqrt{\frac{P_v}{P_m}} \doteq 1,4 \text{ m}. \end{aligned}$$

Teda, ak sa nachádzame zhruba 1,4 m od vysielача, vysielач na náš mozog pôsobí približne rovnako ako pri telefonovaní.

### Úloha IV.3 ... šetřeme lesy

Máme roli toaletního papíru o poloměru  $R = 8 \text{ cm}$  s dutou částí o poloměru  $r = 2 \text{ cm}$ . Každá vrstva namotaného papíru má tloušťku  $d = 200 \mu\text{m}$  a vrstvy na sebe dokonale přiléhají. O kolik útržků více v takové roli máme, pokud má jeden útržek délku  $l_1 = 9 \text{ cm}$ , než když má jeden útržek délku  $l_2 = 13 \text{ cm}$ ? Jako součást řešení vyžadujeme odhad chyby použité aproximace.

Bonus: Vypočtěte přesnou délku spirály, kterou papír vytváří.

Celou úlohu lze zjednodušit na plošný problém, protože délka navinutého papíru na šířce role nezávisí. Máme tedy mezikružší do kterého navijíme dlouhý obdélník o stejné ploše, známé tloušťce a neznámé délce. Porovnáním ploch dostaneme

$$\begin{aligned} S &= \pi(R^2 - r^2), \quad S = ld, \\ \Rightarrow ld &= \pi(R^2 - r^2), \\ l &= \frac{\pi(R^2 - r^2)}{d} \doteq 9\,420 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Vydělíme-li toto délkou útržku, dostaneme počet útržků.

$$n_1 = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{dl_1},$$

$$n_2 = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{dl_2}.$$

Rozdíl je pak

$$\Delta n = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{dl_1} - \frac{\pi(R^2 - r^2)}{dl_2} = \pi(R^2 - r^2) \frac{l_2 - l_1}{dl_1 l_2}.$$

Dosazením dostaneme

$$\Delta n \doteq 322.$$

### Odhad chyby

Největší chyba je způsobena tím, že nevíme, kde přesně je měřený průměr vůči konci papíru. Naše metoda vyžaduje měření v půlce poslední vrstvy, aby byla přesná. Proto můžeme maximální chybu odhadnout na polovinu vnějšího obvodu, tedy přibližně na 25 cm. Ostatní chyby, jako jsou nepřesnosti způsobené nepřesně přiléhajícím papírem na začátku role nebo změnou obsahu při přechodu od obdélníku ke spirále, jsou řádově menší, a proto je lze zanedbat.

### Složitější řešení

Pokud počítáme délku křivky  $s$  v polárních souřadnicích  $(r, \varphi)$ , víme, že

$$s = \int \sqrt{r(\varphi)^2 + \left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)^2} d\varphi.$$

Naši spirálu vyjádříme v polárních souřadnicích

$$r(\varphi) = \frac{\varphi d}{2\pi}; \quad \varphi \in \left\langle \frac{2\pi r}{d}; \frac{2\pi R}{d} \right\rangle.$$

Délka spirály je potom

$$l_i = \int_{2\pi r/d}^{2\pi R/d} \sqrt{\left(\frac{\varphi d}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2} d\varphi =$$

$$= \left[ \frac{d}{4\pi} \left( \varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} + \ln \varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} \right) \right]_{2\pi r/d}^{2\pi R/d}.$$

Dosadíme a zjistíme, že  $l_i \doteq 9420$  cm, což se při použitím zaokrouhlení neliší od výsledku přes obsahy. To není překvapivé – platí  $R^2 \gg d^2$ , a tedy  $(R/d)^2 \gg 1$ . O řád hůře platí stejné nerovnosti i pro  $r$ . Ve výsledném tvaru integrálu pro můžeme zcela vynechat člen s logaritmem, zanedbat jedničku v odmocnině a psát

$$l_i \approx \frac{d}{4\pi} \left(\frac{2\pi R}{d}\right)^2 - \frac{d}{4\pi} \left(\frac{2\pi r}{d}\right)^2 = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{d} = l.$$

Již v předpisu integrálu si lze všimnout, že aproximací  $R^2 \gg d^2$  odebereme člen, který bychom mohli nazvat „spirálním“, tj. ten člen, který zahrnuje odchylku délky spirály od délky soustředných kružnic. Rozdíl

$$l_i - l = 0,004 \text{ cm}$$

je daleko za poslední platnou číslicí, na kterou jsme zaokrouhlili. Největší chyba bude způsobena stejným mechanismem jako předtím, neboť stále uvažujeme, že poloměr byl změřen v koncovém bodě navíjení. Také záleží na tom, zda byl poloměr určen dělením průměru, nebo přímým měřením. Závěrem tedy můžeme pouze zopakovat, že největší chyba není dána aproximacemi při výpočtech, ale neznalostí přesného poloměru.

#### Úloha IV.4 . . . bubliny znovu spojeny!

*Kolik nejméně stejně velkých mýdlových bublinek o poloměru  $r$  se musí spojit, aby vytvořily jednu bublinu, která má poloměr alespoň  $3r$ ? Uvažujte, že vzduch v bublinách má stále stejnou teplotu.*

Aby byla bublina v rovnováze, musí se vyrovnat kapilární tlak mýdlové membrány  $p_k$ , atmosférický tlak  $p_a$  a tlak plynu  $p$  uvnitř, tedy musí platit

$$p = p_k + p_a .$$

Kapilární tlak mýdlové membrány je

$$p_k = \frac{4\sigma}{r} ,$$

kde  $\sigma$  je povrchové napětí membrány a  $r$  je poloměr bubliny. Dále uvažujme zjednodušující předpoklad, že vzduch v bublině se chová jako ideální plyn. Ten má stavovou rovnici

$$pV = nRT ,$$

kde  $p$  je tlak plynu,  $V$  jeho objem,  $n$  látkové množství,  $R$  univerzální plynová konstanta a  $T$  teplota. Pro jednu malou bublinu o poloměru  $r$  tedy z rovnosti tlaků plyne

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\sigma}{r} + p_a\right) V_1 &= n_1 RT , \\ \left(\frac{4\sigma}{r} + p_a\right) \frac{4}{3}\pi r^3 &= n_1 RT , \\ n_1 &= (4\sigma + p_a r) \frac{4\pi r^2}{3RT} , \end{aligned}$$

kde jsme v druhém kroku použili fakt, že bublina je kulová. Obdobně získáme látkové množství ve velké bublině o poloměru  $3r$

$$n_2 = (4\sigma + 3p_a r) \frac{4\pi(3r)^2}{3RT} .$$

Nyní podílem získáme

$$\frac{n_2}{n_1} = 9 \frac{4\sigma + 3p_a r}{4\sigma + p_a r} \stackrel{\text{def}}{=} f(r),$$

což je lineární lomená funkce. Protože  $\sigma$  i  $p_a$  mají kladnou hodnotu, je funkce pro  $r \in (0, +\infty)$  rostoucí,  $f(0) = 9$  a  $\lim_{r \rightarrow +\infty} f(r) = 27$ . Potřebujeme tedy něco mezi 9 a 27 bublinami v závislosti na okolním tlaku, povrchovém napětí a poloměru bublin.

Nakonec si vypočítejme potřebný počet pro běžné hodnoty. Necht atmosférický tlak je standardních 101 kPa, povrchové napětí mýdlové membrány<sup>33</sup> 25 mN·m<sup>-1</sup> a poloměr malých bublin 1 cm. Potřebný počet pak je 27. Z monotonie  $f(r)$  je vidět, že pro větší poloměr bublin budeme tím spíš v tomto limitním případě.

## Úloha IV.5 . . . skluzavka

Na vodorovné ploše jsou rovnoběžně položeny dva stejné kvádry o hmotnosti  $m$  a délce  $l$ . Vzdálenost bližších stěn těchto kvádrů je  $2x_0$ . Mezi kvádry začneme lít vodu objemovým tokem  $Q$ . Na krajích těchto kvádrů jsou mantinely zabráňující odtékání vody z prostoru mezi kvádry. Statický koeficient tření mezi kvádrem a podložkou je  $f_0$  a dynamický  $f$ . Tření mezi kvádry a mantinely neuvažujte. Jaká je podmínka na  $f_0$ , aby se kvádry vůbec nerozpohybovaly? V případě, kdy je  $f_0$  dostatečně malé, vypočítejte závislost zrychlení kvádrů na jejich poloze a vzdálenost, ve které kvádry zastaví.

Veškerý pohyb vody považujeme za dostatečně pomalý, takže v ní nevznikají žádné vlny ani víry, nezahřívá se třením a ani sama nemá žádnou kinetickou energii. Protože je tedy  $Q$  malé, můžete uvažovat, že přilévání další vody po rozpohybování kvádrů nemá na jejich pohyb vliv.

Bonus: Najděte podmínku pro překlopení kvádrů.

První věc, co se hodí zmínit, je, že situace je symetrická na obě strany. Proto budeme vyšetřovat pouze pohyb jednoho kvádrů a ten druhý se bude pohybovat stejně, tedy v každém okamžiku bude mít stejný (s opačným znaménkem) polohový vektor, rychlost i zrychlení.

Na kvádry působí tíhová síla, třecí síla a tlaková síla od vody. Nejprve spočtěme, jak je velká tlaková síla  $F_p$ , když je mezi kvádry vody do výšky  $h$ . Označme  $dy$  tloušťku tenké vrstvy vody v hloubce  $y$ . V této hloubce je hydrostatický tlak o velikosti  $p = y\rho g$  a ten působí na element plochy kvádrů o velikosti  $dS = l dy$ . Zintegrujme působící sílu přes celou výšku vody.

$$\int_0^F dF = \int_0^h y\rho g l dy,$$

$$F = \rho g l \frac{h^2}{2}.$$

<sup>33</sup>[http://physics.about.com/od/physicsexperiments/a/surfacetension\\_5.htm](http://physics.about.com/od/physicsexperiments/a/surfacetension_5.htm)

Ke stejnému výsledku se lze dostat tak, že hydrostatický tlak lineárně roste s hloubkou  $y$ , a tak celkový průměrný tlak na kvádr bude polovina maximálního tlaku v hloubce  $h$ .

Zřejmě maximální tlak na kvádr nastane, když bude celý prostor mezi kvádry vyplněn vodou. Pokud se ani v tomto okamžiku kvádry nerozjedou, pak už se nerozjedou vůbec. Označme výšku kvádry  $H$ , pak podmínka, aby se kvádry nerozpochybovaly, vypadá následovně

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho g l H^2 &< m g f_0, \\ f_0 &> \frac{\rho l H^2}{2m}. \end{aligned}$$

Dále předpokládejme, že  $f_0$  je nižší. V okamžiku, kdy se kvádry začnou pohybovat, nastává rovnost mezi silou tlakovou a silou třecí. Odtud můžeme spočítat výšku hladiny vody v tomto okamžiku,

$$h_0 = \sqrt{\frac{2m f_0}{\rho l}}.$$

Podle zadání je vliv přilévání vody na pohyb zanedbatelný. To je ekvivalentní tomu, že se od tohoto okamžiku už nepřilévá další voda. Zachovává se tedy objem vody mezi kvádry. Voda bude mít v tomto hydrostatickém modelu vodorovnou hladinu<sup>34</sup>, proto píšeme

$$\begin{aligned} V = 2x l h &= 2x_0 l h_0 = 2x_0 l \sqrt{\frac{2m f_0}{\rho l}}, \\ h &= \frac{x_0}{x} \sqrt{\frac{2m f_0}{\rho l}}, \end{aligned}$$

kde přirozeně používáme index 0 pro počáteční hodnoty. Pokud spočítáme sílu, kterou působí voda na kvádr jako tlakovou sílu od přilehlé vrstvy vody (svislé vrstvy), nemusí nás zajímat, co se děje se zbytkem vody a jak tam působí síly. Celkovou sílu působící na kvádr v libovolném okamžiku během pohybu můžeme spočítat jako

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \rho g l h^2 - m g f = m g \left( \frac{f_0 x_0^2}{x^2} - f \right), \\ a &= \frac{F}{m} = g \left( \frac{f_0 x_0^2}{x^2} - f \right), \end{aligned}$$

---

<sup>34</sup> Toto platí jen díky tomu, že zanedbáváme kinetickou energii vody, což znamená, že je rychlost vody celou dobu nulová, a tedy i zrychlení. Ve skutečnosti se však i voda musí pohybovat se zrychlením, jinak by jí kvádr ujel. Pokud si rozdělíme vodu na svislé plátky a napíšeme si pohybové rovnice pro tyto plátky, zjistíme, že jediná působící síla je tlaková od sousedních plátků. Aby bylo zrychlení nenulové (kladné), musí výška vody klesat se vzdáleností od středu. To znamená, že u kvádry bude hladina vody nejnižší, a bude na něj působit síla jiná, než jakou uvažujeme v našem modelu.

kde jsme rovnou spočetli i zrychlení kvádrů v závislosti na jeho poloze.

Nyní vyšetřujeme, kdy kvádr zastaví. První věc, co by mohla někoho napadnout, je, že zastaví, když se síly vyrovnají. Jenže v ten okamžik je pouze zrychlení nulové, ale kvádr má stále nějakou rychlost (dokonce svou maximální rychlost).

Asi nejspolehlivější a nejjednodušší cesta je přes energii.<sup>35</sup> Práce, kterou vykoná síla  $F$  (vykonává voda, ale část energie se disipuje kvůli tření), tedy  $\int F dx$ , je rovna kinetické energii kvádrů. Když kvádr zastaví, bude mít nulovou kinetickou energii. Máme tedy rovnici

$$0 = \int_{x_0}^x F dx = \int_{x_0}^x mg \left( \frac{f_0 x_0^2}{x^2} - f \right) dx = mg \left( f_0 x_0^2 \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} \right) - f(x - x_0) \right),$$

$$f_0 x_0^2 \frac{x - x_0}{x x_0} = f(x - x_0),$$

$$x = x_0 \frac{f_0}{f}.$$

Rozeberme si, co jsme to vlastně získali. Předně je koeficient statického tření vyšší než dynamického, proto se opravdu kvádry rozjedou. Pokud by se koeficienty rovnaly, což je také možné, je třeba si uvědomit, že jsme počítali, kde se kvádr zastaví, když nebudeme přilévat vodu. Pokud bychom ji stále pomalu přilévali, kvádr by se trochu rozjel, ale vzápětí by opět zastavil, protože by hladina klesla zpět pod kritickou výšku. Takže by se kvádr pozvolna odsouval dál, ale rychlost by měl neustále prakticky nulovou. Pro tento limitní případ náš model nefunguje.

### Bonus

Vedle síly působí voda na kvádr i momentem síly, v analogii s předchozím zde působí třecí a tíhový moment. Vztáhneme veškeré momenty vzhledem k ose procházející vnější spodní hranou kvádrů, tedy tou hranou, kolem které hrozí překlolení. Vůči této ose má třecí síla nulový moment. Když označíme šířku kvádrů  $b$ , působí na kvádr tíhová síla momentem o velikosti  $M_G = mgb/2$ . Moment tlakové síly si budeme muset zintegrovat.<sup>36</sup> Využijme toho, že už máme vyjádření pro element síly a pouze ho vynásobme příslušným ramenem elementu síly, čímž získáme element momentu síly

$$dM_P = (h - y)dF = (h - y)\rho g l dy,$$

$$M_P = \int_0^{M_P} dM_P = \int_0^h (h - y)\rho g l dy = \frac{1}{6}\rho g l h^3.$$

<sup>35</sup> Stejně tak bychom mohli řešit diferenciální rovnici  $a = g(f_0 x_0^2/x^2 - f)$  s okrajovými podmínkami  $v(x_0) = v(x_1) = 0$ . K jednoduchému řešení této rovnice se využije trik  $a = dv/dt = dv/dx \cdot dx/dt = dv/dx \cdot v$ , kterým převedeme rovnici na rovnici prvního řádu, navíc separovatelnou.

<sup>36</sup> Někdo si mohl spočítat působíště tlakové síly a pak ho vynásobit výslednou silou, ale působíště se stejně počítá jako poloha, kde by musela výsledná síla působit, aby měla stejný moment síly jako ten, který na těleso opravdu působí. (Síla působí ve výšce  $h/3$ .)

Pokud moment tlakové síly převýší moment tíhové síly, kvádr se nadzdvihne a začne na něj působit ještě moment vztlakové síly, a navíc se i rameno tíhové síly bude zmenšovat, a tak už se kvádr převrátí úplně. Krom tohoto efektu však vztlak nadlehčí kvádr, a tím sníží maximální třecí sílu, a voda kvádr pravděpodobně odnese. To už je ale mnohem složitější problém než naše úloha.

Podmínka pro překlopení kvádrů tedy je, že tlakový moment převýší tíhový alespoň v okamžiku, kdy je ještě kvádr celý na zemi. To nastane když

$$\frac{1}{6} \rho g l h^3 = \frac{1}{2} m g b,$$

$$h^3 = \frac{3mb}{\rho l},$$

tedy hladina vody se musí dostat nad určitou hranici. To se určitě nestane, pokud bude výška kvádrů nižší než tato hranice, tedy pokud bude splněná podmínka

$$H^3 > \frac{3mb}{\rho l}.$$

Porušení této podmínky však stále nezaručí, že se kvádr převrátí. Pokud se rozjede dříve, než se hladina vody dostane do výšky  $\sqrt[3]{3mb/\rho l}$ , bude už hladina vody jen klesat – je tedy třeba, aby při rozjezdu byla výška hladiny vyšší než tato mez. V okamžiku rozjezdu platí  $h^2 = 2mf_0/\rho l$ . Po dosazení za  $h$  do podmínky pro překlopení kvádrů dostáváme

$$\left(\frac{2mf_0}{\rho l}\right)^3 > \left(\frac{3mb}{\rho l}\right)^2,$$

$$\frac{8mf_0^3}{9\rho lb^2} > 1.$$

Abyste tedy kvádr překlopil, musí být současně splněny dvě podmínky, které můžeme spojit do jedné řetězové nerovnosti  $H^3 > 3mb/\rho l > 27b^3/8f_0^3$ . Vidíme, že první a třetí člen můžeme odmocnit, z čehož získáme nutnou, ale ne postačující podmínku překlopení kvádrů, a sice, že rameno tíhové síly musí být menší než  $f_0$ -násobek ramene tlakové síly.

## Úloha IV.P . . . dietní věž

*Jak vysoká věž by se dala postavit z hliníkových plechovek od dietního nápoje kolového typu?*

Při stavění věže z plechoviek musíme řešit ako u každej stavby niekoľko problémov. Na prvý problém nás upozorní statik. Vežu ničím nelepieme a len staviame plechovky na seba, teda si musíme dávať pozor, aby sme ich stavali dokonale rovno. A hneď sa nám ozve ďalší odborník: a čo materiál? Veď hliník je celkom mäkký kov a na plechovky sa používa tenký plech. A potom aj miesto je dôležité. Kde budeme našu vežu stavať, ako ovplyvní stavbu počasie? Zafúka vietor a vežu nám zborí. Poďme si teda rozobrať postupne všetky úskalia.



### Výška veže s ohledem na materiál

Typy plechoviek sa od seba výrazne líšia. My sme zvolili väčšiu plechovku s objemom 0,5 l (predsa len chceme stavať vežu do výšky). Váha takej hliníkovej plechovky sa pohybuje okolo  $m_1 = 20$  g. Najskôr sa skúsme zamyslieť nad tým, čo sa deje, keď plechovku zaťažíme. Isto ste niekedy skúšali stúpiť na plechovku a tak ju „zdemolovať“. Avšak sem-tam sa stalo, že ste sa postavili na plechovku a tá vás bez problémov uniesla. Ako to?

Ak si plechovku predstavíme ako homogénne medzivalčie, tak vás neprekvapí, že ak na vrchnú stenu budeme pôsobiť silou, tak sa všetká prenesie do podstavy a deformácia bude vo všetkých miestach rovnaká. Keď však napätie v materiáli prekročí medz pevnosti, materiál sa poškodí a naša veža padne. Medza pevnosti pre hliník je približne  $\sigma_{Al} \doteq 50$  MPa. Najslabšie miesto celej plechovky je bočná stena. Ak odhadneme<sup>37</sup> jej hrúbku ako  $t = 0,2$  mm a polomer plechovky na  $r = 3$  cm, dostávame približný prierez steny plechovky ako  $S = 2\pi r t$ . Po dosadení máme približný odhad  $S = 3,8 \cdot 10^{-5}$  m<sup>2</sup>.

Takže už jednoducho spočítame, aké zaťaženie spôsobené hmotnosťou  $m$  znesie jedna plechovka:

$$\begin{aligned}\sigma_{Al} &= \frac{F_g}{S}, \\ \sigma_{Al} S &= F_g, \\ 2\pi r t \sigma_{Al} &= mg, \\ m &= \frac{2\pi \sigma_{Al} r t}{g}.\end{aligned}$$

Z čoho po dosadení dostávame  $m = 200$  kg. Prečo ale toto v praxi nefunguje stále? V prvom rade plechovka nie je úplne homogénna. Vyskytne sa slabé miesto, v dôsledku čoho rozloženie záťaže nebude rovnomerné a na steny plechovky budú pôsobiť aj sily nerovnobežné zo stenou. Síce stena plechovky je odolná, keď na ňu pôsobíme pozdĺž steny, ale slabšia, keď pôsobíme kolmo na stenu. Tak poďme ešte spočítať, koľko by sme dokázali takých dokonalých plechoviek poukladať na seba. Jednoducho

$$n = \frac{m}{m_1}.$$

Z toho dostávame  $n = 10\,000$  ks, jednoducho si spočítame aj výšku, ktorá dosahuje  $h = 1\,800$  m pri výške plechovky  $h_1 = 18$  cm.

### Stabilita veže

Predpokladajme teda, že máme dokonalé homogénne plechovky a dokážeme postaviť 10 000 plechoviek na seba. Je nám jasné, že plechovky musíme ukladať s veľkou presnosťou. Aby nám takáto veža nespadla, musí platiť, že priemet ťažiska do roviny podstavy je stále „v podstave“. Ako bolo spomenuté, tak polomer podstavy

<sup>37</sup>Informácie o použití hliníka vo výrobe plechoviek nájdete napríklad tu: <http://packaging.world-aluminium.org/benefits/lightweight.html>.

je  $r = 3$  cm, a teda ťažisko sa nesmie vychýliť o viac ako polomer. Teda musíme plechovky ukladať s presnosťou  $\delta = 2r/n = 6 \cdot 10^{-7}$  m. Toto je iba extrémny prípad, ak by sme uvažovali pri každom uložení rovnakú systematickú asymetrickú chybu položenía. Reálne chyba skôr prislúcha náhodnému rozloženiu, približne gaussovskému. V prípade gaussovského rozdelenia by sme dostali chybu položenía o tri rády vyššiu, ale aj tak presnosť ostáva rádovo na desatinách milimetra, čo je pre obyčajnú plechovku a ruku človeka stále nedosiahnuteľný cieľ.

A čo keby sme mali dokonalé plechovky a dokonalý stroj na stavanie? Čo všetko by taká veža vydržala? Ako by pôsobili „veľkí nepriatelia stavieb“ ako silný vietor, zemetrasenie, tornádo, výbuch sopky, cunami, pád meteoritu, prelet veľkej čiernej diery v blízkosti našej veže. . .

Skoro každý z týchto scenárov sa dá previesť na problém, čo sa stane, keď nám do stavby fúkne vietor. Predstavme si našu vežu tentokrát ako veľký dutý valec o polomere  $r = 3$  cm a výške  $h = 1800$  m. Predpokladajme, že vietor fúka v celej výške konštantnou rýchlosťou  $v$ .

Veža sa nám prevrhne, keď moment sily vetra bude väčší ako moment sily tiaže veže. Veža sa nám bude otáčať (padáť) okolo hrany podstavy, teda aj voči nej budeme vzťahovať momenty síl. V tabuľkách si nájdeme súčiniteľ odporu, ktorý sa pre valec pohybuje okolo  $C = 0,5$ . Vietor, ktorý pôsobí na istú časť plochy veže o výške  $dh$ , nám spôsobí silou veľkosti  $dF$  a momentom sily  $dM = R \times dF$ . Využijeme Newtonov vzorec pre odpor vzduchu

$$F = \frac{1}{2} C \rho v^2 S,$$

kde  $\rho$  je hustota vzduchu,  $v$  rýchlosť vetra a  $S$  je prierez veže, v našom prípade  $S = 2rh$ . Ak chceme len diferenciál sily  $dF$  prislúchajúcej istej elementárnej ploche  $dS$ , tak platí

$$\begin{aligned} dF &= \frac{1}{2} C \rho v^2 dS, \\ dF &= C \rho v^2 r dh. \end{aligned}$$

Ale pozor, táto sila pôsobí kolmo na plochu, nie na vektor  $R$ . Teda potrebujeme vedieť jej určitý priemet. Zároveň si musíme uvedomiť, že naša veža je veľmi vysoká, presnejšie  $h \gg r$ , a pre veľké výšky platí

$$F \approx F_{\text{priemet}}, \quad R \approx h.$$

Potom môžeme spočítať aj veľkosť momentu sily ako

$$\begin{aligned} dM &= h C \rho v^2 r dh, \\ M &= \int_0^h h' C \rho v^2 r dh', \end{aligned}$$

lebo chyba spôsobená integráciou pri malých  $h'$  bude tiež malá.

$$M = C\rho v^2 \int_0^h h' r dh',$$

$$M = C\rho v^2 \frac{1}{2} [(h')^2]_0^h,$$

$$M = \frac{1}{2} C\rho v^2 h^2.$$

Moment, ktorý vytvára tiažová sila, spočítame ako

$$M = F_g r.$$

Potom z rovnosti momentov spočítame medznú podmienku rýchlosti vetra.

$$F_g r = \frac{1}{2} C\rho v^2 h^2,$$

$$mg = \frac{1}{2} C\rho v^2 h^2.$$

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho h^2}}.$$

Po dosadení dostávame medznú rýchlosť  $v = 0,05 \text{ ms}^{-1}$ . Takže našu vežu zhodí aj „bezvetrie“. Na tomto mieste je nutné spomenúť, že pre malé rýchlosti nebude prúdenie turbulentné, ale laminárne, čo by náš odhad mierne zväčšilo.<sup>38</sup>

### A čo tak teroristi alebo neprajníci?

Určite, keď postavíte najvyššiu vežu z plechoviek, tak sa nájdú neprajníci, ktorý vám vašu vežu budú chcieť zbúrať.

Tak si predstavme nášho nepriateľa: ten príde k veži a bude sa ju snažiť zhodiť tým, že na ňu začne tlačiť.

Keď využijeme úvahu ako v predchádzajúcom prípade, tak môžeme povedať, že veža začne padať, keď moment sily od nášho nepriateľa bude väčší ako moment tiažovej sily. Predpokladáme, že nepriateľ je vysoký, a teda pôsobí na vežu vo výške  $v_n = 2 \text{ m}$  silou  $F_n$ .

$$F_g r = F_n h_n,$$

$$F_n = \frac{F_g r}{h_n}.$$

Po dosadení dostávame hodnotu sily  $F_n = 265 \text{ N}$ , z čoho jasne vidíme, že nepriateľ by nemal problém ju zbúrať len opretím sa o našu vežu. Nezabúdajte však, že plechovky považujeme za homogenný dutý valec, prítomnosť plošiek medzi plechovkami by silu ešte znížila.

<sup>38</sup>Hodnoty Reynoldsovho čísla pre náš prípad si môžete zistiť napríklad tu: [http://www.engineeringtoolbox.com/reynolds-number-d\\_237.html](http://www.engineeringtoolbox.com/reynolds-number-d_237.html).

A čo keby sa rozhodol, že by podkopol spodnú plechovku?

V prvom rade, ak takáto sila bude pôsobiť na stenu spodnej plechovky, tak veľmi isto nám spodnú plechovku zdemoluje a tá stratí svoju nosnosť a veža nám spadne. Rozumný a dostatočne presný fyzikálny model pre prípad bočnej deformácie je už náročné vytvoriť, ale sami isto viete, že plechovky sú v tomto ohľade veľmi „tvárne“.

## Úloha V.1 . . . už to teče

Tenký drát s odporom  $R = 100 \text{ m}\Omega$  a dĺžkou  $l = 1 \text{ m}$ , ktorý je pripojen ke zdroji stejnosměrného napětí  $U = 3 \text{ V}$ , obsahuje ve svém objemu  $N = 10^{22}$  volných elektronů, kterými přispívá k toku elektrického proudu. Určete, jak velkou průměrnou (přesněji střední) rychlostí se elektrony v drátu pohybují.

Prvním krokem je zjišťit, jaký protéká drátem elektrický proud. To je z Ohmova zákona  $I = U/R = 30 \text{ A}$ . Elektrický proud je definován jako náboj, který protече průřezem vodiče za jednotku času, tedy  $I = Q/\Delta t$ . Posunou-li se všechny elektrony o (střední) vzdálenost  $\Delta l$  ve směru vodiče, projde průřezem vodiče náboj  $Q = \Delta l \cdot Q_{\text{celk}}/l$ . Celkový náboj volných elektronů ve vodiči určíme jako počet elektronů krát náboj elektronu (z tabulek elementární náboj  $e \doteq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ) a získáme  $Q_{\text{celk}} = -1,6 \text{ kC}$ . Vyjádříme z výše uvedených rovnic  $\Delta l$  a  $\Delta t$ , podělíme a získáme

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{Ql}{Q_{\text{celk}} I},$$

čož můžeme upraviť na

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} \equiv v = \frac{lI}{Q_{\text{celk}}} = \frac{lU}{RNe}.$$

Dosazením zjistiťme, že střední rychlost elektronů v zadaném vodiči je  $v \doteq 2 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ . Vypustili jsme znaménko mínus, neboť směr pro nás není důležitý (elektrony se zřejmě budou pohybovat ke kladnému pólu zdroje). Vidíme, že i když teče drátem velmi vysoký proud, elektrony se rozhodně nepohybují rychlostí světla, jak by si neznalý člověk mohl naivně myslet. Poznamenejme ještě, že kdyby byl drát například měděný, došlo by téměř okamžitě k jeho přetavení.

## Úloha V.2 . . . mnohočasticová

Mějme nádobu, která je pomyslně rozdělena na dvě shodné disjunktní oblasti A a B. V nádobě je  $n$  částic, z nichž se každá nachází s pravděpodobností 50 % v části A a s pravděpodobností 50 % v části B. Určete, s jakou pravděpodobností bude v části A  $n_A = 0,6n$ , resp.  $n_A = 1 + n/2$  částic. Řešte pro  $n = 10$  a  $n = N_A$ , kde  $N_A \doteq 6 \cdot 10^{23}$  je Avogadrova konstanta.

O úloze se lépe přemýšlí jako o posloupnosti bitů, jeden bit pro každou částici. Když je částice v části A, je hodnota 1, pro částici v části B bude hodnota příslušného bitu 0.

*Případ  $n = 10$*

Obě otázky se slily do jedné: „Kdy je v části A 6 částic z 10?“ Předpokládáme, že částice jsou navzájem odlišitelné. Potom všech možných rozdělení částic mezi části A a B je  $2^{10} = 1024$  (počet všech možností pro 10 bitů) a všech možných šestic, které mohou v části A být, je  $\binom{10}{6} = 210$ . Tomuto se říká kombinační číslo, které je definováno

$$\binom{n}{k} = n!/[k! \cdot (n - k)!],$$

kde symbol ! znamená faktoriál. Tedy pravděpodobnost, že v části A bude právě 6 částic, je  $p = 210/1024 \doteq 0,205$ .

*Případ  $n = N_A$*

První otázka: „Kdy je v části A počet částic roven  $0,6N_A$ ?“ druhá „Kdy je v části A počet částic roven  $N_A/2 + 1$ ?“ Rádi bychom použili stejný postup, ale čísla, která vycházejí při mezivýpočtech, jsou moc velká (zkuste si například spočítat  $2^{N_A}$ , to je mnohem větší číslo, než je kalkulačka schopna si zapamatovat). Musíme tedy postupovat opatrně.

V prvním případě má být v části A celkem  $3N_A/5$  částic a v druhém případě je v části A celkem  $N_A/2 + 1$  částic. Pravděpodobnosti, že tyto situace nastanou, jsou menší než pravděpodobnost, že částice budou rovnoměrně rozděleny (z vlastností kombinačních čísel). Budeme tedy počítat pravděpodobnost, že jsou částice rovnoměrně rozděleny mezi obě poloviny. Spočítáme to stejně jako v první části, jen si budeme muset dávat větší pozor.

Nejprve si povězme, jakou použijeme strategii. Rádi bychom si shora omezili kombinační číslo  $\binom{2n}{n}$  pro  $n$  jdoucí k nekonečnu (pro jednoduchost), pokud možno aby se nám v tomto odhadu vyskytovala nějaká mocnina dvojky, pak se pravděpodobnost bude hezky krátit. Tedy si výraz napíšeme a upravujeme:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots 2n}{(1 \cdot 2 \cdots n)^2} \cdot \frac{2^{2n}}{2^{2n}} = \frac{2^{2n}(1 \cdot 2 \cdots 2n)}{(2 \cdot 4 \cdots 2n)^2}.$$

To si ještě můžeme upravit:

$$\frac{2^{2n}(1 \cdot 2 \cdots 2n)}{(2 \cdot 4 \cdots 2n)(2 \cdot 4 \cdots 2n)} = 2^{2n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} = 2^{2n} p.$$

Nyní budeme  $p$  odhadovat shora. Uvažme součin:

$$1 \geq \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right) = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdots \frac{(2n - 1)(2n + 1)}{(2n)^2} = (2n + 1)p^2.$$

Tedy:

$$p \leq \frac{1}{\sqrt{2n + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Tak jsme si šikovně omezili  $p$ . Tedy pravděpodobnost, kterou chceme spočítat, je:

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = p \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Pro velká  $n$  je  $1/\sqrt{2n}$  opravdu malé číslo, přesněji pro  $N_A$  je to zhruba  $9,1 \cdot 10^{-13}$ . Tedy i obě pravděpodobnosti v druhé části se blíží nule, neboť jsou menší než pravděpodobnost, že rozdělení je rovnoměrné.

Je také užitečné si uvědomit, v jakém poměru jsou vůči sobě pravděpodobnosti pro  $0,6N_A$  a  $N_A/2 + 1$ . Když si tyto pravděpodobnosti rozepíšeme podle výše uvedeného vzorečku a podělíme, dostaneme, že poměr první pravděpodobnosti ku druhé je

$$\frac{(0,5N_A - 1)(0,5N_A - 2) \cdots (0,4N_A + 1)}{0,6N_A(0,6N_A - 1) \cdots (0,5N_A + 2)} = \frac{0,5N_A - 1}{0,6N_A} \cdot \frac{0,5N_A - 2}{0,6N_A - 1} \cdots \frac{0,4N_A + 1}{0,5N_A + 2}.$$

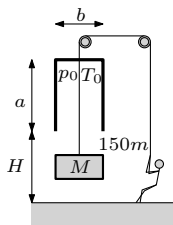
Všimneme si, že každý ze zlomků je menší než  $5/6$ , tedy poměr pravděpodobností se dá shora odhadnout číslem  $(5/6)^{0,1N_A - 1} \approx 10^{-10^{22}}$ , což je také maličké. Tedy pravděpodobnost pro  $N_A + 1$  je řádově mnohem větší než pravděpodobnost pro  $0,6N_A$ .

Úloha se také dala pěkně spočítat s využitím Stirlingova vzorce pro odhad faktoriálu, který odhaduje  $n!$  jako

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Po dosazení by se výrazy pokrátily a vyšly pravděpodobnosti blížíící se nule – už jenom jejich (desítkové) logaritmy jsou přibližně  $-2 \cdot 10^{23}$ , tedy jejich hodnoty jsou kolem  $10^{-2 \cdot 10^{23}}$ . Toto řešení je samozřejmě také úplně správné, zde jsme ale chtěli ukázat, že to jde spočítat i středoškolskými metodami.

### Úloha V.3 ... egyptská brána



Ve starověkém Egyptu uměli vyrobit bránu, ale ještě neznali mříže, tak brány zavírali nilany (vápencovými kameny). Na obrázku vidíte 150 otroků o hmotnosti  $m = 60$  kg, kteří právě velmi pomalu otevírají bránu zavřenou nilanem o hmotnosti  $M = 8$  t. Nilan přesně (vzduchotěsně) pasuje do konstrukce nad bránou ve tvaru kvádra, která má vnitřní rozměry  $a = 3$  m,  $b = 0,5$  m a  $c = 3$  m. Uvnitř konstrukce je na počátku tlak  $p_0 = 100$  kPa a teplota  $T_0 = 300$  K a je umístěna ve výšce  $H = 3$  m. Určete, jak vysoko jsou otroci schopni vlastní vahou nilan zdvihnout, jestliže se teplota vzduchu nemění.

Nilan je zvedán na kladce, tedy silou stejné velikosti, jakou jsou otroci přitahováni k Zemi. Otroci váží  $150m = 9$  t. Budou proto svojí vahou zvedat kámen silou

$$F_1 = F_{\text{otroci}} - F_{\text{nilan}} = (m_{\text{otroci}} - m_{\text{nilan}})g, \quad (29)$$

kde  $g$  je gravitační zrychlení, do té doby, než se vrchní plocha dotkne konstrukce.

Jakmile se tak stane, uzavře nilan v konstrukci plyn. Pro výpočet budeme uvažovat ideální chování plynu. Kámen se bude chovat jako píst, který stlačuje plyn v konstrukci. Teplota vzduchu se dle zadání nemění. Jedná se tedy o izotermický děj. Teplota se v každém okamžiku vyrovnává s teplotou okolí, pracujeme tedy se sledem rovnovážných stavů. Také platí Boyleův-Mariottův zákon  $pV = \text{konst.}$  Protože objem plynu se bude snižovat, musí se tlak plynu zvyšovat. Na píst působí síla

$$F_2 = S\Delta p = bc\Delta p, \quad (30)$$

kde  $S$  je povrch vrchní stěny nilanu,  $b$  a  $c$  jsou délky vrchních hran a  $\Delta p$  je změna tlaku v důsledku změny objemu (na nilan působí tlak plynu shora i atmosférický tlak zdola, proto je síla úměrná jejich rozdílu  $\Delta p$ ).

Označme stav, kdy se nilan začne dotýkat konstrukce, jako stav 0. Stav 1 nastane ve chvíli, kdy bude kladka v rovnováze. Nutně platí rovnice  $p_1V_1 = p_0V_0$ . Tlak  $p_0$  známe, objem  $V_0$  spočítáme jako součin délek hran  $abc$ .  $p_1$  je větší než  $p_0$ , označme si ho proto jako  $p_0 + \Delta p$ .  $V_1$  můžeme také vypočítat jako součin délek hran. Délky  $b$  a  $c$  se nezmění, ale „výška“ plynu v konstrukci ano. Označme si tento nový rozměr jako  $a'$ . Po dosazení do Boyleova–Mariottova zákona máme

$$\begin{aligned} p_0abc &= (p_0 + \Delta p)bc a', \\ \Delta p &= p_0 \frac{a - a'}{a'}. \end{aligned} \quad (31)$$

Z rovnováhy na kladce (nilan se zvedá pomalu) víme, že kámen se zastaví, právě když  $F_1 = F_2$ . Porovnáním rovnic (29) a (30) zjistíme, že

$$(m_{\text{otroci}} - m_{\text{nilan}})bcg = \Delta p.$$

Dosazením změny tlaku z rovnice (31) a vyjádřením  $a'$  máme téměř hotovo.

$$\begin{aligned} p_0bc \frac{a - a'}{a'} &= (m_{\text{otroci}} - m_{\text{nilan}})g, \\ a' &= \frac{p_0abc}{(m_{\text{otroci}} - m_{\text{nilan}})g + p_0bc}. \end{aligned}$$

Číselně  $a' \doteq 2,8$  m. My ale máme určit, jak vysoko jsou otroci schopni nilan zdvihnout, to je vzdálenost  $((H - x) + (a - a'))$ , kde  $H$  je výška konstrukce nad zemí,  $x$  výška nilanu,  $a$  výška samotné konstrukce a  $a'$  konečná „výška“ plynu v konstrukci. Výšku nilanu zjistíme z hustoty vápence, kterou můžeme najít na internetu.<sup>39</sup> Vezmeme střední hodnotu  $2\,800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Z toho lze vypočítat výšku nilanu jako

$$x \doteq \frac{m_{\text{nilan}}}{\rho_{\text{nilan}}bc}.$$

Číselně  $x \doteq 1,9$  m.

Vzdálenost  $R$ , o kterou otroci zvednou kámen, je  $R = H - x + a - a'$ . Po číselném dosazení máme  $R \doteq 1,3$  m.

<sup>39</sup> <https://sk.wikipedia.org/wiki/Vápenec>

## Úloha V.4 . . . bezpečná jízda

Máme auto, které se blíží kolmo ke zdi. Řidič, který v autě jede, by se ale chtěl přibližovat ke zdi bezpečně. Jaký by muselo mít auto průběh rychlosti, aby vzdálenost od auta ke zdi v každý okamžik odpovídala dráze, kterou by auto s okamžitou rychlostí v té chvíli urazilo za  $T = 2\text{ s}$ ?

V zadání máme slovně popsanou závislost okamžité rychlosti na vzdálenosti od zdi. Vyjádříme ji ze známého středoškolského vzorce

$$v(s) = \frac{s}{T}.$$

Získat závislost na čase už je podstatně složitější, musíme řešit diferenciální rovnici

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\frac{s(t)}{T}. \quad (32)$$

Záporné znaménko v rovnici musí být, abychom se ke zdi přibližovali a ne se od ní vzdalovali. Řešení se dá uhodnout, hledáme funkci, jejíž derivace je násobkem původní funkce. To splňuje exponenciální funkce tvaru  $f(x) = e^x$ , v našem případě je to

$$e^{-\frac{t}{T}}.$$

či její libovolný násobek. Z počátečních podmínek zjistíme konkrétně

$$s(t) = s_0 e^{-\frac{t}{T}},$$

kde  $s_0$  je vzdálenost v čase  $t = 0$ . Závislost rychlosti na čase pak získáme pomocí vztahu  $v = s/T$ , obdržíme

$$v(t) = \frac{s_0}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Z vlastností této funkce vidíme, že řidič se ke zdi blíží bezpečně, protože v konečném čase do zdi nenarazí. Rychlost je vždy záporná, neboť se měřená vzdálenost  $s(t)$  v čase zmenšuje. Snadno můžeme určit, jaká byla počáteční rychlost  $v_0$  pro zvolenou počáteční vzdálenost  $s_0$ . Počáteční rychlost bude při zvyšování hodnoty daného  $T$  klesat.

Formálně lze diferenciální rovnici (32) řešit jak přes separaci proměnných, tak přes charakteristický polynom lineární diferenciální rovnice. Jako příklad uveďme první z metod, aplikace by v náznu vypadala takto:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\frac{s}{T}, \\ dt &= -\frac{T}{s} ds, \\ \int dt &= -\int \frac{T}{s} ds, \\ t &= -T \ln s + C, \\ s &= C e^{-\frac{t}{T}}, \end{aligned}$$

kde  $C$  je integrační konstanta (na každém řádku nabývá obecně jiné hodnoty). Za domácí úkol si můžete zkusit postup přes charakteristický polynom.

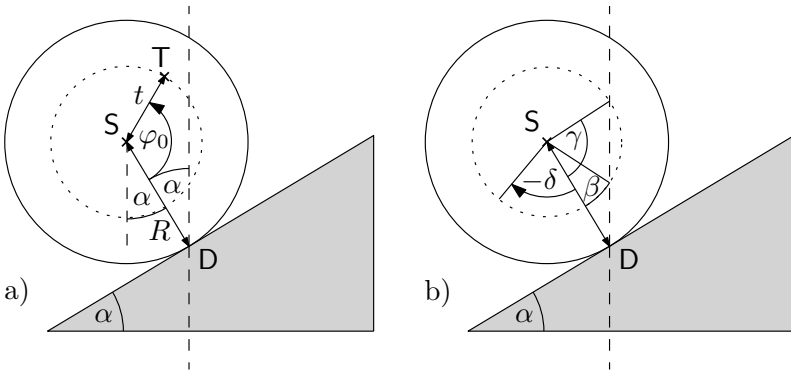


## Úloha V.5 ... Rolling Stones

Na nakloněné rovině stojí koule s nehomogenním rozložením hustoty. Známe úhel sklonu nakloněné roviny  $\alpha$ , poloměr koule  $R$  a vzdálenost  $t$  těžiště koule od jejího středu. Pokud si označíme střed koule  $S$ , bod dotyku koule s rovinou  $D$  a těžiště koule  $T$ , pak definujeme úhel  $\varphi_0 = \angle DST$  jako úhel před začátkem pohybu. Těžiště se navíc nachází v rovině určené úsečkou  $DS$  (normálou k rovině) a směrem z kopce dolů. V závislosti na těchto parametrech podrobně rozeberte, jak se bude dál vyvíjet pohybový stav koule. Koule na rovině neprokluzuje.

Přístupme k problému rozborem momentu sil působících na kouli vzhledem k ose procházející bodem dotyku s rovinou (bod  $D$ ) a kolmé k obrázku 5. Ze znaménka tohoto momentu budeme soudit, jakým směrem se začne koule valit. Protože na kouli působí pouze její tíha a podložka, volíme jako vztážný bod (resp. osu) takový, kde do momentu mluví pouze tíhová síla. V bodě  $D$  na něj totiž působí ještě normálová reakční síla od podložky a tečná třecí síla. Vzhledem ke středu koule bychom tedy museli do celkového působícího momentu sil započítat ještě vliv třecí síly. Třecí sílu *nelze* zanedbat – bez ní by se koule nemohla otáčet, ale pouze klouzat.

Nejprve si rozeberme, kde je jaký úhel na obrázku 5. Spojnice  $SD$  se od svislého směru odklání o  $\alpha$ , a tedy od vodorovného směru o  $\pi/2 - \alpha$ .



Obr. 5: Náčrt situace. Část a) ukazuje počáteční parametry, část b) dopočtené významné úhly. Velikosti úhlů jsou pouze orientační.

Nyní si zdefinujeme pomocnou veličinu  $r$  jako vodorovnou složku polohy těžiště  $T$  vzhledem k bodu dotyku  $D$  (kladná směrem do kopce). Tu si můžeme vyjádřit jako

$$r := -R \sin \alpha + t \sin(\varphi + \alpha).$$

Pokud bude pro všechny  $\varphi$  platit  $r \leq 0$ , bude se koule určitě už jen valit dolů. Pokud neplatí ostrá nerovnost, může rovnost nastat pouze v izolovaných bodech (konkrétně pouze v jednom, a to ve  $\varphi = \pi/2 - \alpha$ ). V tomto bodě je koule ve vratké

rovnováže – při sebemenší výchylce na libovolnou stranu bude platit  $r < 0$  a koule se rozjede dolů.

Hledejme, jakým nastavením parametrů dosáhneme toho, aby alespoň na nějakém intervalu  $\varphi$  bylo  $r > 0$ . Do výrazu pro  $r$  přispívá kladnou hodnotou pouze druhý člen, který bude maximální pro  $\sin(\varphi + \alpha) = 1$ . Odtud dostáváme první výsledek, že zajímavé věci se mohou dít pouze, pokud platí

$$t > R \sin \alpha .$$

Dále tedy rozebíráme jen tento případ, protože jinak koule prostě sjede dolů.

Nyní najdeme hodnoty  $\varphi$ , ve kterých nastává rovnováha, jinak řečeno  $r = 0$ . Řešením této rovnice dostáváme dvě řešení (otočení o  $2\pi$  nás nezajímá), které si označíme jako  $\beta$  a  $\gamma$ ,

$$\begin{aligned} \beta &:= \varphi_1 = \arcsin\left(\frac{R}{t} \sin \alpha\right) - \alpha, \\ \gamma &:= \varphi_2 = \pi - \alpha - \arcsin\left(\frac{R}{t} \sin \alpha\right). \end{aligned}$$

Z oboru hodnot funkce arcsin je vidět  $\beta < \gamma$  a z obrázku je zřejmé, že  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2} - \alpha)$ , a tedy platí také  $\gamma \in (\pi/2 - \alpha, \pi - 2\alpha)$ . Nyní můžeme říci, že pro  $\varphi \in (\beta, \gamma)$  je  $r$  kladné, jinak je záporné (pohybujeme se pouze na intervalu  $(-\delta, 2\pi - \delta)$ , kde úhel  $\delta \in (0, \pi)$  později šikovně zvolíme, abychom mohli říkat, co je děje pro  $\varphi$  na intervalech, nikoli jejich sjednoceních).

Pro  $\varphi \in (0, \pi/2 - \alpha)$  se při valení dolů zvyšuje  $r$  a pro  $\varphi \in (\pi/2 - \alpha, \pi - 2\alpha)$  se při valení dolů snižuje  $r$ . Rozmyslete si, že proto platí, že v  $\beta$  je stabilní rovnováha a v  $\gamma$  vratká.

Pokud  $\varphi_0 \in (\beta, \gamma)$ , pojedou koule nahoru, bude zrychlovat, po překročení hranice  $r = 0$  bude zpomalovat, až zastaví. Následně se rozjede dolů, bude zrychlovat, zpomalovat a nakonec zastaví opět ve  $\varphi_0$  (ZZE). Proto pro všechny  $\varphi_0$  mezi  $\beta$  a  $\gamma$  bude koule kmitat. Také pro nějaký interval záporných  $\varphi_0$  bude koule kmitat (právě zde poprvé zastavila koule v předchozím myšleném pokusu).

Nyní se věnujme nalezení záporného mezního úhlu  $-\delta$ , do kterého bude ještě koule kmitat. Určitě platí  $-\delta \in (-\pi, 0)$ , protože pro  $\varphi = -\pi \equiv \pi$  bude těžiště ve výšce (ve smyslu úhlů)  $\pi - \alpha$ , což je výše než pro  $\varphi = \gamma$ , kdy je těžiště ve výšce  $\pi - \arcsin((R/t) \sin \alpha)$ , protože pro  $\alpha \in (0, \pi/2)$  platí

$$\begin{aligned} \sin \alpha &< \frac{R}{t} \sin \alpha, \\ \alpha &< \arcsin\left(\frac{R}{t} \sin \alpha\right). \end{aligned}$$

A tedy, když sjede koule níže, bude mít energii dostatečnou, aby se těžiště dostalo nad hranici  $\varphi = \gamma$  a dále pokračovalo ve sjezdu dolů.

Pokud se koule rozjede z  $-\delta$ , bude zrychlovat z kopce dolů, pak zpomalovat, až zastaví mezi  $\beta$  a  $\gamma$ . Protože pro všechny úhly mezi  $\beta$  a  $\gamma$  včetně, existuje nějaký úhel  $\varphi \in (-\pi, 0)$ , kde se koule zastaví a obrátí, musí  $-\delta$  odpovídat právě  $\gamma$ . Nyní

kouli vypustíme z bodu  $\varphi_0 = -\delta$  a ona zastaví v  $\gamma$ , mezi oběma stavy se tedy zachovává potenciální energie (kinetická je nulová). To také znamená, že těžiště je ve stejné výšce. Při přechodu od  $-\delta$  ke  $\gamma$  sjede koule dolů o  $R(\gamma + \delta) \sin \alpha$  a těžiště se otočí nahoru o  $-t \cos(\alpha + \gamma) + t \cos(\delta - \alpha)$ . Dostáváme tedy rovnici pro  $\delta$

$$R(\gamma + \delta) \sin \alpha - t(\cos(\delta - \alpha) - \cos(\alpha + \gamma)) = 0.$$

Levou stranu rovnice označme jako  $h(\delta)$ . Kvůli lineárnímu členu platí, že pro vysoká kladná čísla  $h(\delta)$  roste do nekonečna a pro vysoká záporná čísla (v absolutní hodnotě) klesá  $h(\delta)$  do minus nekonečna. Pro derivaci  $h(\delta)$  platí

$$h'(\delta) = R \sin \alpha + t \sin(\delta - \alpha) > R \sin \alpha(1 + \sin(\delta - \alpha)) \geq 0.$$

Tedy  $h(\delta)$  je rostoucí na  $(0, \pi)$  a rovnice  $h(\delta) = 0$  má právě jedno řešení. Protože při vypuštění koule z  $\gamma$  se koule někde zastaví a obrátí (a to někde je přesně  $-\delta$ ), musí to řešení být z přípustného intervalu. Rovnici sice nelze vyřešit obecně, ale pro libovolné konkrétní hodnoty  $t, \alpha, \varphi_0$  z ní numericky dostaneme požadovanou dolní mez  $-\delta$  (resp. dostaneme  $\delta$ ).

Při rozjezdu z úhlu  $-\delta$  se koule zastaví v úhlu  $\gamma$ , který představuje vratkou rovnováhu mezi kmitáním a sjezdem z kopce dolů. Proto je i  $-\delta$  vratkou pozicí, nicméně ne pozicí rovnovážnou.

Teď už máme všechny údaje potřebné k finálnímu rozboru.

1.  $t \leq R \sin \alpha$ : koule pojede dolů
2.  $t > R \sin \alpha$ :
  - $\varphi_0 \in (-\delta, \gamma)$ : koule bude kmitat okolo  $\varphi = \beta$
  - $\varphi_0 = -\delta$ : vratká pozice mezi kmitáním okolo  $\beta$  a sjezdem dolů
  - $\varphi_0 = \gamma$ : vratká rovnováha mezi kmitáním okolo  $\beta$  a sjezdem dolů
  - $\varphi_0 \in (\gamma, 2\pi - \delta)$ : koule pojede dolů

Nezapomínejte však, že  $\beta, \gamma, \delta$  jsou parametry závislé na  $t, \alpha, R$ .

Nyní si ještě rozeberme limitní případy z našeho rozboru. Pro  $\alpha = 0$  bude koule kmitat na místě (zkuste si vypočítat hodnoty  $\delta$  a  $\gamma$ ). Pro  $\alpha = \pi/2$  sjede koule dolů pro libovolné  $t$ , protože musí být nutně menší než  $R$ . Pro  $t = 0$  pojede koule dolů a pro  $t = R$  bude koule kmitat nezávisle na sklonu kopce.

Zvlášť musíme vzít případy, kdy mají oba dva parametry svou limitní hodnotu. V případě  $t = 0, \alpha = 0$  se nic dít nebude a pro  $t = R, \alpha = \pi/2$  koule sjede dolů. Zbylé dva případy už odpovídají předchozímu rozboru, a sice pro  $t = R, \alpha = 0$  bude koule kmitat a pro  $t = 0, \alpha = \pi/2$  sjede koule dolů.

## Úloha V.P ... metrová

*Jak všichni víme, v jeskyních střední Evropy je docela zima, okolo 4 °C. Proč je v metru docela teplo celý rok? Uvolňuje se více tepla z přítomných lidí, nebo spíše z technického zázemí?*

Nejprve se zamysleme, jak je to s těmi jeskyněmi. Když dohledáme teploty<sup>40</sup> v českých jeskyních, zjistíme, že se pohybují zhruba od 6 °C do 14 °C. V jeskyních systémech tedy zřejmě může být i poměrně vysoká teplota. Důvod, proč jsou jedny

<sup>40</sup>Převzato z rešerše [https://is.muni.cz/th/327651/prif\\_b/Novakova\\_reserse.pdf](https://is.muni.cz/th/327651/prif_b/Novakova_reserse.pdf).

chladnější a jedny teplejší, je celkem prostý. Je to dáno propojením s venkovním prostředím. Pokud se v jeskyni nachází podzemní část toku řeky, budou v jeskyni velké teplotní výkyvy v průběhu roku, neboť v zimě se teplota vody nachází v intervalu od 0 °C do 4 °C, zatímco v létě může bezpečně přesahovat 20 °C. Bez podobných vnějších vlivů se teplota v jeskyních udržuje na dlouhodobém teplotním průměru venkovního vzduchu,<sup>41</sup> který v České republice činí 7,5 °C.<sup>42</sup> Geotermální energie v rozumných hloubkách ještě nehraje roli, neboť její nárůst v zemské kůře činí přibližně 0,025 °C·m<sup>-1</sup>.<sup>43</sup>

Nyní se podíváme na situaci v pražském metru. Čím se liší? V první řadě si musíme uvědomit, o jakých částech metra se bavíme. V povrchových či mělce hloubených stanicích se nebude teplota příliš lišit od venkovního prostředí. Jde tedy především stanice metra ve větší hloubce, jaké nacházíme např. na lince B (nejhlubší je stanice Náměstí Míru, jejíž nejnižší bod je v hloubce<sup>44</sup> 51 m). Pro fyzika to může být trochu zklamání, ale zdůvodnění vyšších teplot v metru je poměrně prosté – zajišťuje ho vzduchotechnika. V metru jsou jednak větrány služební a technologické místnosti kvůli komfortu zaměstnanců (to není pro naše účely příliš zajímavé) a jednak je tam zřízeno tzv. hlavní větrání. Funguje v letním a zimním režimu. V chladných obdobích je vzduch z mezistaničních prostorů odváděn do stanic, zatímco v létě se směr větrání obrátí. Z toho nijak neplyne, že se v létě v metru zchladíme. Skutečně, v metru může být i větší horko než na povrchu. To by nás nemělo překvapovat, v hornických šachtách tomu není jinak. Ochladit nás může leda proudící vzduch tlačенý blížící se vlakovou soupravou.

Zbývá však zjistit, odkud se bere teplo v mezistaničních úsecích. Geotermální energii jsme již zavrhlí – blíže k povrchu se sice můžu dostat ohřátá spodní voda (znáte např. geotermální jezírka), ale z metra je veškerá průsaková voda odsávána.<sup>45</sup> Potřebujeme tedy odhadnout, kolik tepla se vytvoří při provozu metra. Celková roční spotřeba elektřiny metra je<sup>46</sup> 225 GWh. Jelikož metro v dlouhodobém průměru nepřekonává žádný výškový rozdíl, převede se veškerá energie v důsledku na teplo, ať už při překonávání třecího odporu, brzdění nebo při Jouleově ohřevu vodičů – budeme počítat s přibližnou hodnotou  $8 \cdot 10^{14}$  J za rok. Tunely v metru pojmu zhruba  $8 \cdot 10^5$  m<sup>3</sup> vzduchu,<sup>47</sup> který má tepelnou kapacitu  $C = 10^9$  J·K<sup>-1</sup>. Kdyby se ohřívál v metru pouze vzduch, zvedla by se jeho teplota za pouhý den o zhruba 200 °C. Je však zřejmé, že velké množství tepla pojmu stěny – jakou část, to nedokážeme dobře odhadnout. Spokojíme se tedy s tím, že energie k tvorbě tepla máme dostatek.

Proč není tedy teplo i ve stanicích? To můžeme zdůvodnit tím, že se metro pohybuje a tedy i spotřebovává energii především mimo stanici – to však není příliš silný argument. Protiargumentem nám jest prostě rozlehlost stanic. Jednoduše

<sup>41</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Volumetric\\_heat\\_capacity#Thermal\\_inertia](https://en.wikipedia.org/wiki/Volumetric_heat_capacity#Thermal_inertia)

<sup>42</sup><http://portal.chmi.cz/historicka-data/pocasi/uzemni-teploty>

<sup>43</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Geothermal\\_gradient](https://en.wikipedia.org/wiki/Geothermal_gradient)

<sup>44</sup><https://www.metroweb.cz/metro/TECH/vzduchotechnika.htm>

<sup>45</sup><http://www.enviweb.cz/clanek/doprava/89645/odpadove-hospodarstvi-prazskeho-metra>

<sup>46</sup><http://www.dpp.cz/dopravni-podnik-mezirocne-usetril-na-energiich-167-mil-kc/>

<sup>47</sup><http://fykos.cz/rocnik26/reseni/reseni5-5.pdf>

řečeno v nich je obsažen větší objem vzduchu, jehož ohřátí trvá i díky jeho špatné tepelné vodivosti déle.

Ještě musíme zmínit jeden aspekt, a tím jsou lidé. Člověk vyzařuje jako černé těleso s výkonem 100 W; tuto přibližnou hodnotu lze získat ze Stefanova-Boltzmannova zákona.<sup>48</sup> Pražské metro přepraví v průměru  $1,6 \cdot 10^6$  osob denně. Pokud odhadneme, že každý člověk stráví v metru zhruba 15 min  $\sim 1000$  s, zjistíme, že za rok vyzáří energii  $6 \cdot 10^{13}$  J. To je o řád méně než teplo vyprodukované metrem. Jako nezanedbatelný se vliv vyzařování lidských těl projeví až ve vozu metra, kde se stísněný prostor vyhřeje rychleji. Zde naopak dominuje před teplem z technického provozu.

Naše poznatky jsou tedy následující – zvýšená teplota v metru oproti jeskyním je dána odvodem teplého vzduchu z mezistaničních prostor, kde byl vzduch ohřát v důsledku disipace tepla při provozu metra. Teplo vyzařované lidmi nabývá významu pouze ve stísněných prostorech, jako je například vůz metra.

## Úloha VI.1 ... mám toho plnou hlavu

*V roce 2015 byla udělena Nobelova cena za fyziku za experimentální prokázání oscilace neutrin. O neutrinech jste už jistě někdy slyšeli a možná víte, že s látkou interagují jen velmi slabě, a proto dokáží bez zpomalení proletět Zemí a jinými velkými objekty. Zkuste za pomoci literatury a internetových zdrojů určit, kolik neutrin se v jednom okamžiku nachází v průměrném člověku. Nezapomeňte citovat zdroje!*

Protože o neutrinech je zatím poměrně málo přesných informací a také protože toto je jednoduchá úloha, budeme problém řešit pouze řádově. Z kombinace internetových zdrojů<sup>49</sup> vyplývá, že většina neutrin je takzvané reliktní (pozůstatek po velkém třesku) a jejich částicová hustota je  $n \sim 100 \text{ cm}^{-3}$ . Nyní stačí odhadnout objem člověka na základě hustoty těla  $\rho \sim 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  (jako voda) a hmotnosti  $m \sim 100 \text{ kg}$ . Vynásobením hustoty neutrin a objemu člověka dostáváme pro počet neutrin  $N$  řádový odhad

$$N = n \frac{m}{\rho} = 10^7$$

neutrin v lidském těle.

Na internetu se dají najít i jiné údaje. Například v jednom pořadu České televize<sup>50</sup> se tvrdí, že neutrinový tok ze Slunce je u Země  $j \sim 10^{11} \text{ cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$  neutrin. Jejich rychlost je řádově  $c \sim 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ .<sup>51</sup> Teď trochu abstrakce. Rozdělme si objem člověka  $V$  na plochu  $S$  a tloušťku  $w$ . Víme, že počet neutrin  $10^{11}$  se nachází

<sup>48</sup>Podle [https://en.wikipedia.org/wiki/Black-body\\_radiation#Human\\_body\\_emission](https://en.wikipedia.org/wiki/Black-body_radiation#Human_body_emission) zodpovídají další způsoby ztráty tepla (především konvekce) za méně než polovinu celkového ztrátového výkonu, náš odhad je tedy postačující.

<sup>49</sup><https://cs.wikipedia.org/wiki/Neutrino>, <https://icecube.wisc.edu/info/neutrinos>

<sup>50</sup><http://www.ceskatelevize.cz/ivysilani/10252839638-hyde-park-ct24/211411058080926/>

<sup>51</sup>Zda je jejich rychlost světelná či o něco nižší není pro řádový odhad důležité.

v objemu kvádrů o jedné stěně  $S$  a třetím rozměru  $10^{10}$  cm. Z trojčlenky je jasné, že počet slunečních neutrin v člověku je

$$N' = jS \frac{w}{c} = j \frac{V}{c} = \frac{j m}{\rho c} = 10^6.$$

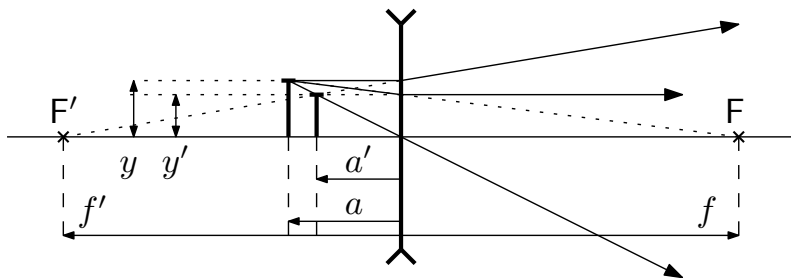
Většina neutrin přítomných v člověku tedy pochází z kosmického pozadí.

## Úloha VI.2 ... dioptrická

*Pikošova kamarádka nosí brýle. Když si je nasadí, její oči se zdají menší. Je krátkozraká či dalekozraká? Svou odpověď dobře zdůvodněte.*

Brýle budeme považovat za tenkou čočku. Rozbor situace je na obrázku 6. Vyjdeme z Gaussovy zobrazovací rovnice ve tvaru

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}, \quad (33)$$



Obr. 6: Zobrazení oka (předmětu) rozptylnou čočkou. Poměry vzdáleností neodpovídají skutečnosti, jinak by chudák kamarádka měla velmi, velmi špatné oči.

kde  $a$  je (orientovaná, v předmětovém prostoru záporná, v obrazovém prostoru kladná) vzdálenost předmětu (oka) od čočky,  $a'$  je (opět orientovaná) vzdálenost obrazu od čočky a  $f'$  je obrazová ohnisková vzdálenost čočky (kladná pro spojku, záporná pro rozptylku). Je-li velikost předmětu  $y$  a jeho obrazu  $y'$ , pak příčné zvětšení vypočítáme jako

$$M = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}. \quad (34)$$

Jestliže z rovnice (34) vyjádříme  $a'$  a dosadíme je do zobrazovací rovnice (33), dostaneme

$$f' = -a \frac{M}{M-1} = |a| \frac{M}{M-1}, \quad (35)$$

kde jsme využili toho, že  $a < 0$  (oko je v této úloze předmět). Jestliže se oko zdá menší, je zvětšení  $|M| < 1$ , zároveň víme, že  $M > 0$  (oko nevidíme převráceně). Z rovnice (35) pak plyne, že  $f' < 0$ . Čočka je tedy rozptylka, a tedy Pikošova kamarádka je krátkozraká.

## Úloha VI.3 . . . jedeme z kopce

Autem o hmotnosti  $M$  jedeme nahoru do kopce a dolů ze stejného kopce se sklonem  $\alpha$  stejnou rychlostí  $v$  se zařazeným stejným převodovým stupněm, a tedy stejnými otáčkami motoru. Jaký je rozdíl tažného (do kopce) a brzdného (z kopce) výkonu motoru?

Pokud se auto pohybuje přímočaře konstantní rychlostí, podle druhého Newtonova zákona je výslednice všech působících sil nulová. V našem případě stačí, pokud se vyrovná tečná složka ve směru jízdy auta, protože normálovou vždy vyrovná působení podložky.

Na auto působí odporové síly. Aniž bychom příliš rozebírali jejich velikost, tak to jsou především aerodynamický odpor, valivý odpor a třecí momenty v motoru, které budou působit vždy proti směru pohybu (což je sympatická vlastnost odporových sil), kdy se třecí moment přes kola (předpokládáme, že neprokluzují) převede na „běžnou“ odporovou sílu.

Další působící silou je tíhová síla, kterou rozdělíme na tečnou (ve směru pohybu) a normálovou složku. Velikost tíhové síly je  $Mg$ , z rozkladu sil pak zjistíme, že velikost tečné složky je rovna  $Mg \sin \alpha$ . Normálová složka je, jak už jsme zmínili, nezajímavá, neboť nevyčísľujeme valivý odpor, který je i tak zanedbatelný oproti aerodynamickému odporu prostředí.

Tečná složka v jednom případě (z kopce) působí ve směru pohybu a vyrovnává odporové síly a brzdou sílu motoru. Ve druhém (do kopce) míří proti směru pohybu, a tedy musí být spolu s odporovými silami vyrovnána tažnou silou motoru. Proto bude tažná síla motoru rovna součtu tečné složky tíhové síly a brzdné síly, která je rovna součtu všech sil odporových

$$F_{\text{Tah}} = F_{\text{Tíha}} + F_{\text{Odpor}},$$

$$F_{\text{Brzda}} = F_{\text{Tíha}} - F_{\text{Odpor}}.$$

Jestliže platí vzorec  $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ , můžeme i výsledný výkon tažné síly motoru rozdělit na výkon potřebný k překonání brzdných sil a tečné složky tíhové síly.

Pokud brzdny výkon (získaný pomocí  $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ ) rozdělíme na výkony jednotlivých sil, dostaneme

$$P_{\text{Tah}} = P_{\text{Tíha}} + P_{\text{Odpor}},$$

$$P_{\text{Brzda}} = -P_{\text{Tíha}} + P_{\text{Odpor}}.$$

Z toho je už vidět, že hledaný rozdíl bude

$$P_{\text{Tah}} - P_{\text{Brzda}} = 2Mgv \sin \alpha.$$

Na situaci se můžeme podívat i tak, že motor koná brzdou práci kladnou, neboť působí proti vnějším změnám, potom bychom získali

$$|P_{\text{Tah}}| - |P_{\text{Brzda}}| = 2F_{\text{Odpor}}v.$$

Ještě poznamenejme, že v úloze nepředpokládáme aktivní brzdění pomocí nožní brzdy, pak bychom samozřejmě nebyli schopni výkon určit. Užíváme efektu známého pod názvem *motorová brzda*.

## Úloha VI.4 . . . fire in the hole

Pro ohřev plasmatu ve fúzních zařízeních se používají svazky neutrálních částic. V takovém zařízení se nejprve urychlí ionty deuteria na vysokou energii a následně se přenosem náboje neutralizují, přičemž si zachovávají téměř původní rychlost. Na tokamaku COMPASS mají částice na výstupu ze svazku energii 40 keV a proud ve svazku těsně před neutralizací je 12 A. Jaká síla působí na generátor svazku? Jaký je jeho výkon?

Při přenosu náboje téměř nedochází ke změně kinetické energie deuteria ve svazku, takže můžeme říct, že rychlost jednotlivých neutrálních částic bude stejná jako rychlost iontů těsně před vstupem do neutralizátoru. Protože ionty svým pohybem vytvářejí elektrický proud, můžeme úlohu vyřešit tím, že se na něj blíže zaměříme. V první části úlohy využijeme jeho definici

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (36)$$

tj. že velikost elektrického proudu je určena časovou změnou náboje, a druhého Newtonova zákona

$$F = \frac{dp}{dt}, \quad (37)$$

přičemž  $q$  je elektrický náboj,  $p$  hybnost částice a  $t$  čas. Hybnost částice je definována jako součin její hmotnosti a rychlosti  $p = mv$ . Pro použití 2. NZ musíme zjistit, který člen se v čase mění. Protože ze zadání víme, že rychlost částic se nijak nemění, může to být jen hmotnost. A také to hmotnost je, protože počet částic vypuzených z injektoru časem roste. Vyjádření 2. NZ, které použijeme, je toto:

$$F = v \frac{dm}{dt}, \quad (38)$$

Změnu hmotnosti v čase si vyjádříme z elektrického proudu, protože víme, že každé částici o hmotnosti  $m_0$  přísluší náboj  $q_0$  ( $dq = \frac{q_0}{m_0} dm$ ). Rovnici (36) můžeme přepsat jako

$$I = \frac{q_0}{m_0} \frac{dm}{dt}, \quad (39)$$

což říká, že  $\frac{dm}{dt} = I \frac{m_0}{q_0}$ . Rychlost částice zjistíme z definice kinetické energie,  $v = \sqrt{\frac{2E}{m_0}}$ . Po dosazení do (38) dostáváme:

$$F = \frac{I}{q_0} \sqrt{2Em_0}, \quad (40)$$

takže pokud dosadíme hodnoty ze zadání, dostaneme výsledek  $F = 0,49$  N. K tomu musíme vědět, že deuterion (jádro těžkého vodíku) má hmotnost  $m_0 \doteq 3,34 \cdot 10^{-27}$  kg a náboj  $q_0 \doteq 1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Vzhledem k tomu, že samotné zařízení váží několik tun, je to poměrně zanedbatelná hodnota.

Spočítat výkon svazku je jednodušší, pokud si představíme urychlující část jako obvod, v němž je napětí  $U = 40$  kV a prochází jím proud  $I = 12$  A. Pak výkon



spočítáme jako  $P = UI = 480 \text{ kW}$ . Je nutno říct, že ve skutečnosti je výkon svazku po neutralizaci o něco menší (asi  $320 \text{ kW}$ ), protože je přece jenom nějaká část energie iontům odebrána při výměně náboje.

## Úloha VI.5 . . . závody částic

V homogenním magnetickém poli  $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ ,  $B_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$  obíhají po kružnicích v rovině  $xy$  dvě částice, elektron s hmotností  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  a nábojem  $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  a alfa částice s hmotností  $m_{\text{He}} = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  a nábojem  $2e$ . Poloměr trajektorie elektronu je  $r_e = 2 \text{ cm}$ , poloměr trajektorie alfa částice je  $r_{\text{He}} = 200 \text{ m}$ . V jednom okamžiku zapneme slabé homogenní elektrické pole  $\mathbf{E} = (0, 0, E_0)$ ,  $E_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ . Určete, jaké dráhy  $s_e$  a  $s_{\text{He}}$  urazí každá z částic za čas  $t = 1 \text{ s}$  od zapnutí elektrického pole. Předpokládejte, že částice jsou dostatečně vzdálené a nevyzařují.

Na nabitou částici v elektromagnetickém poli působí Lorentzova síla

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

kde  $q$  je náboj částice a  $\mathbf{v}$  její rychlost. Dokud je elektrické pole nulové, pohybuje se částice po kružnici a působí na ni pro zadané  $\mathbf{B}$  dostředivá síla

$$F_{\perp} = qv_{\perp}B_0 = \frac{mv_{\perp}^2}{r_L},$$

kde  $r_L$  nazýváme Larmorův poloměr a  $m$  je hmotnost částice. Velikost rychlosti  $v_{\perp}$ , kterou se částice pohybuje po kružnici, je potom

$$v_{\perp} = \frac{qB_0r_L}{m}.$$

Po zapnutí elektrického pole přibude konstantní síla ve směru polí

$$F_{\parallel} = qE_0,$$

v čase  $t$  tedy bude mít částice paralelní rychlost

$$v_{\parallel} = \frac{F_{\parallel}}{m}t = \frac{qE_0}{m}t.$$

Uvědomme si, že silové působení obou polí na částici je v navzájem kolmých směrech pouze díky speciální konfiguraci tohoto problému, pro libovolné směry polí by rozklad nebyl takto triviální. Složením obou rychlostí vidíme, že pohyb probíhá po helikální trajektorii, přičemž sklon šroubovice narůstá. Naším úkolem je určit délku šroubovice. V průmětu do roviny  $xy$  urazí elektron dráhu

$$s_{e\perp} = \frac{eB_0r_e}{m_e}t,$$

kde jsme dosadili ze zadání konkrétní hodnoty náboje, hmotnosti a Larmorova poloměru pro elektron. Ve směru  $z$  se pohybuje elektron rovnoměrně zrychleně a urazí dráhu

$$s_{e\parallel} = \frac{eE_0}{2m_e} t^2.$$

Rozvinutím šroubovice do roviny  $xz$  nám ukáže, že délka celé šroubovice bude rovna délce paraboly, která má vrchol v bodě  $[0, 0]$  (bod, kde se nacházela částice v okamžiku zapnutí  $\mathbf{E}$ ) a prochází bodem  $[s_{e\perp}, s_{e\parallel}]$ . Máme tedy parabolu tvaru  $y = ax^2$ , dosazením krajních bodů vyjádříme  $a = s_{e\parallel}/s_{e\perp}^2$ . Nyní už můžeme určit celkovou dráhu

$$\begin{aligned} s_e &= \int_0^{s_{e\perp}} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^{s_{e\perp}} \sqrt{1 + 4a^2 x^2} dx = \\ &= \left[ \frac{x}{2} \sqrt{1 + 4a^2 x^2} + \frac{1}{4a} \sinh^{-1}(2ax) \right]_0^{s_{e\perp}}, \end{aligned}$$

kde jsme využili substituci tvaru  $2ax = \sinh z$ . Po dosazení mezí

$$\begin{aligned} s_e &= \sqrt{\frac{s_{e\perp}^2}{4} + s_{e\parallel}^2} + \frac{s_{e\perp}}{4s_{e\parallel}} \sinh^{-1} \frac{2s_{e\parallel}}{s_{e\perp}} = \\ &= \frac{et}{2m_e} \sqrt{(B_0 r_e)^2 + (E_0 t)^2} + \frac{eB_0^2 r_e^2}{E_0 m_e} \sinh^{-1} \frac{E_0 t}{B_0 r_e}. \end{aligned}$$

Pro alfa částici bychom postupovali zcela analogicky. Lze si všimnout, že s rostoucím časem se bude  $s_e$  blížit  $s_{e\parallel}$ , poměr vzdáleností  $s_e/s_{He}$  se tedy bude blížit  $m_{He}/(2m_e)$ . Výsledné dráhy jsou po dosazení zadaných hodnot  $s_e = 4,4 \cdot 10^6$  m a  $s_{He} = 4,9 \cdot 10^5$  m. Jedná se však o zvláštní závod, protože částice jsou urychlovány opačnými směry. Jelikož jsme však za měřítko úspěchu zvolili celkovou uraženou dráhu, elektron vyhraje. Nakonec ještě poznamenejme, že rychlejší z částic (elektron) se pohybuje zhruba setinovou rychlostí světla, není proto ještě nutné zahrnout relativistické efekty.

## Úloha VI.P . . . i-jablko

*Vymyslete co nejlépe způsobů, jak sestavit zařízení, které pozná, jakým směrem je natočeno vůči směru tíhového zrychlení a tuto informaci nějakým způsobem převede na elektrický signál. (Zařízení na způsob akcelerometru v chytrých telefonech.)*

Zadání je poměrně obecné, nspecifikuje, jak se bude informace o orientaci dále využívat (otočení fotografie, prostředek k ovládní telefonu, detekce pohybu telefonu). To ovlivňuje parametry navrhovaného zařízení jako přesnost detekované orientace, či latence poskytnuté orientace.<sup>52</sup> Dle striktního výkladu zadání by naše zařízení mělo fungovat i ve volně padajícím výtahu (neboť směr tíhové zrychlení

<sup>52</sup>U fotoaparátu nám nevádí, pokud orientaci snímku zjistíme až při ukládání, pokud bychom však informaci potřebovali např. pro ovládní hry, je jakákoli postřehnutelná latence na obtíž.

se nezmění, jen se k pozorovanému zrychlení přičte zrychlení pozorovatele v neinerciální soustavě).

Výstupem zařízení by měla být přinejmenším dvojice úhlů, která reprezentuje orientaci zařízení (představujeme si například bod na jednotkové kouli, která je pevně spojená se zařízením). V konečném důsledku budeme chtít tato data zpracovávat digitálně, a tak onen elektrický signál může být výstup z A/D převodníku anebo například výstup ze snímače kamery.

Nyní se pojďme zamyslet nad různými přístupy.

Náš problém již vyřešila evoluce u bezobratlých živočichů v podobě orgánu obecně zvaného *statocysta*. Jde o dutinku, v níž se může pohybovat drobný předmět (*statolit*) a tento pak silově působí na vnitřní povrch dutiny, což je nakonec převedeno na nervový signál. U savců (včetně člověka) tuto funkci plní *vestibulární aparát*, v němž je tělísko nahrazeno tekutinou. Naše zařízení založené na tomto principu by tedy mohlo být dutou koulí, na jejíž vnitřní straně jsou kontakty, které jsou spojovány menší vodivou kuličkou pohybující se uvnitř.

Nejenom evoluce, ale i řemeslníci mají odpověď na naši otázku – olovnice. Pro naše účely by měla být závaží na tuhém ramenu, přičemž v čepu by se úhel naklonění měřil například potenciometrem. Pro zjištění úplné orientace v prostoru by byly potřeba dvě olovnice operující v kolmých rovinách s možností „přetočení“, aby zařízení fungovalo i vzhůru nohama.

Obě zatím navržena zařízení by přestala fungovat v padajícím výtahu, ostatně to je problém všech přístupů, které nějakým způsobem zužitkovávají (nerozlišitelné) efekty setrvačného zrychlení a gravitace.

Abychom toto obešli, musíme využít nějakou další znalost o směru tíhového zrychlení. Pokud magnetické pole Země zjednodušíme tak, že magnetické siločáry kopírují zemské poledníky, pak platí, že tíhové zrychlení je vždy kolmé na směr magnetické indukce. Tento přístup by nám určil rovinu, v níž se tíhové zrychlení nachází, ale nikoli směr (přímku).<sup>53</sup>

Již jsme se dotkli toho, že tíhové zrychlení je ve vztahu se zemským povrchem (téměř kolmé), kdybychom dokázali určit naši orientaci vůči zemskému povrchu, zjistíme tak i námi požadovanou orientaci vůči tíhovému zrychlení. Nabízí se tedy metoda vytvořit zařízení ze dvou GPS modulů, které by zjišťovaly pozici vzhledem k Zemi a z těchto dvou poloh bychom již mohli dopočítat orientaci zařízení. Očekávaná přesnost pozice z GPS je 5 metrů<sup>54</sup> a bez nějakého vyčíslování odhadneme, že vzdálenost přijímačů by musela být řádově alespoň srovnatelná s touto délkou. Takové zařízení by tedy nebylo praktické pro přenos ani manipulaci.

Námořníci používali pozorování nebeských objektů k určení své polohy, my tak můžeme informaci z (jediného) GPS modulu a polohy nebeských těles využít k určení orientace. Chytré telefony bývají vybaveny kamerami, které zabírají poměrně

<sup>53</sup>Pro náčrt této ideje jsme zjednodušili model zemského magnetického pole a tíhové zrychlení jsme efektivně nahradili gravitačním. Problém zjišťování orientace vůči směru tíhové zrychlení jsme pak převedli na problém zjišťování směru vůči magnetické indukci, jímž se v této úloze podrobněji zabývat nebudeme.

<sup>54</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Global\\_Positioning\\_System](https://en.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System)

významnou část sféry kolem telefonu, a tak (pokud není zataženo nebo nejsme v interiéru) v některé z nich uvidíme Slunce či Měsíc. Tyto objekty jsou v obraze jasně rozpoznatelné a lokalizovatelné a pokud kameru zkalibrujeme,<sup>55</sup> můžeme určit její orientaci vůči směru k danému nebeskému tělesu – ze znalosti zeměpisné polohy a času, pak zjistíme i směr tíhové zrychlení vůči tomuto směru. Z hlediska naší úlohy takto však zjistíme jen rovinu,<sup>56</sup> v níž se nachází tíhové zrychlení (srovnejte s orientací vůči magnetickému poli Země). Pro úplné určení směru bychom tak potřebovali kamerami snímat alespoň dvě kosmická tělesa, což už nemusí být tak jednoduché ať kvůli detekci (ve dne prakticky vyloučeno), tak rozpoznání (které těleso je které).

Dalším způsobem, jak zjišťovat orientaci by byl gyroskop, který při vhodném uchycení zachovává směr osy své rotace a naše zařízení by mohlo určovat svou orientaci právě vůči tomuto směru, jenž by se při počáteční kalibraci svázal se směrem tíhové zrychlení. Setrvačníků v praxi používají letecké přístroje (umělý horizont), mobilní zařízení využívají gyroskopy s vibrujícími závažičky,<sup>57</sup> jež jsou ovlivňována Coriolisovou silou při rotaci.

Výčet nápadů zakončíme tím, jenž se též prakticky využívá – neurčíme jenom směr tíhové zrychlení, ale i jeho velikost.<sup>58</sup> Díky superpozitivnímu principu stačí umět sestrojít jen jednorozměrný akcelerometr a pak spojit dva nebo tři (pokud chceme, aby naše zařízení fungovalo opravdu ve všech orientacích) kolmo na sebe pro zjištění vektoru zrychlení.

Zrychlení v jedné ose můžeme měřit mnoha způsoby: poloha závaží na pružince, efekt závaží na tlakový senzor, měření doby pádu nebo energie dopadu (pád „po kolejnicích“) nebo měření periody kyvadla. Zřejmě ne všechny způsoby jsou vhodné k integraci do přenosného zařízení, ale nejprůhodnější je kombinace prvního a druhého způsobu za využití piezoelektrického jevu, případně ovlivňování kapacity kondenzátoru polohou závaží.

Prezentovali jsme různé více či méně reálné návrhy zjišťování orientace vůči tíhovému zrychlení. V nejjednodušších aplikacích bychom vystačili s kuličkou propojující kontakty na vnitřních povrchu koule. Vyšší přesnosti bychom dosáhli použitím sady kolmých akcelerometrů, případně doplněné sadou gyroskopů, pokud znalost orientace vůči tíhovému zrychlení nebyla dostatečná (rotace kolem svislé osy).

<sup>55</sup> Ilustrace možného postupu <https://youtu.be/ViPN810E0SU>.

<sup>56</sup> Uvažujte, že máte v hledáčku jen Slunce. Jakékoli otočení kamery kolem optické osy pak definuje nový směr zrychlení (linii horizontu nebereme v potaz).

<sup>57</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Vibrating\\_structure\\_gyroscope](https://en.wikipedia.org/wiki/Vibrating_structure_gyroscope)

<sup>58</sup> Zde připouštíme volnější výklad zadání, kdy určujeme orientaci vůči celkovému zrychlení přístroje, nikoli jen tíhovému.



## Zadání experimentálních úloh

### Úloha I.E ... malé gé

8 bodů

Změřte místní tíhové zrychlení alespoň dvěma odlišnými metodami. Tyto metody následně zevrubně porovnejte. *(řešení str. 78)*

### Úloha II.E ... je mi to šumák

8 bodů

Kupte si v lékárně šumivý celaskon nebo cokoliv, co se podává v tabletách určených k rozpuštění ve vodě. Změřte, jak dlouho trvá rozpuštění jedné tablety v závislosti na teplotě vody, do které ji hodíte. Diskutujte příčiny a vymyslete, proč je pozorovaná závislost taková. *(řešení str. 96)*

### Úloha III.E ... hydrogel

8 bodů

Změřte závislost hmotnosti hydrogelové kuličky na době ponoření do vody a na koncentraci soli rozpuštěné ve vodě. *(řešení str. 101)*

### Úloha IV.E ... trhni si!

8 bodů

Změřte mez pevnosti kancelářského papíru v tahu. Ideálně použijte co nejméně potíštěnou část brožurky, ve které vám přišlo zadání (pro tisk je využíván papír  $80 \text{ g}\cdot\text{m}^2$ ). *(řešení str. 105)*

### Úloha V.E ... fotografická

7 bodů

Pomocí digitálního fotoaparátu změřte frekvenci střídavého proudu v síti. Postačí i chytrý telefon s vhodnou aplikací, která umožní nastavit přesnou hodnotu expozičního času. *(řešení str. 109)*

### Úloha VI.E ... zákeřný restituční koeficient

8 bodů

Pokud pustíte hopík či jiný pružný míček na vhodný povrch, pak se začne odrážet. Při každém odrazu se disipuje (ztrácí do tepla, zvuku atd.) kinetická energie míčku a ten proto nevyskočí do počáteční výšky. Definujme koeficient restituace jako poměr kinetické energie míčku po dopadu ku kinetické energii před dopadem. Závisí koeficient restituace na výšce, ze které míček dopadal? Vyberte si jeden vhodný míček a jeden vhodný povrch (měření na více površích s více míčky samozřejmě náležitě oceníme), na kterém proměříte závislost koeficientu restituace na výšce, ze které míček dopadl. Experiment náležitě popište a proveďte dostatečný počet měření. *(řešení str. 112)*

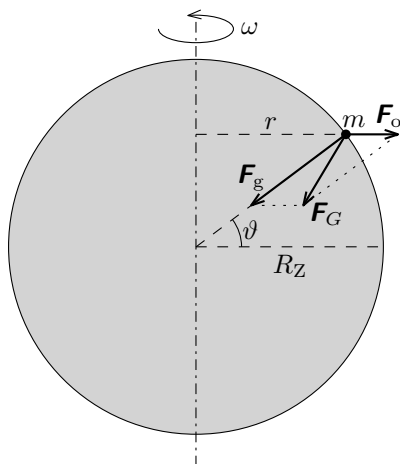


## Řešení experimentálních úloh

### Úloha I.E ... malé gé

Změřte místní tíhové zrychlení alespoň dvěma odlišnými metodami. Tyto metody následně zevrubně porovnejte.

Na každé těleso na povrchu Země působí gravitační síla Země  $\mathbf{F}_g$  a síla odstředivá  $\mathbf{F}_o$  způsobená rotací Země kolem své osy. Výslednicí těchto dvou sil je síla tíhová  $\mathbf{F}_G$  (viz obrázek 7).



Obr. 7: Tíhová síla  $\mathbf{F}_G$  je výslednicí gravitační síly  $\mathbf{F}_g$  a odstředivé síly  $\mathbf{F}_o$ . Poměr velikostí obou sil na obrázku neodpovídá skutečnosti.

Jelikož velikost odstředivé síly závisí na vzdálenosti  $r$  od osy rotace, a tedy na zeměpisné šířce, i velikost tíhové síly závisí na zeměpisné šířce  $\vartheta$ . Velikost gravitační síly působící na těleso o hmotnosti  $m$  je

$$F_g = G \frac{mM_Z}{R_Z^2},$$

kde  $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  je gravitační konstanta,  $M_Z = 5,973 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  je hmotnost Země a  $R_Z = 6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$  je její střední poloměr.<sup>1</sup> Velikost odstředivé

<sup>1</sup><https://cs.wikipedia.org/wiki/Země>

síly je

$$F_o = mr\omega^2 = mR_Z \frac{4\pi^2}{T^2} \cos \vartheta,$$

kde  $\omega$  je úhlová rychlost, kterou vypočítáme z periody  $T = 8,6 \cdot 10^4$  s (střední siderický den<sup>2</sup>) a vzdálenost  $r$  jsme určili z obrázku 7. Vektory těchto dvou sil svírají úhel  $180^\circ - \vartheta$ , velikost výslednice (tíhové síly) zjistíme z kosinové věty jako

$$F_G = \sqrt{F_o^2 + F_g^2 - 2F_oF_g \cos \vartheta}.$$

Velikost tíhového zrychlení  $g$  působící na těleso o hmotnosti  $m$  pak vypočítáme jako

$$g = \frac{F_G}{m}.$$

Pro naši zeměpisnou šířku  $\vartheta = 50^\circ$  pak po dosazení vychází běžně udávaná hodnota  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

Ještě poznamenejme, že bylo stanoveno tzv. normální tíhové zrychlení<sup>3</sup>, které vychází z hodnoty pro zeměpisnou šířku  $45^\circ$  u hladiny moře, a jehož tabulková hodnota je  $g_0 = 9,806\,65 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

### Akcelerometr

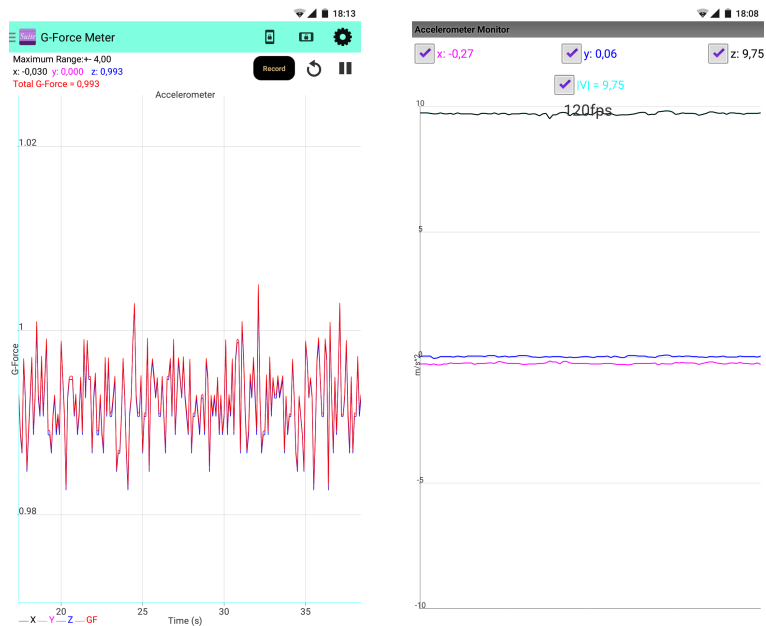
Nejjednodušší metoda, která nás může pro měření zrychlení (ať už tíhového či jiného) napadnout, je využití akcelerometru, tedy zařízení měřícího zrychlení. Akcelerometry jsou obsaženy snad ve všech v dnešní době prodávaných chytrých telefonech a tabletech (pro detekci natočení, pádu nebo i poklepání) a také ve fotoaparátech (pro detekci focení na výšku a automatické otočení fotografie) nebo například v některých noteboocích (pro detekci pádu a ochrany pevného disku). Akcelerometry v těchto zařízeních jsou typu MEMS (micro electro-mechanical systems), která měří zrychlení ve třech navzájem kolmých osách pomocí měření pohybu miniaturních ramének se závažím, většinou měřením změny kapacity mezi raménky.

Důležité je poznamenat, že výstupem většiny těchto malých akcelerometrů (ať už mají napěťový či digitální výstup) je (pro každou z os) téměř vždy zrychlení naměřené v násobcích  $g$ , přičemž někteří výrobci navíc v datasheetech udávají, že tato jednotka je rovna  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Vzhledem k malé absolutní přesnosti těchto zařízení (koneckonců se běžně nepoužívají k absolutnímu měření zrychlení) je však bezpředmětné, zda jde u tuto hodnotu u všech zařízení nebo se o jednotky procent liší. Pokud nám tedy nějaká aplikace v telefonu zobrazuje zrychlení v jednotkách SI (tedy  $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ), pak tato hodnota velmi pravděpodobně vznikla vynásobením hodnoty odečtené z akcelerometru nějakou konstantou blízkou normálnímu tíhovému zrychlení.

Na experiment jsme použili mobilní telefon se systémem Android, přičemž jsme použili dvě různé aplikace – jedna zobrazuje přímo hodnotu vyčtenou z akcelerometru (tedy v násobcích  $g$ ), druhá tuto hodnotu přepočítává na jednotky SI, viz

<sup>2</sup>[https://cs.wikipedia.org/wiki/Hvězdný\\_čas](https://cs.wikipedia.org/wiki/Hvězdný_čas)

<sup>3</sup>[https://cs.wikipedia.org/wiki/Tíhové\\_zrychlení](https://cs.wikipedia.org/wiki/Tíhové_zrychlení)



Obr. 8: Dvě aplikace pro Android pro zobrazení zrychlení měřeného akcelerometrem. První zobrazuje hodnotu v jednotkách SI, druhá jako násobek  $g$ .

obrázek 8. Naměřili jsme, že tíhové zrychlení je asi  $0,993g$  nebo  $9,75\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Na obrázku 8 byl telefon v obou případech ponechán v klidu, můžeme tedy vidět (zejména na levém screenshotu) šum a rozlišení akcelerometru.

Abychom mohli vyhodnotit nejistoty měření, kromě akcelerometru v mobilním telefonu, o kterém jsme neměli žádné podrobné informace, jsme pro experiment použili akcelerometr Analog Devices ADXL345<sup>4</sup>, se kterým komunikujeme pomocí sběrnice I<sup>2</sup>C. Ten naměřil hodnotu  $1,01g$ . V datasheetu je deklarovaná jeho chyba ( $0g$  Output Deviation from Ideal) jako  $\pm 3,5 \cdot 10^{-2}g \doteq 0,35\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  v ose  $x$  a  $y$  a  $\pm 4,0 \cdot 10^{-2}g \doteq 0,40\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  v ose  $z$ . Navíc má tento akcelerometr v sobě uložené údaje o offsetu, které je možné upravit, a tak zařízení kalibrovat. Skutečný offset se může měnit mechanickým namáháním nebo i během pájení. Hodnota, kterou naměříme, se tedy od skutečné může bez předchozí kalibrace značně lišit. Relativní nejistota pak může být i v řádu desítek procent. Z tohoto je patrné, že akcelerometry v mobilních telefonech a podobných zařízeních se pro přesné absolutní měření tíhového zrychlení příliš nehodí, a proto ve zbytku vzorového řešení detailně popíšeme čtyři jiné metody pro měření tíhového zrychlení.

<sup>4</sup><http://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ADXL345.pdf>



## Matematické kyvadlo

Mějme hmotný bod (kuličku) hmotnosti  $m$  na nehmotném závěsu délky  $l$  (tedy matematické kyvadlo). Kuličku vychýlíme tak, že závěs svírá se svislým směrem úhel  $\alpha$  (viz obrázek 9). Na kuličku působí svisle dolů tíhová síla  $\mathbf{F}_G$  o velikosti  $F_G = mg$ , kde  $g$  je tíhové zrychlení, a tahová síla od závěsu. Tíhovou sílu rozložíme do směru závěsu (složka  $\mathbf{F}_t$ ) a do směru na tento směr kolmý (složka  $\mathbf{F}_\alpha$ ). Protože se bod nepohybuje ve směru závěsu, velikost složky  $\mathbf{F}_t$  je rovna tahové síle závěsu, vektorový součet těchto sil je tedy nulový. Jediná síla, která zůstává, je  $\mathbf{F}_\alpha$ , jejíž velikost vypočítáme z obrázku jako  $F_\alpha = F_G \sin \alpha = mg \sin \alpha = mgx/l$ . Nyní předpokládejme, že úhel  $\alpha$  je velmi malý. Pak síla  $\mathbf{F}_\alpha$  působí ve vodorovném směru a hmotný bod se pohybuje po úsečce. Nyní již můžeme napsat pohybovou rovnici

$$F_\alpha = \frac{mg}{l}x = m \frac{d^2x}{dt^2},$$

kde  $t$  je čas, což je rovnice harmonického kmitání, jejímž řešením je

$$x(t) = x_{\max} \sin \left( \sqrt{\frac{g}{l}}t - \varphi_0 \right),$$

kde  $x_{\max}$  je amplituda kmitů a  $\varphi_0$  je fáze kmitů v čase  $t = 0$ . Odtud již vidíme, že perioda kmitu matematického kyvadla je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \quad (41)$$

Při znalosti délky matematického kyvadla a změření jeho periody kmitu tedy můžeme vypočítat tíhové zrychlení. Pro úplnost doplníme, že přesné řešení<sup>5</sup> (pro libovolný rozkmit  $\varphi_m \in (0; \pi)$ ) dává periodu

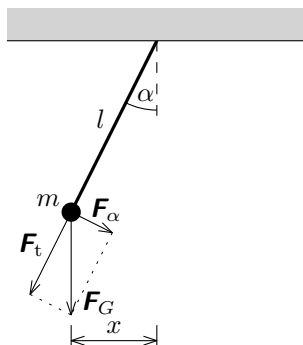
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \left(\frac{\varphi_m}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \left(\frac{\varphi_m}{2}\right) + \dots \right]. \quad (42)$$

Závislost periody na úhlu rozkmitu je vynesena na obrázku 10. Vidíme, že pro malé úhly je téměř konstantní.

Tento model zanedbává odpor vzduchu. Ten je však při rychlostech, které jsme při experimentech používali, tak malý, že během měření (minimálně 10 kmitů) se amplituda kmitů téměř nezměnila. Lze jej tedy zanedbat, aniž bychom výrazně ovlivnili výsledek.

Měření jsme prováděli pomocí optické závory. Pro její konstrukci jsme použili LED a fototranzistor, oboje pracující na vlnové délce 940 nm, viz schéma zapojení na obrázku 11. Proud tekoucí fototranzistorem závisí na intenzitě světla, která na něj dopadá. Jestliže mezi LED a fototranzistor vložíme nějaký předmět, intenzita světla dopadajícího na fototranzistor se sníží, proud jím tekoucí se též sníží, dle Ohmova zákona se tedy sníží napětí na rezistoru o odporu  $1 \text{ M}\Omega$  a my pomocí analogově digitálního převodníku detekujeme nižší napětí (jak se vidět na

<sup>5</sup><http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1239-presne-reseni-matematickeho-kyvadla>



Obr. 9: Rozložení tíhové síly působící na hmotný bod na nehmotném vlákně (matematické kyvadlo).

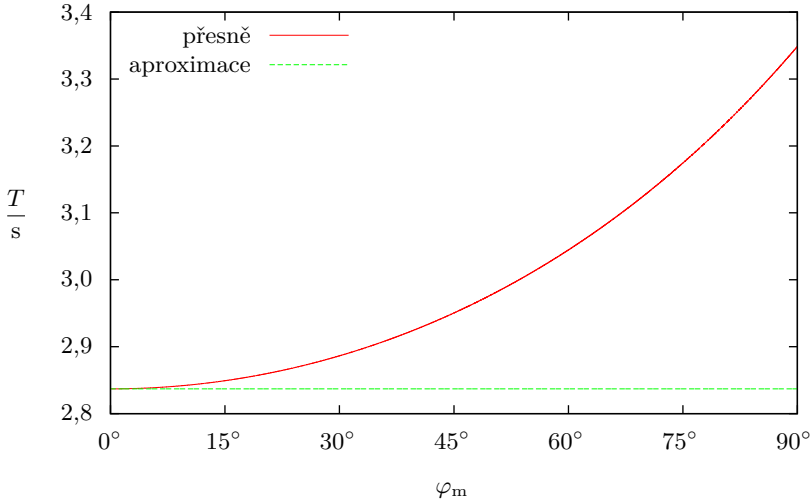
obrázku 12). Napětí detekujeme desetibitovým AD převodníkem v mikrokontroléru ATmega168 (Arduino Nano), který nám naměřené hodnoty odesílá do počítače. Vzorkovací frekvence je asi 1 kHz.

Ukázka části jednoho z naměřených signálů je na obrázku 12. V okamžiku, kdy se okraj kuličky dostane mezi LED a fototranzistor, napětí poklesne, v okamžiku, kdy kulička spojnicí zdroje a detektoru opustí, napětí opět stoupne. Během jednoho kmitu projde optickou závorou kulička dvakrát. V naměřeném signálu najdeme všechny sestupné hrany s danou úrovní (tedy místa, kdy kulička fototranzistor zastínila). Dále vybereme každé sudé (nebo naopak každé liché) průchody a zjistíme čas mezi nimi. Průměr těchto časů pak budeme považovat za periodu kmitů.

Pro experiment budeme používat kuličku o průměru  $d = (17,7 \pm 0,1)$  mm a hmotnosti  $m = (7,19 \pm 0,02)$  g. Kulička má v sobě otvor procházející skrz jejím středem, kterým byla protažena tenká nit, jejíž hmotnost byla menší než 0,1 g, tedy zanedbatelná. V případě, že bychom ji zanedbat nechtěli, mohli bychom postupovat jako v případě fyzického kyvadla (viz dále) a pro výpočet tíhového zrychlení použít rovnici (44). Nit zvyšuje moment setrvačnosti kyvadla. V případě jejího zanedbání tedy předpokládáme, že moment setrvačnosti kyvadla je nižší než skutečný, a tedy námi vypočítané tíhové zrychlení je nižší než skutečné.

Měření jsme provedli pro různé délky kyvadla a naměřenou závislost periody na délce vynesli do grafu na obrázku 13. Naměřenou závislost jsme poté fitovali závislostí teoretickou dle rovnice (41), čímž jsme dostali hodnotu tíhového zrychlení  $(9,875 \pm 0,009)$  m·s<sup>-2</sup> (zde uvedená odchylka je čistě jen chyba fitu).

Nejistota měření tíhového zrychlení touto metodou se sestává z nejistoty měření periody a nejistoty měření délky kyvadla. Dalším zdrojem nejistoty může být skutečnost, že nit není dokonale ohebná, a vrací tak kuličku do rovnovážné polohy. Abychom tuto skutečnost ilustrovali, nahradili jsme nit za rybářský vlasec o průměru 0,35 mm a experiment opakovali, přičemž jsme naměřili hodnotu tíhového zrychlení  $9,97$  m·s<sup>-2</sup>. Použitá nit je mnohem ohebnější než vlasec, přesto však není

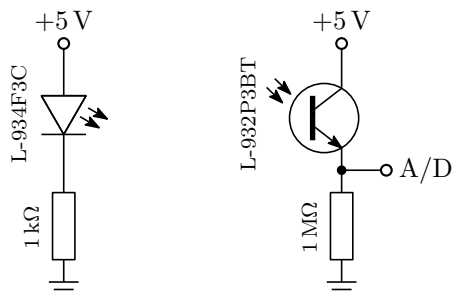


Obr. 10: Závislost periody matematického kyvadla na rozkmitu pro délku kyvadla 2 m a tíhové zrychlení  $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

dokonale ohebná. Odhadněme nejistotu způsobenou nití na  $\Delta_0 g = 0,05 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Tato nejistota však není symetrická, neboť ohyb nití způsobuje, že naměříme hodnotu tíhového zrychlení vyšší než skutečnou. S touto nejistotou je pak možné naložit různými způsoby. Pro snazší vyhodnocení výsledné nejistoty a jednodušší zápis výsledku (který bude symetrický) budeme tuto nejistotu považovat za symetrickou a naložíme s ní jako se všemi ostatními v tomto měření. Periodu měříme optickou závorou, přičemž při každém měření měříme minimálně dvacet period (které detekujeme jako na obrázku 12, takže během měření proběhne 21 kyvů). Směrodatná odchylka takto naměřených period během jednoho měření se pohybovala pod 1 ms, přičemž hodnota napětí je zaznamenávána každou milisekundu. Nejistotu měření periody tedy odhadujeme na  $\Delta T = 2 \text{ ms}$ . Nejistotu měření délky kyvadla odhadujeme na  $\Delta l = 5 \text{ mm}$ . Nejistotu typu B měření tíhového zrychlení pak určíme podle zákona šíření nejistot jako

$$\begin{aligned} \Delta_{B g} &= \sqrt{\left(\Delta l \frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 + \left(\Delta T \frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 + (\Delta_0 g)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 \Delta l}{T^2}\right)^2 + \left(\frac{8\pi^2 l \Delta T}{T^3}\right)^2 + (\Delta_0 g)^2}. \end{aligned}$$

Nejistota závisí na délce kyvadla a jeho periodě. Protože perioda roste s délkou kyvadla (a tedy klesá jak relativní nejistota délky, tak relativní nejistota periody),



Obr. 11: Schéma zapojení optické závory.

je zřejmé, že nejvyšší bude nejistota pro nejkratší délku kyvadla, v našem případě  $0,08 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Chyba fitu (která vypovídá také o nejistotě typu A) byla v našem případě o řád nižší, tedy zanedbatelná. Toto číslo tedy budeme považovat za celkovou nejistotu měření. Při měření jsme používali malé úhly rozkmitu, do  $5^\circ$ . Podle obrázku 9 se pro tyto úhly přesné řešení od naší aproximace liší jen málo. Podle aproximace pro malé úhly (kdy se jedná o harmonické kmity) pro kyvadlo délky 2 m v tíhovém poli s tíhovým zrychlení o velikosti  $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  je dle rovnice (41) perioda 2,837 s. Dle přesného řešení v rovnici (42) je pro rozkmit  $5^\circ$  perioda 2,838 s, pro  $10^\circ$  je to 2,842 s a pro  $15^\circ$  pak 2,848 s. Při úhlech do  $5^\circ$  je chyba menší než 1 ms, tedy menší než výše uvedená nejistota, můžeme ji tedy zanedbat.

Měřením periody kmitu matematického kyvadla byla určena hodnota tíhového zrychlení  $(9,88 \pm 0,08) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

### Fyzické kyvadlo

Při odvození periody kmitu fyzického kyvadla o hmotnosti  $m$  vyjdeme z pohybové rovnice rotačního pohybu

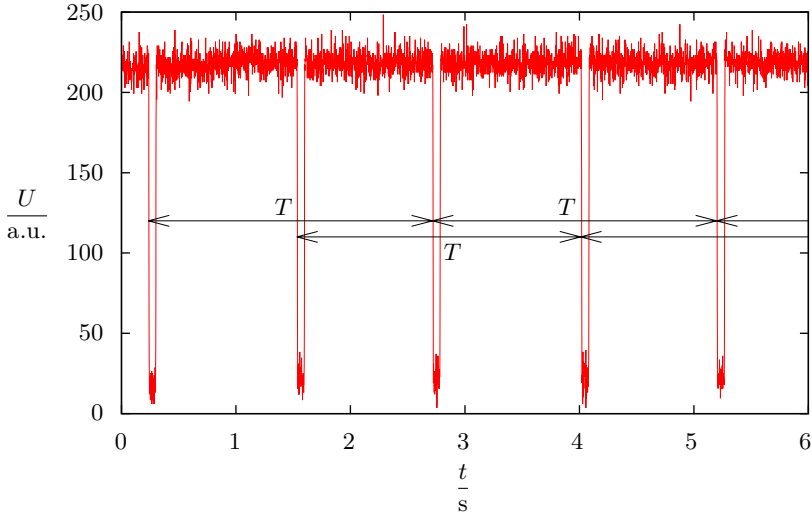
$$M = J \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad (43)$$

kde  $M$  je moment síly působící na těleso,  $J$  je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení,  $\alpha$  je úhel a  $t$  čas. Na kyvadlo působí tíhová síla  $\mathbf{F}_G$ . Tu opět, stejně jako v případě odvození uvedeného u matematického kyvadla, rozložíme na dvě složky  $\mathbf{F}_t$  a  $\mathbf{F}_\alpha$  (viz obrázek 14). Moment síly  $\mathbf{F}_t$  vzhledem k ose v bodě O je nulový, moment tíhové síly je tedy roven momentu síly  $\mathbf{F}_\alpha$ , tedy

$$M = r_T F_\alpha = r_T mg \sin \alpha.$$

Po dosazení do rovnice (43) dostáváme diferenciální rovnici

$$r_T mg \sin \alpha = J \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$



Obr. 12: Signál naměřený optickou závorou při průchodech kuličky (matematické kyvadlo) s vyznačenou periodou. Délka kyvadla byla  $l = 1\,544$  mm, průměrná perioda kmitů  $T \doteq 2,49$  s.

Její řešení není snadné, proto použijeme (stejně jako v případě matematického kyvadla) aproximaci  $\sin \alpha \approx \alpha$ , která platí pro malé úhly  $\alpha$ , řekneme tedy, že amplituda kmitů je malá. Tím dostaneme rovnici

$$\frac{r_{\text{T}}mg}{J}\alpha = \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

jejíž řešení je

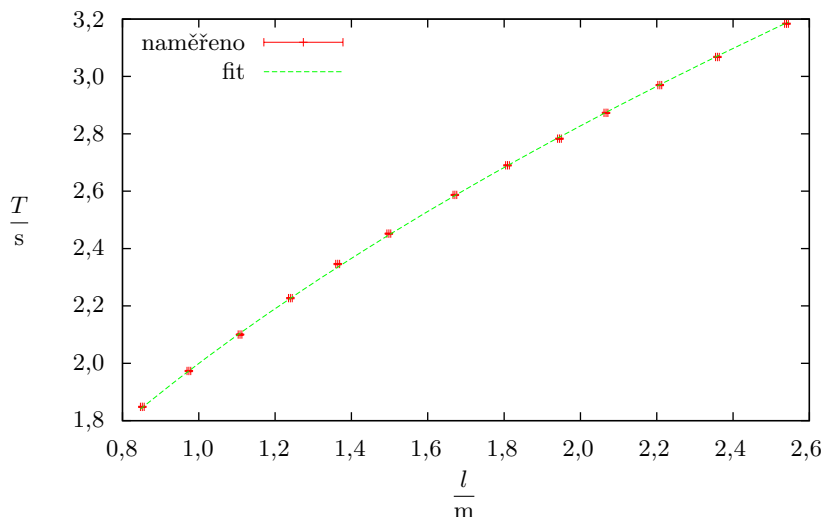
$$\alpha(t) = \alpha_{\text{max}} \sin\left(\sqrt{\frac{mgr_{\text{T}}}{J}}t - \varphi_0\right),$$

kde  $\alpha_{\text{max}}$  je amplituda kmitů a  $\varphi_0$  je fáze v čase  $t = 0$ . Perioda kmitů pak je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgr_{\text{T}}}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 J}{mr_{\text{T}}T^2}. \quad (44)$$

Přesné řešení by bylo analogické s tím pro matematické kyvadlo uvedeným v rovnici (42). Všimněme si, že pokud by těleso bylo hmotným bodem ve vzdálenosti  $l$  (šlo by o matematické kyvadlo této délky), pak by moment setrvačnosti byl  $J = ml^2$ , těžiště by bylo ve vzdálenosti  $r_{\text{T}} = l$  a dostali bychom skutečně vztah (41).

Jako tuhé těleso jsme použili průhledné plastové pravítko délky 50 cm se dvěma otvory po každé straně. Těmito otvory jsme postupně protáhli hladkou kovovou tyč s menším průměrem (asi 0,05 mm), čímž vzniklo kluzné uložení. Při tomto

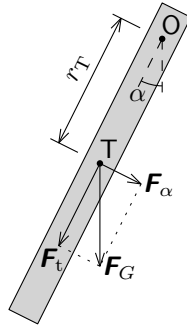


Obr. 13: Naměřená závislost periody  $T$  matematického kyvadla na jeho délce  $l$  fitovaná teoretickou závislostí dle rovnice (41).

experimentu jsme zanedbali tření v uložení, to je však tak malé, že po deseti kmitů se amplituda kmitů změnila jen velmi málo. Hmotnost pravítka byla změřena jako  $(149,0 \pm 0,1)$  g. Pro určení polohy těžiště (pravítko má kvůli různým zkosením pouze jednu rovinu symetrie) a zejména momentů setrvačnosti vůči osám dvou otvorů, které budeme používat jako osy otáčení, jsme pravítko důkladně změřili ocelovým pravítkem a posuvným měřítkem a namodelovali v programu Autodesk Inventor, který nám po zadání hmotnosti momenty setrvačnosti vypočítal (viz obrázek 15). Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející otvorem blíže okraji byl určen jako  $1,266 \cdot 10^{-2}$  kg·m<sup>2</sup>, vzhledem k ose procházející druhým otvorem pak  $8,752 \cdot 10^{-3}$  kg·m<sup>2</sup>. Vzdálenost těžiště od osy prvního otvoru byla určena jako 249 mm, od osy druhého otvoru pak 189 mm.

Pro měření periody kmitů jsme opět použili optickou závorku (obrázek 11). Použité pravítko je průhledné nejen pro viditelné světlo, ale i v okolí vlnové délky 940 nm, které naše optická závorka používá. To znamená, že naměřený signál bude odlišný od obrázku 12, kde byla použita neprůhledná kulička, viz obrázek 16. Na signálu je viditelné, že signál nejprve klesá, což odpovídá okraji pravítka se stupnicí. Dále signál naopak naroste, což odpovídá místu, kde na pravítku končí zkosení. V tomto místě je povrch pravítka zaoblen a chová se tak patrně jako čočka, která fokusuje světlo z LED. Po tomto zaoblení světlo prochází rovnou částí pravítka a signál se vrátí přibližně na hodnotu, jakou měříme bez pravítka.

Pro každé ze dvou různých os otáčení bylo provedeno deset experimentů, přičemž měření probíhalo minimálně deset kmitů, z kterých jsme získali minimálně



Obr. 14: Rozložení tíhové síly působící v těžišti tuhého tělesa volně se otáčejícího kolem bodu O (fyzické kyvadlo).

dvacet hodnot periody kmitů (viz obrázek 16), celkem tedy minimálně sto hodnot. Z těchto měření jsme vypočítali průměrnou hodnotu, čímž jsme získali hodnotu periody 1,171 s v případě osy blíže okraje pravítka, resp. 1,117 s v případě osy druhé. Po dosazení do rovnice (44) dostáváme hodnotu tíhového zrychlení  $9,828 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , resp.  $9,829 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

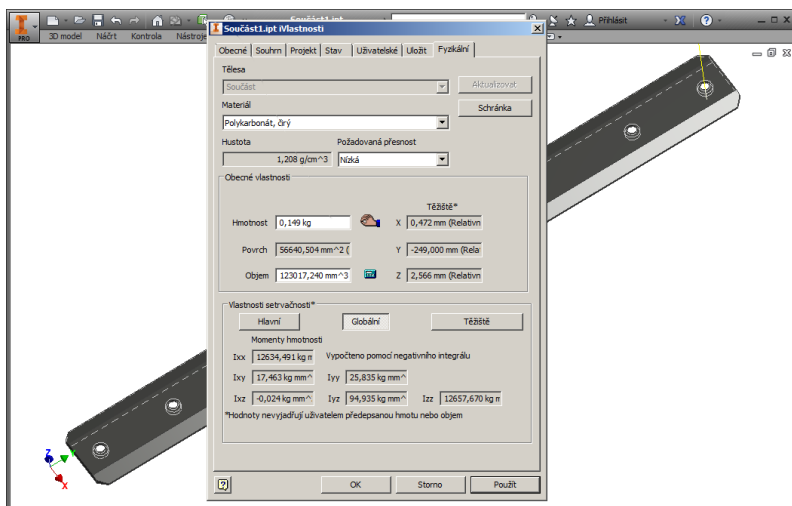
Pro výpočet nejistoty typu A (tedy nejistota projevující se drobnými odchylkami při opakovaných měřeních) měření periody jsme nejprve za pomoci  $N$  naměřených hodnot periody  $T_1, T_2, \dots, T_N$  vypočítali výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru

$$\sigma(\bar{T}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2} \quad (45)$$

a tuto hodnotu poté vynásobili 0,975-kvantilem Studentova rozdělení pro  $N$  stupňů volnosti. Tímto zajistíme, že s pravděpodobností 95% se skutečná hodnota nachází v intervalu daném výslednou nejistotou. V našem případě pro 30 hodnot použijeme 0,975-kvantil Studentova rozdělení pro 30 stupňů volnosti, tedy  $t_{0,975}(30) = 2,04$ , kterým jsme výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru vynásobili, čímž jsme získali rozšířenou nejistotu  $\Delta_A T$ . Tato hodnota nám po zaokrouhlení na jednu platnou číslici v obou případech vyšla  $\Delta_A T = 1 \text{ ms}$ . Co se týče nejistot typu B (tedy nejistot zohledňující nepřesnosti použitých měřidel), tak nejistotu typu B měření periody opět odhadujeme na  $\Delta_B T = 2 \text{ ms}$ . Kombinovaná nejistota měření periody je tedy

$$\Delta T = \sqrt{(\Delta_A T)^2 + (\Delta_B T)^2} \doteq 2 \text{ ms}.$$

Chyba způsobená aproximací pohybové rovnice bude v případě malých úhlů, které jsme používali, opět zanedbatelná (viz nejistoty u matematického kyvadla). Nejistotu měření polohy těžiště ocelovým pravítkem (neboli měření rozměrů pravítka)



Obr. 15: Z modelu kyvadla (pravítka) v programu Autodesk Inventor můžeme při znalosti hmotnosti určit polohu těžiště a moment setrvačnosti vůči ose, kolem které se kyvadlo otáčí.

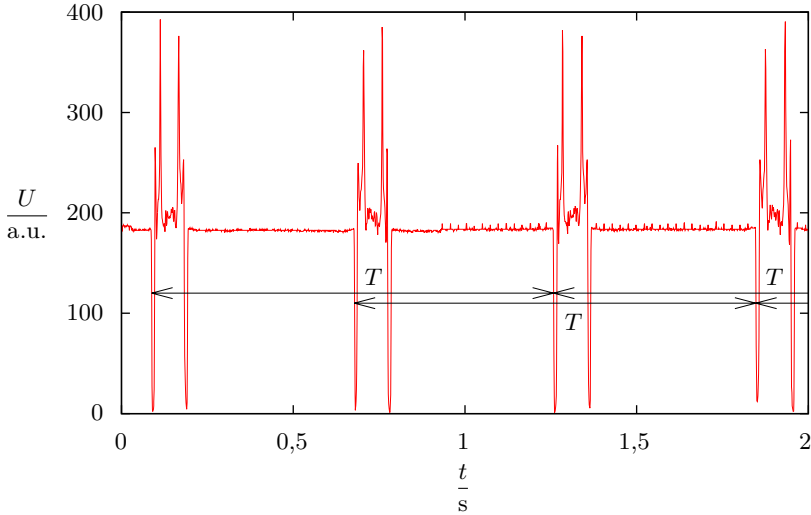
stanovíme na  $\Delta r_T = 1$  mm. Nejistota hmotnosti je již výše zmíněna jako  $\Delta m = 0,1$  g. Nejistotu momentu setrvačnosti můžeme pouze odhadnout, neboť byla určena na základě CAM modelu pravítka a měření hmotnosti. Správný a přesný postup by byl vypočítat nejistoty metodou Monte Carlo, tedy náhodně (s Gaussovým rozdělením dle příslušných nejistot) měnit rozměry modelu pravítka a sledovat, jak se mění jeho moment setrvačnosti. To by však znamenalo nutnost vytvořit model pravítka v jiném programu, proto se spokojíme s odhadem nejistoty. Aproximujeme proto pravítko za kvádr o stejné hmotnosti  $m$  jako má naše pravítko a rozměrech  $a = 530$  mm,  $b = 51$  mm,  $c = 16$  mm, což jsou vnější rozměry našeho pravítka (jde tedy o nejmenší kvádr, do jakého se naše pravítko vejde). Moment setrvačnosti takového kvádrů vzhledem k ose procházející jeho těžištěm je

$$J_{k,T} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) .$$

Používáme osu vzdálenou  $d$  od hrany kvádrů,  $a/2 - d$  od těžiště. Podle Steinerovy věty je tedy moment setrvačnosti vůči této ose

$$\begin{aligned} J_{k,d} &= J_{k,T} + m \left( \frac{a}{2} - d \right)^2 = m \left[ \frac{1}{12} (a^2 + b^2) + \left( \frac{a}{2} - d \right)^2 \right] = \\ &= m \left( \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12} - ad + d^2 \right) . \end{aligned}$$





Obr. 16: Signál naměřený optickou závorou při použití fyzického kyvadla (průhledného pravítka) s vyznačenou periodou.

Nejistotu momentu setrvačnosti pak vypočítáme podle zákona šíření nejistot jako

$$\begin{aligned} \Delta J_{k,d} &= \sqrt{\left(\Delta a \frac{\partial J_{k,d}}{\partial a}\right)^2 + \left(\Delta b \frac{\partial J_{k,d}}{\partial b}\right)^2 + \left(\Delta d \frac{\partial J_{k,d}}{\partial d}\right)^2} = \\ &= m \sqrt{\left[\Delta a \left(\frac{2a}{3} - d\right)\right]^2 + \left(\Delta b \frac{b}{6}\right)^2 + [\Delta d (-a + 2d)]^2}, \end{aligned}$$

kde  $\Delta a$ ,  $\Delta b$ , resp.  $\Delta d$  jsou nejistoty měření vzdáleností  $a$ ,  $b$ ,  $d$ , tedy  $\Delta a = \Delta b = \Delta d = 1 \text{ mm}$ . Po dosazení dostaneme  $J_{k,d_1} = (1,276 \pm 0,008) \cdot 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ , resp.  $J_{k,d_2} = (8,84 \pm 0,07) \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ , což jsou podobné hodnoty jako hodnoty získané z přesnějších modelů. Vypočítané nejistoty tedy poslouží jako dobrý odhad nejistot momentů setrvačnosti získaných z modelu. Pro výpočet celkové nejistoty měření tíhového zrychlení použijeme zákon šíření nejistot, tedy

$$\begin{aligned} \Delta g &= \sqrt{\left(\Delta J \frac{\partial g}{\partial J}\right)^2 + \left(\Delta m \frac{\partial g}{\partial m}\right)^2 + \left(\Delta r_{\text{T}} \frac{\partial g}{\partial r_{\text{T}}}\right)^2 + \left(\Delta T \frac{\partial g}{\partial T}\right)^2} = \\ &= \frac{4\pi^2 J}{m r_{\text{T}} T^2} \sqrt{\left(\frac{\Delta J}{J}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r_{\text{T}}}{r_{\text{T}}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T}{T}\right)^2}, \end{aligned}$$

kde  $\Delta r_{\text{T}} = 1 \text{ mm}$  je nejistota vzdálenosti těžiště od osy otáčení. Po dosazení číselných hodnot zjišťujeme, že nejistota je po zaokrouhlení  $0,08 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  v případě

použití osy blíže okraji pravítka a  $0,10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  (zde zaokrouhlujeme na dvě platné číslice, jelikož první číslicí je 1) v případě druhém.

Měřením periody kmitu fyzického kyvadla jsme naměřili velikost tíhového zrychlení  $(9,83 \pm 0,08) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , resp.  $(9,83 \pm 0,10) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

### Volný pád

Má-li těleso v homogenním tíhovém poli s tíhovým zrychlením o velikosti  $g$  v čase  $t_0$  rychlost  $v_0$  (kladná rychlost je směrem nahoru, záporná směrem dolů) a nachází-li se ve výšce  $h_0$ , pak se v obecném čase  $t$  nachází ve výšce

$$h(t) = h_0 + v_0(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}. \quad (46)$$

Tento vztah získáme, zintegrujeme-li dvakrát druhý Newtonův pohybový zákon.

Pro experiment budeme používat kuličku o průměru  $d = (17,2 \pm 0,1) \text{ mm}$  a hmotnosti  $m = (7,25 \pm 0,02) \text{ g}$ .

Tento model opět zanedbává odpor vzduchu. Měli bychom tedy zhodnotit, do jaké míry může odpor vzduchu ovlivnit naměřené hodnoty tíhového zrychlení. Nejprve vypočítáme maximální hodnotu Reynoldsova čísla

$$Re = \frac{v_{\max}d}{\nu},$$

kde  $v_{\max}$  je maximální rychlost kuličky, a  $\nu = 1,57 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\cdot\text{s}$  kinematická viskozita vzduchu. Toto číslo nám říká, zda je proudění kolem kuličky laminární ( $Re$  je malé) nebo turbulentní ( $Re$  je velké číslo). Maximální rychlost kuličky při pádu z výšky  $h_{\max} = 2 \text{ m}$  (tj. maximální výšky, kterou budeme při experimentu používat) odhadneme jako  $v_{\max} = \sqrt{2h_{\max}g} \doteq 6,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  (tedy rychlost při zanedbání odporu vzduchu). Po dosazení dostaneme  $Re \doteq 7 \cdot 10^4$ , což je vysoká hodnota, proudění při maximální rychlosti tedy bude turbulentní. Pak je odporová síla dána Newtonovým vztahem

$$F_{\text{odp}} = \frac{1}{4}\varrho v_{\max}^2 S = \frac{1}{8}\pi\varrho h_{\max}gd^2,$$

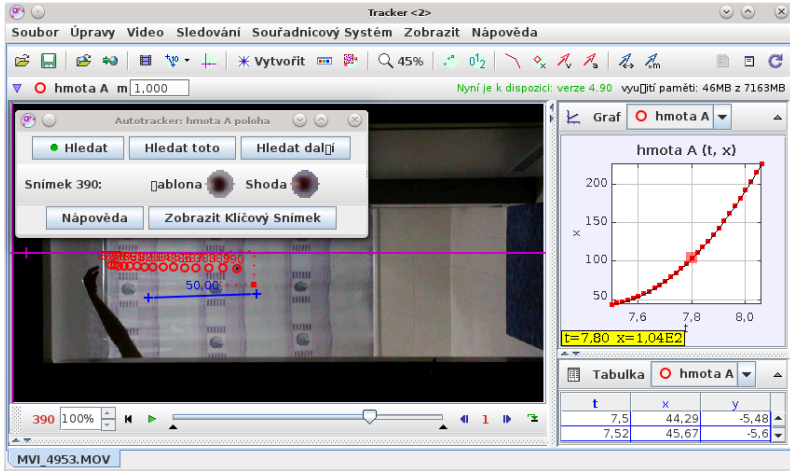
kde  $\varrho = 1,19 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  je hustota vzduchu,  $S = \pi d^2/4$  je plocha průmětu kuličky. Zpomalení kuličky při maximální rychlosti dané odporem prostředí pak vypočítáme jako

$$a_{\text{odp}} = \frac{F_{\text{odp}}}{m} = \frac{\pi\varrho h_{\max}gd^2}{8m} \doteq 3,8 \cdot 10^{-1} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \quad (47)$$

což je hodnota o více než řád nižší než hodnota, kterou měříme. Odpor vzduchu tedy můžeme zanedbat, avšak při vyšších rychlostech již bude výsledek ovlivňovat (na což musíme pamatovat při vyhodnocování nejistot měření).

Rovnice (46) můžeme využít pro výpočet tíhového zrychlení, jestliže upustíme těleso (pak je  $v_0 = 0$ ) a změříme čas, za jaký spadne z dané výšky  $h_0$ . Aby bylo naše měření přesnější, zaznamenáme výšku tělesa  $h$  v mnoha různých časech  $t$  změřenou závislost  $h(t)$  fitujeme teoretickým modelem dle rovnice (46). V tomto případě se nemusíme ani omezovat na pohyb s nulovou počáteční rychlostí.

Pohyb tělesa v tíhovém poli jsme zaznamenali na video digitálním fotoaparátem (se snímkovací frekvencí 50 fps) a videa analyzovali v programu Tracker.<sup>6</sup> Ten umožňuje ve videu trasovat vybraný objekt, výstupem je tedy závislost polohy předmětu na čase. Naměřenou závislost výšky na čase jsme poté fitovali pomocí programu gnuplot<sup>7</sup> (viz graf na obrázku 18), čímž jsme pro každé měření získali hodnotu zrychlení, s jakou se těleso pohybovalo. Celý experiment jsme opakovali desetkrát, přičemž v polovině měření šlo o pouhé upuštění tělesa (tedy  $v_0 = 0$ ), v druhé polovině šlo o vrh svisle vzhůru ( $v_0 > 0$ ).



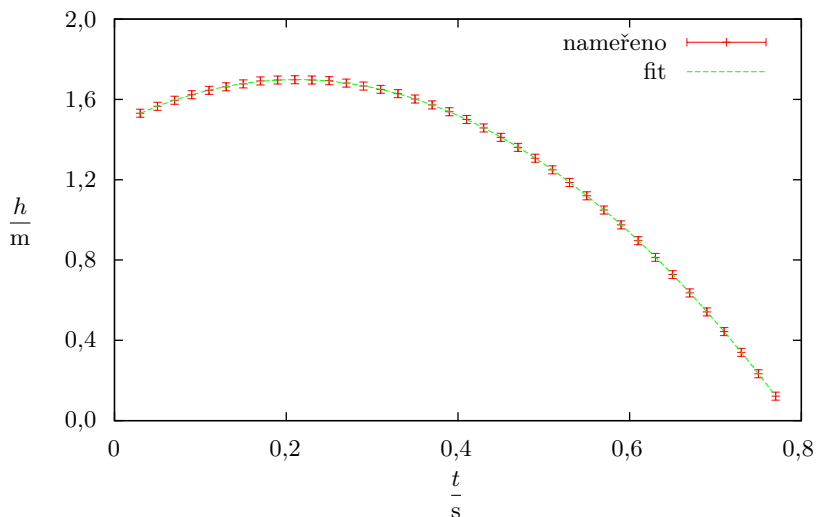
Obr. 17: Screenshot programu Tracker, který dokáže ve videu sledovat pohyb vybraného tělesa. Zde sledujeme pohyb vrženého svisle vzhůru v tíhovém poli.

Poznamenejme, že stejný experiment lze realizovat i s pomocí stroboskopu (viz obrázek 19), kdy pohyb kuličky fotografujeme s dlouhou expozicí. Pak máme na jediném snímku zaznamenanu polohu kuličky v mnoha různých časech (dle frekvence stroboskopu).

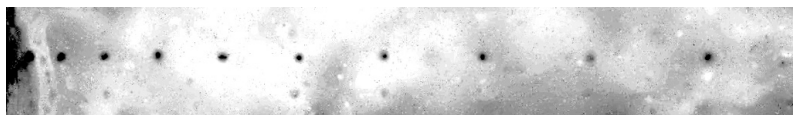
Nejistoty tohoto měření budou dány zejména nejistotou měření polohy a též zanedbáním odporu vzduchu. Nejistota měření polohy na videu se skládá z nejistoty kalibrace délky v obraze a z nejistoty určení polohy kuličky v obraze. Celkem nejistotu určení polohy odhadujeme na asi 2 cm. V rovnici (47) jsme vypočítali, že pro maximální rychlost, kterou používáme, je skutečné zrychlení menší asi o  $0,38 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  než tíhové. Při nulové rychlosti je však zrychlení přímo rovno tíhovému. Proto odhadněme, že zanedbání odporu vzduchu přidává do výsledku nejistotu asi  $0,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Celkovou nejistotu měření tíhového zrychlení touto metodou odhadujeme na asi  $0,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

<sup>6</sup><http://physlets.org/tracker>

<sup>7</sup><http://www.gnuplot.info>



Obr. 18: Naměřená závislost výšky kuličky při vrhu svisle vzhůru fitovaná teoretickou závislostí danou rovnicí (46). Z tohoto konkrétního měření bylo naměřeno tíhové zrychlení  $g = 10,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .



Obr. 19: Pohyb kuličky osvětlené stroboskopem (frekvence 50 Hz) v tíhovém poli (tíhové zrychlení směřuje doprava).

Pomocí analýzy pohybu kuličky při volném pádu bylo naměřena hodnota tíhového zrychlení  $g = (9,9 \pm 0,3) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

### Pohyb po kružnici

Mějme hmotný bod o hmotnosti  $m$  na nehmotném závěsu délky  $l$ . Tento bod rozpohybujeme tak, že bude konat rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru  $r$  s úhlovou frekvencí  $\omega$  (a tedy periodou  $T = 2\pi/\omega$ ). Na tento hmotný bod působí tíhová síla  $\mathbf{F}_G$  směrem svisle dolů a tahová síla od závěsu  $\mathbf{F}_t$ , která působí ve směru závěsu, tedy se svislým směrem svírá úhel  $\alpha$  takový, že  $\sin \alpha = r/l$  (viz obrázek 20). Víme, že hmotný bod se pohybuje po vodorovné kružnici, ve svislém směru tedy musí být výslednice sil nulová a ve vodorovném musí být její velikost rovna  $F_d = m r \omega^2$  (dostředivá síla). Napíšeme si velikosti obou sil ve složkách (ve válcových

souřadnicích, první složka je ve směru  $r$ , druhá ve svislém směru):

$$\mathbf{F}_t = (F_t \sin \alpha; F_t \cos \alpha) = \left( F_t \frac{r}{l}; F_t \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l} \right).$$

$$\mathbf{F}_G = m\mathbf{g} = (0; -mg).$$

Jak jsme již řekli, vzhledem k pohybu po kružnici musí platit

$$\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_G = (mr\omega^2; 0),$$

což přepíšeme pro každou složku zvlášť jako soustavu dvou rovnic

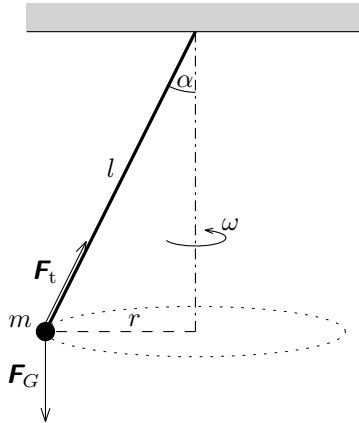
$$F_t \frac{r}{l} = mr\omega^2,$$

$$F_t \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l} - mg = 0.$$

Z druhé rovnice vyjádříme  $F_t$ , dosadíme do první a vyjádříme tíhové zrychlení

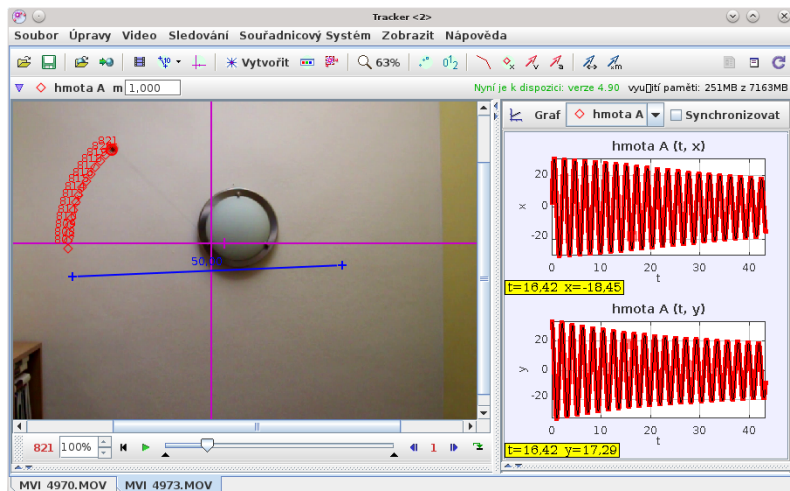
$$g = \omega^2 \sqrt{l^2 - r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} \sqrt{l^2 - r^2}. \quad (48)$$

Při změření periody a poloměru oběhu a délky závěsu tedy můžeme vypočítat tíhové zrychlení.



Obr. 20: Hmotný bod na nehmotném závěsu konající rovnoměrný pohyb po kružnici.

Pro měření jsme použili opět kuličku zavěšenou na tenké niti (se zanedbatelnou hmotností oproti hmotnosti kuličky), kterou jsme používali jako matematické kyvadlo. Kuličku jsme zavěsili tak, že její těžiště bylo vzdáleno  $l = (1114 \pm 5)$  mm od bodu, kolem kterého se závěs otáčí. Pod tento bod jsme umístili fotoaparát

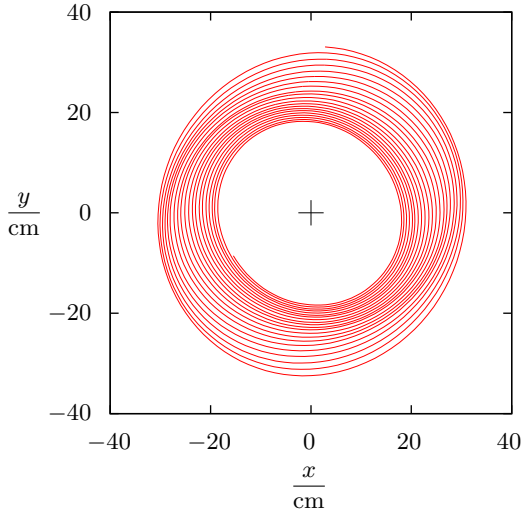


Obr. 21: Video kuličky pohybující se na závěsu po kružnici v programu Tracker.

a pohyb kuličky zaznamenali jako video, které jsme opět zpracovali v programu Tracker (obrázek 21).

Ukázka naměřené trajektorie je na obrázku 22. Vidíme, že kulička se bohužel nepohybuje přesně po kružnici, ale spíše po elipse. Lépe se nám bohužel kuličku rozpohybovat nepodařilo, a tak tuto nedokonalost zahrneme do nejistot měření. Poloměr trajektorie se navíc postupně vlivem odporu vzduchu zmenšuje, podle rovnice (48) se tedy i mění perioda. Pro každý jeden oběh kuličky tedy periodu a poloměr změříme samostatně, čímž vliv odporu vzduchu v podstatě eliminujeme, protože nejistota způsobená odlišností trajektorie od kružnice poté bude mnohem vyšší než nejistota způsobená zanedbáním odporu vzduchu a z něj vyplývající změny poloměru a periody během jednoho oběhu.

Nejistota měření se bude skládat z nejistoty měření periody oběhu, délky závěsu a poloměru oběhu. Periodu odečítáme z naměřených poloh, nejistotu odhadneme na dva snímky, tedy  $\Delta_B T = 2/50 \text{ s} = 40 \text{ ms}$ . Nejistota měření délky (přesněji polohy těžiště kuličky) je  $\Delta_B l = 5 \text{ mm}$ . Do nejistoty měření poloměru oběhu musíme zahrnout i fakt, že kulička neopisuje přesně kružnici. Vypočítáme tedy výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru poloměru oběhu během každé periody podle rovnice (45) a její nejvyšší hodnotu budeme považovat za nejistotu typu B měření poloměru oběhu. Tato byla u našich měření nejvýše  $\Delta_B r = 14 \text{ mm}$  (opět zaokrouhlujeme nejistotu na dvě platné číslice, protože první číslice je 1). Nejistota daná nepřesností měření polohy je pak vůči této nejistotě zanedbatelná. Výslednou nejistotu typu B měření tíhového zrychlení vypočítáme podle zákona



Obr. 22: Naměřená trajektorie kuličky na závěsu.

šíření nejistot jako

$$\begin{aligned}\Delta_{Bg} &= \sqrt{\left(\Delta_{BT} \frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 + \left(\Delta_{Bl} \frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 + \left(\Delta_{Br} \frac{\partial g}{\partial r}\right)^2} + = \\ &= \frac{4\pi^2}{T^2} \sqrt{l^2 - r^2} \sqrt{\left(\frac{2\Delta_{BT}}{T}\right)^2 + \left(\Delta_{Bl} \frac{l}{l^2 - r^2}\right)^2 + \left(\Delta_{Br} \frac{r}{l^2 - r^2}\right)^2}.\end{aligned}$$

Je zřejmé, že nejistota bude nejvyšší pro nejmenší periodu a poloměr, proto jsme dosadili právě tyto hodnoty, čímž jsme dostali  $\Delta_{Bg} = 0,19 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Co se týče nejistoty typu A, tu jsme pro všechny naměřené hodnoty tíhového zrychlení vypočítali dle rovnice (45) a následného textu, přičemž nám vyšlo  $\Delta_{Ag} = 0,04 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Výsledná nejistota měření tíhového zrychlení je tedy  $\Delta g = \sqrt{(\Delta_{Ag})^2 + (\Delta_{Bg})^2} = 0,19 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

Touto metodou tedy bylo naměřené tíhové zrychlení  $g = (9,77 \pm 0,19) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

### Závěr

Změřili jsme velikost tíhového zrychlení pěti různými metodami:

- akcelerometrem (ten se však pro přesné absolutní měření tíhového zrychlení příliš nehodí), naměřená hodnota byla  $9,75 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
- matematickým kyvadlem:  $(9,88 \pm 0,08) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ,
- fyzickým kyvadlem:  $(9,83 \pm 0,10) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ,
- pomocí volného pádu:  $(9,9 \pm 0,3) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ,

- pomocí pohybu hmotného bodu po kružnici:  $(9,77 \pm 0,19) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

V rámci nejistot měření se hodnoty naměřené pomocí různých metod shodují, přičemž nejnižší nejistota měření byla stanovena u měření pomocí matematického kyvadla, pomocí kterého byla naměřena hodnota  $g = (9,88 \pm 0,08) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , která v rámci nejistot měření odpovídá běžně udávané a teoreticky vypočítané hodnotě  $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

## Úloha II.E . . . je mi to šumák

*Kupte si v lékárně šumivý celaskon nebo cokoliv, co se podává v tabletách určených k rozpuštění ve vodě. Změřte, jak dlouho trvá rozpuštění jedné tablety v závislosti na teplotě vody, do které ji hodíte. Diskutujte příčiny a vymyslete, proč je pozorovaná závislost taková.*

### Teorie

Šumivé tablety jsou neobalené tablety s obsahem kyselých látek spolu s uhlíčitany nebo hydrogenuhlíčitany, které za přítomnosti vody velice rychle reagují za vzniku oxidu uhličitého, který tvoří bublinky pozorovatelné při jejich rozpouštění. Námi použité tablety obsahují kyselinu citronovou a hydrogenuhlíčitan sodný, mimo oxidu uhličitého tedy bude vznikat sodná sůl kyseliny citronové a voda.

Kinetika chemických reakcí přímo úměrně závisí na určité rychlostní konstantě  $k$ , jejíž závislost na teplotě vyjadřuje Arrheniova rovnice:

$$k = Ae^{-\frac{E_a}{RT}},$$

kde  $A$  je frekvenční faktor dané reakce zohledňující to, že ne všechny srážky částic jsou účinné a vedou ke vzniku produktů,  $E_a$  je aktivační energie (jednotky  $\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}$ ) dané reakce, tedy minimálně energie, která musí být dodána na to, aby reakce mohla probíhat (zanikaly původní vazby a vznikaly nové),  $R$  je molární plynová konstanta a konečně  $T$  je to, co nás nejvíce zajímá, tedy teplota v kelvinech. Rychlost je veličina nepřímo úměrná času, čas reakce je tedy nepřímo úměrný rychlostní konstantě  $k$ , takže závislost mezi teplotou a rychlostí rozpouštění by mohla být exponenciální.

Celá situace však bude ve skutečnosti složitější, i kvůli tomu, že slisovaná tableta umožňuje průběh reakce pouze na svém povrchu, tedy tam, kde se reaktanty přímo stýkají s vodou, tím se původní vrstva rozrušuje a reakce postupuje do dalších vrstev. Mimo to hydrogenuhlíčitany a kyselina citronová nejsou jedinými složkami tablety, neboť se jedná pouze o pomocné látky usnadňující rychlé rozpouštění tablety. Přestože by tablety měly být přiměřeně obsahově stejnoměrné, konkrétní rozmístění všech látek v nich a to, jak bude tableta slisována, bude vždy do určité míry stochastické, což se pak může spolupodílet na tom, zda se daná tableta rozpustí rychleji nebo pomaleji.

Dále je rychlost rozpouštění ovlivněna tím, v jakém okamžiku je vrstva bublinek v bezprostřední blízkosti tablety schopná vyrovnat síly, a vynést tabletu na hladinu, protože po vyplavání tablety se rychlost rozpouštění může snižovat kvůli menšímu styku s vodou.



### Experiment

K experimentu byly použity magnesiové šumivé tablety Dr. Max Magnesium s vitamínem B6 s příchutí citronu, které byly rozpouštěny vždy ve zhruba 200 ml vody. Několik tablet po sobě bylo během experimentu zváženo a bylo ověřeno, že jsou hmotnostně stejnoměrné (rozdíl v rámci setin gramu je zanedbatelný a schová se pod jiné, řádově vyšší nejistoty měření).

Teplota vody byla měřena pomocí digitálních teplotních čidel MAXIM DS18B20 v pouzdře TO-92. Čas byl měřen stopkami, jako nejistota měření byly brány 2 s, kvůli problematickému určení okamžiku, kdy je tableta zcela rozpouštěná. Naměřeny byly časy rozpouštění tablet při více než dvaceti různých teplotách v rozmezí od zhruba 1 °C do 93 °C. Tablety mají oproti vodě velmi malý objem, proto se téměř okamžitě dostanou na teplotu vody bez většího ovlivnění výsledků. Opakovat měření pro danou teplotu vícekrát by bylo poměrně náročné, takže více měření bylo provedeno pouze pro vodu s pokojovou teplotou (v rozmezí teplot od 23,1 °C do 24,2 °C), aby bylo možné zhruba odhadnout nejistoty měření.

K měření byla použita vroucí voda z konvice, studená voda z kohoutku, voda pokojové teploty a led vzájemně kombinované v různých poměrech tak, abychom dostali zhruba rovnoměrné rozložení měřených teplot. Led se vždy nechal zcela rozpustit (případně zbytky byly odebrány), aby jeho kusy rozpouštění tablety neovlivňovaly. Do hrnku bylo vloženo teplotní čidlo a vyčkal se, než se zaznamenávaná teplota dostatečně ustálí. Poté byla do vody vhozena tableta se současným spuštěním stopky a zapsána teplota, s rozpouštěním tablety bylo měření času zastaveno a znovu zapsána teplota.

Jelikož měření trvalo po určitý čas a neprobíhalo za podmínek, které by se snažily o přiblížení tepelně izolované soustavy (což by bylo vhodnější, ale problematicky by se sledoval průběh rozpouštění), byl určitý, byť nevelký, rozdíl mezi teplotou naměřenou na počátku a na konci měření vlivem tepelné výměny s okolím. Poznamenejme tedy, že za teplotu měření považujeme počáteční teplotu a její proměnlivost zahrneme do nejistot určení teploty, které z tohoto důvodu činí  $\pm 2$  °C.

Nakonec jsme v experimentování velmi zhruba zabrousili do oblasti termochemie. Tentokrát jsme jako nádobu pro rozpouštění použili termohrnek, jehož otvorem na pití bylo protaženo teplotní čidlo (a lehce přiskřípnuto zavíráním, aby byla soustava dobře tepelně izolovaná). Do termohrniku jsme dali pouze asi 44 g vody pokojové teploty, do které bylo vhozeno 5 šumivých tablet zároveň, ihned jsme důkladně zašroubovali víčko termohrniku a sledovali jsme, jak se mění teplota vody v důsledku probíhající chemické reakce, tedy jaká přibližně bude její termodynamika.

### Výsledky a diskuze

V tabulce 1 jsou zaznamenány doby rozpouštění pro pokojovou teplotu. Z nich byla vypočtena výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru (5,88 s), kterou jsme vynásobili  $(1 - \alpha/2)$ -kvantilem Studentova rozdělení pro  $N$  stupňů volnosti ( $N$  je počet měření), kde  $\alpha = 0,05$  (tedy pro 95% interval pravděpodobnosti), čímž jsme dostali rozšířenou nejistotu typu A, která činí přibližně 14 s. Vzhledem k tomu, že nejistota měření se stopkami je řádově nižší, můžeme ji zanedbat a prohlásit

Tab. 1: Časy rozpouštění tablet  $t$  pro pokojovou teplotu  $T$ .

$\frac{T}{\text{°C}}$	$\frac{t}{\text{s}}$
23,6	201
23,7	185
23,5	207
23,6	164
23,7	155
23,6	193
23,1	187
23,8	188
24,2	205

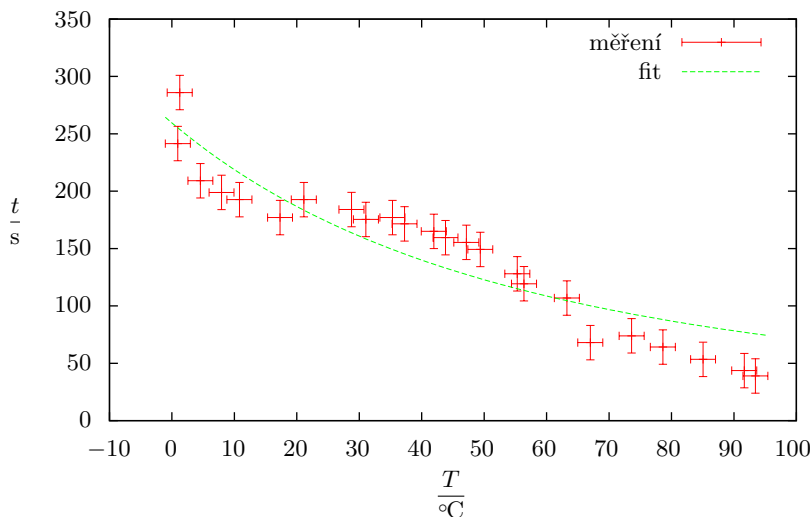
toto za konečnou nejistotu. Tuto nejistotu chceme stejně využít pouze jako velmi přibližný odhad nejistoty měření pro všechny teploty.

V grafu 23 pak vidíme zaznamenány časy rozpouštění pro různé teploty vody. Jak je vidět, exponenciální fit není vyhovující, závislost rychlosti rozpouštění tablety na teplotě tedy bude poněkud složitější. Vidíme, že zhruba od teploty 20 °C nastává přechod a rychlost rozpouštění se s teplotou zvyšuje pomaleji (zpočátku se dokonce snižuje), toto zpomalení zvyšování rychlosti rozpouštění znovu vymizí přibližně v rozmezí 60 °C–70 °C.

Co tedy může způsobovat, že naměřená závislost je právě taková? Zásadní bude nejspíše to, že se reakcí uvolňují bublinky oxidu uhličitého a že máme reaktanty ve formě slisované tablety, a tak se celý proces neřídí jen kinetikou chemických reakcí, ale závisí i na tom, jak vlastně probíhá rozpouštění a dezintegrace celé tablety. Teď si možná říkáte, jak to může vysvětlovat, co se děje v grafu, protože ve výsledku se stejně rozpouštějí všechny tablety a u všech to proběhne plus mínus obdobně. Problém je právě v tom, že rozpouštění tablet nemá u různých teplot úplně stejný charakter, což jste možná při vašich měřeních také pozorovali (jestli jste měli tablety podobného typu a složení).

Rozpouštíme-li tabletu ve vodě nízké teploty (nízká teplota v našem případě znamená přibližně 0 °C–15 °C), celý proces probíhá relativně pomalu, tím pádem se nám i pomaleji uvolňují bublinky oxidu uhličitého, takže nedochází k jejich dostatečnému hromadění, které je potřebné k tomu, aby byla tableta vynesena na hladinu. Tableta se tedy po významnou část svého rozpouštění drží dole zcela obklopená vodou, což je faktor, který jejímu rozpouštění významně napomáhá. Na hladinu je bublinkami vynesena pouze malý, rozmočený zbytek, který už není problém „dorozpustit“.

Podívejme se na rozpouštění tablet ve vodě střední teploty (přibližně 20 °C–60 °C), zde už se rychlost reakce postupně zvýšila natolik, že za chvíli vzniká dostatečné množství bublinek oxidu uhličitého zároveň, takže k vynesení tablety na hladinu dojde po relativně kratším čase. Nicméně reakce ještě není vyložena prud-



Obr. 23: Naměřené časy rozpouštění tablet pro různé teploty proložené exponenciální funkcí.

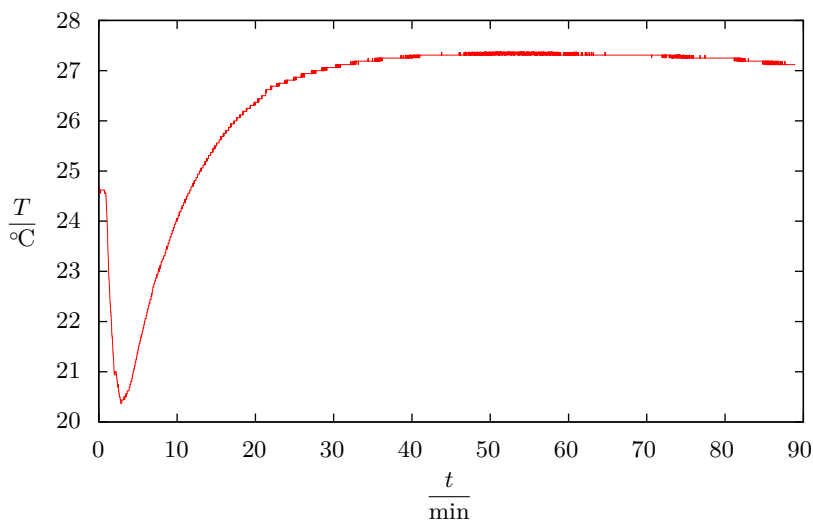
ká a tableta nestihla nasát významnější podíl vody, a tak se na hladině poměrně dlouho „trápí“, protože rychlost rozpouštění je výrazně snížena tím, že z jedné strany tablety je možnost rozpouštění a reaktivity značně omezena.

Nakonec zbývá věnovat se rozpouštění tablet za vysoké teploty (přibližně 70 °C–90 °C), zde dochází k tomu, že tablety vyplavou velmi rychle (dolní hranice teplotního intervalu) nebo dokonce prakticky okamžitě (horní hranice), ale reakce je natolik bouřlivá, že významně přispívá k rychlé dezintegraci tablety. V podstatě ani na hladině samotnou tabletu skoro nevidíme přes šumící vrstvu pěny, tableta se po hladině velmi rychle pohybuje a naráží do stěn hrnku, což může jejímu rozpadu napomáhat. Nicméně je pravděpodobné, že kdyby se nám podařilo nuceně udržet tabletu pod hladinou, tak abychom zároveň její rozpouštění neovlivňovali (což prakticky dost dobře udělat nejde), tak by se rychlost jejího rozpouštění ještě zvýšila. Nicméně i na hladině už tableta za těchto teplot reaguje dostatečně prudce na to, aby ji efekt vyplavání nezbrzdil tak výrazně, jako tomu je u středních teplot.

Rozdílnost v rozpouštění byla pozorována už při samotném experimentu, ale pro jistotu byl proveden jen velmi zběžně dodatečný experiment, ve kterém byl mimo celkový čas rozpouštění tablety změřen i čas, za který tableta vyplave na hladinu. Jeho výsledkem je to, že ve vodě s teplotou asi 90 °C tableta vyplave skoro hned, ale reaguje opravdu velice prudce. Ve vodě s teplotou asi 31 °C je tableta zcela ponořená pouze po 19 % času svého rozpouštění, zatímco ve vodě o teplotě asi 12 °C zůstane tableta potopená po 77 % času svého rozpouštění, což je významný rozdíl, a je tedy oprávněné předpokládat, že výše popsané je alespoň jedním z důvodů,

proč závislost doby rozpouštění tablety na teplotě vody má charakter, který vidíme v grafu, dalším může být také to, jak se chovají pomocné látky v tabletě při různých teplotách.

Další graf 24 ukazuje výsledek zmíněného termochemického měření. Zde je pěkně vidět, že na disoluci tablety a iniciaci následné chemické reakce je nejdříve třeba energii dodávat (teplota vody znatelně klesá z pokojové teploty), posléze se ale uvolňuje ještě větší množství energie, než bylo na začátku potřeba dodat. Jedná se tedy jednoznačně o exotermickou reakci, která při svém průběhu dodává teplo do systému. Z grafu je patrné, že rozdíl teplot vody  $\Delta T$  mezi počátečním a konečným stavem je přibližně  $3\text{ }^{\circ}\text{C}$ , hmotnost vody je asi  $m = 44\text{ g}$  a její měrná tepelná kapacita asi  $c = 4200\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ , můžeme tedy určit, že teplo celkově dodané vodě bude  $Q = mc\Delta T$ , tedy asi  $550\text{ J}$ , na jednu tabletu se tedy uvolní přibližně  $110\text{ J}$  tepla. Když to dáme do souvislosti s naším hlavním experimentem, vidíme, že rozpouštění jedné tablety ve cca  $200\text{ g}$  vody ovlivní její teplotu zanedbatelně (možný nárůst o přibližně  $0,1\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), přestože zahřívána bude nejdříve lokálně voda v nejbližším okolí tablety.



Obr. 24: Měření teploty v závislosti na čase při rozpouštění pěti tablet současně v malém objemu vody v termohrnku. Počáteční teplota vody je  $24,6\text{ }^{\circ}\text{C}$ , minimální teplota vody je  $21,1\text{ }^{\circ}\text{C}$  a maximální teplota vody dosahuje  $27,6\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

### Závěr

Byla proměřena závislost času rozpouštění šumivých tablet na teplotě vody. Není překvapivé, že závislost má převážně klesající charakter (tablety se převážně při vyšší teplotě rozpouštějí rychleji). Jak jsme se obávali, jednoduchá exponenciální

závislost, která vychází z teorie o kinetice chemických reakcí, na naměřená data nesedí. Zpomalení rozpouštění tablet patrné v jedné části grafu lze vysvětlit jako důsledek různého průběhu rozpouštění tablet (především odlišné relativní doby, za kterou je tableta díky bublinkám oxidu uhličitého vynesena k hladině).

### Úloha III.E . . . hydrogel

*Změřte závislost hmotnosti hydrogelové kuličky na době ponoření do vody a na koncentraci soli rozpuštěné ve vodě.*

#### *Teorie*

Jako hydrogely se souhrnně označují látky, které mají tu vlastnost, že dokáží pohlcovat velké množství vody, aniž by se samy ve vodě rozpouštěly. Většinou se jedná o síť řetězců různých polymerů. V tomto krátkém textu se nebudeme zabývat přesnými chemicko-fyzikálními důvody pohlcování molekul vody, neboť by to bylo příliš komplikované a moc nesouvisející s fyzikou, ale spíše s chemií. Jen bychom zde poznamenali, že se nejedná jen o pronikání vody membránou způsobené osmotickým tlakem. Problematika je daleko složitější, neboť molekuly hydrogelu na sebe přímo vážou molekuly vody.

V tomto experimentu změříme, kolik vody dokáže jeden určitý typ hydrogelu (ten, který vám přišel poštou společně se zadáním), sloužící ke zvýšení trvanlivosti květin ve váze, absorbovat.

#### *Návrh experimentu*

V rámci tohoto experimentu budeme zkoumat hmotnost hydrogelové kuličky v závislosti na době ponoření ve vodě a na koncentraci kuchyňské soli ve vodě rozpuštěné. Nejprve si však musíme ujasnit, jaké další okolnosti by mohly mít na náš experiment vliv.

V prvé řadě bychom si měli nejprve u všech používaných kuliček zkontrolovat, zda se jedná opravdu o koule se stejným poloměrem. Toto je velmi špatně realizovatelné kvůli malému počátečnímu rozměru kuliček, proto budeme předpokládat, že tomu tak je.

Jako další si musíme uvědomit, že nasákavost hydrogelu může záviset na teplotě použité vody. Jelikož v zadání úlohy není stanoveno, že máme měřit i závislost na teplotě vody, stačí nám, když si pohlídáme, aby měla použitá voda při všech experimentech stejnou teplotu. To proto, abychom mohli tyto experimenty následně navzájem porovnávat. Vzhledem k poměrně dlouhému časovému intervalu, po který bude naše měření probíhat (což bude diskutováno dále), je rozumné zvolit si tuto teplotu jako teplotu v místnosti, ve které měříme.

Dále může nasákavost hydrogelu záviset na ostatních látkách rozpuštěných v použité vodě. Jediná možnost, jak tento efekt odstranit, by bylo použití destilované vody. Jelikož by se tím ale experiment značně zkomplikoval, destilovanou vodu používat nebudeme.

Jako poslední si musíme dát pozor na to, aby kuličky byly celou dobu plně ponořeny ve vodě. Na obalu produktu se píše, že máme použít minimálně 400 g vody na celý sáček, pro jistotu použijeme alespoň dvakrát větší poměr vody (závisí samozřejmě na rozměrech použité nádoby). Také bychom měli zajistit, aby se kuličky ani po nárůstu objemu nedotýkaly samy sebe či stěn – styk s dnem nádoby nijak snadno neodstraníme.

Žádné jiné okolnosti už by do našeho měření neměly zanašet systematické chyby. Nyní bychom se tedy měli zamyslet nad počtem měření, které chceme provádět.

Jako poslední věc si musíme stanovit, po jak dlouhý časový úsek budeme chtít měřit. Na tomto místě je vhodné podívat se na návod k použití našeho hydrogelu (návod je napsán na obalu v jednoduché angličtině nebo je k nalezení na internetu). V tomto návodu se píše, že máme před použitím kuličky hydrogelu namočit na 4 hodiny do vody a ty za tuto dobu zvětší svůj objem. Znamená to tedy, že bychom měli očekávat, že maximálního objemu absorbované vody se dosáhne právě za tyto 4 hodiny. Měli bychom ovšem měřit o něco déle, neboť těmto nepřesným návody nemůžeme bezmezně věřit a taky rozpuštěná sůl může tuto dobu značně ovlivnit.

### Naměřená data

Experiment jsme prováděli s vodou z kohoutku dodávané z Pražské vodárny (složení kohoutkové vody se v různých městech může značně lišit) o teplotě 22 °C, která byla stejná jako teplota okolního vzduchu. Hmotnostní koncentrace solných roztoků v jednotlivých nádobách byly 0 %, 1 %, 2 %, 4 %, 7 %, 11 %, 20 % a 26 %, používali jsme kuchyňskou sůl bez přidaných látek. Vložili jsme do každé nádoby 20 kuliček a pomocí vah jsme ve stanovených intervalech měřili jejich hmotnost (vždy hmotnost všech 20 kuliček dohromady).

Naměřená data jsou zanesena v tabulce 2.

Váhy měří s přesností na 0,1 g. Další faktor, který ovlivňoval měření na vahách je to, že při umísťování kuliček na váhy, jsme na váhy umístili i trochu vody, která následně zvyšovala číslo, které váhy ukázaly. Této systematické chybě se bohužel nedalo vyhnout, nicméně šlo maximálně o 0,2 g (stanoveno odhadem založeném na změření váhy vody, která na vahách zbyla po odstranění kuliček, která jen velmi zřídka vystoupala na hodnotu 0,1 g, ale pro jistotu uvádíme větší odhad 0,2 g). Horní odhad chyby měření hmotnosti tedy bude 0,3 g. Na tomto místě je také potřeba uvést, že udávané časy značí začátek měření, které díky vysoké náročnosti trvalo přibližně 15 minut. Vždy jsme ale měřili ve stejném pořadí od kuliček ponořených v čisté vodě směrem k nasycenému roztoku soli (v tabulce směrem zprava doleva). Data je tedy potřeba podle toho interpretovat, tedy jako čas, ve které bylo měření provedeno, budeme brát čas začátku měření + 2 minuty za každé měření, které muselo být provedeno před tímto naším měřením, a směrodatnou odchylku na tomto místě stanovíme jako  $\pm 3$  minuty, což nám dává dostatečnou rezervu.

Na obrázku (25) jsou graficky zobrazena data pro všechny koncentrace soli a pro prvních 480 minut pozorování.

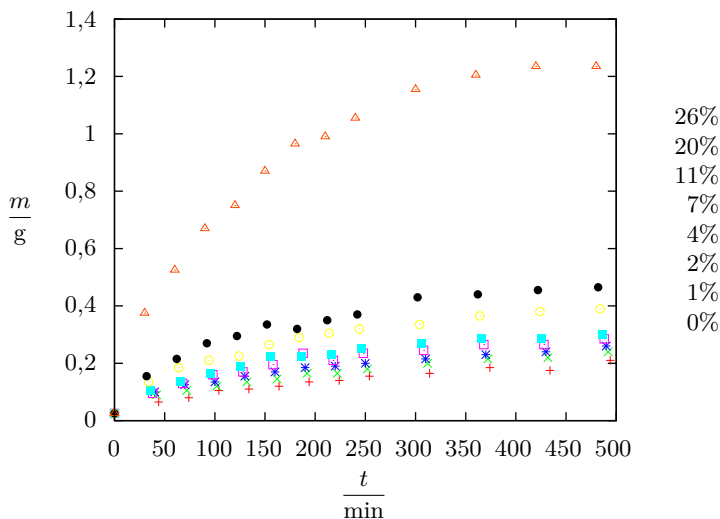
Tab. 2: Naměřené hodnoty hmotnosti kuliček v závislosti na čase a koncentraci soli v příslušném roztoku

$\frac{t}{\text{min}}$	hmotnost 20 kuliček podle koncentrace solného roztoku [g]							
	26 %	20 %	11 %	7 %	4 %	2 %	1 %	0 %
30	1,3	1,8	2,0	1,9	2,1	2,7	3,1	7,5
60	1,6	2,1	2,5	2,6	2,7	3,7	4,3	10,5
90	2,1	2,4	2,7	3,2	3,3	4,2	5,4	13,4
120	2,2	2,7	3,1	3,4	3,8	4,5	5,9	15,0
150	2,4	2,9	3,4	3,9	4,5	5,3	6,7	17,4
180	2,7	3,3	3,7	4,7	4,5	5,8	6,4	19,3
210	2,8	3,3	3,8	4,2	4,6	6,1	7,0	19,8
240	3,1	3,6	4,0	4,7	5,0	6,4	7,4	21,1
300	3,3	4,0	4,3	4,9	5,4	6,7	8,6	23,1
360	3,7	4,3	4,6	5,3	5,7	7,3	8,8	24,1
420	3,5	4,4	4,8	5,3	5,7	7,6	9,1	24,7
480	4,2	4,8	5,2	5,7	6,0	7,8	9,3	24,7
1 020	5,1	5,5	5,9	6,5	6,7	8,1	10,3	23,6
1 460	5,7	5,9	6,4	6,3	6,9	9,0	10,2	21,7
1 880	5,8	6,3	6,4	6,4	6,9	8,4	10,3	20,2
2 420	6,0	6,0	6,4	6,3	6,9	9,1	10,3	19,6
2 840	6,2	6,2	6,6	6,3	7,0	9,1	10,3	19,4
3 380	6,1	5,8	6,1	6,6	7,0	8,6	10,6	18,9

### Závěr

Jak je z grafu vidět, hmotnost hydrogelové kuličky v závislosti na čase se poměrně výrazně liší podle koncentrace kuchyňské soli, která byla rozpuštěna v roztoku, ve kterém byly kuličky namočený. Vidíme, že nejvíce vody pohltní kuličky, které jsou ponořeny v čisté vodě, a že s rostoucí koncentrací soli kuličky pohlctují méně vody. Na pohlcování vody má vliv už poměrně malé množství soli v roztoku, neboť jak jsme naměřili, tak už pro 1 % roztok soli se do hydrogelu pohltní jen přibližně poloviční množství vody, než by se pohltilo v čisté vodě. Při maximální možné koncentraci soli v roztoku (tedy nasycenému roztoku, což odpovídá 26 %) se do hydrogelu pohltní přibližně čtvrtinové množství vody, než by se pohltilo v čisté vodě.

Také jsme ukázali, že informace na obalu hydrogelu, ze které vylivalo, že maximální hmotnosti dosáhnou hydrogelové kuličky po 4 hodinách ve vodě, je zavádějící, neboť maximální hmotnosti se dosáhne až v mnohem větším čase. Dále bychom si měli všimnout, že z naměřených dat vyplývá, že kuličky v určitém čase pohltní maximální množství vody a dále už jejich hmotnost klesá. Zajímavé je, že čas, kdy pohltní maximální množství vody, je závislý na koncentraci roztoku soli, ve kterém jsou ponořeny. Z naměřených dat lze tento efekt pozorovat u čisté vody,



Obr. 25: Závislost hmotnosti kuličky na čase, po který byla ponořena v roztoku soli s koncentrací od 0 % (čistá voda) po 26 % (nasycený roztok).

kde je jasně vidět, že po přibližně 8 hodinách už kuličky nenasákají další vodu a následně vodu spíše pomalu vypuzují. U roztoků s příměsí soli tento efekt není tolik výrazný, nicméně naměřená data nasvědčují tomu, že se začíná objevovat. Je tedy možné, že výrobce prováděl testování v destilované vodě, a proto uvádí nižší čas, než jsme my naměřili.

Na závěr by bylo vhodné diskutovat, jaká je přesně závislost hmotnosti kuličky na době ponoření v solném roztoku. Při pohledu na graf se nabízí proložení naměřených hodnot funkcí typu logaritmus, odmocnina či exponenciála, což by ale nebylo vhodné, a to hned ze dvou důvodů. Prvním důvodem je, že nemáme žádný teoretický předpoklad, který by takovouto závislost předpovídal. Druhým důvodem je to, že proložení naměřených dat některou z těchto funkcí by evidentně nebylo v souladu s měřeními ve větším časovém odstupu, kde hmotnost kuličky s časem klesá. Z těchto důvodů nebudeme naměřená data prokládat žádnou funkcí. Hlavní závěr tohoto experimentu, tedy že s vyšší koncentrací soli v roztoku se snižuje nasákavost hydrogelových kuliček, je z tohoto grafu i tak na první pohled jasně vidět. Mírného zpřesnění závislosti bychom dosáhli, kdybychom měli sadu dokonale stejných kuliček a vždy po změření hmotnosti v daném čase bychom experiment začali od znovu – tak bychom eliminovali vliv prodlevy, během které kuličky vážíme.



## Úloha IV.E . . . trhni si!

Změřte mez pevnosti kancelářského papíru v tahu. Ideálně použijte co nejméně potříštěnou část brožurky, ve které vám přišlo zadání (pro tisk je využíván papír  $80 \text{ g} \cdot \text{m}^2$ ).

### Teorie

Papír je tenký materiál, který se nejčastěji vyrábí z buničiny. Jeho vlastnosti jsou určeny právě druhem surovin použitých k jeho výrobě (obvykle jde o smrkové dřevo). Jedním ze základních parametrů papíru je gramáž. V kancelářských potřebách se nejčastěji setkáme s papírem o gramáži  $80 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}$ .

Papír je v dnešní době vyráběn strojově a vlákna jsou seřazena jedním směrem. Směr těchto vláken ovlivňuje všechny další vlastnosti, např. způsobuje anizotropii pevnosti v tahu – pevnost ve směru podélném je větší než ve směru příčném. Pevnost v tahu  $\sigma_t$  znamená schopnost odolávat vnějším silám, které vzorek materiálu natahují. Vypočítá se jako podíl působící síly na plochu

$$\sigma_t = \frac{F}{S},$$

kde  $S$  je plocha řezu v rovině kolmé na působící sílu  $F$ . Pevnost vyjadřujeme nejčastěji v jednotkách MPa a GPa.

Pokud do vzorce dosazujeme plochu řezu nedeformovaného vzorku  $S_0$ , hovoříme o tzv. smluvním napětí. Papír se však působením síly natáhne z délky  $l_0$  na délku  $l = l_0(1 + \varepsilon)$ . Pokud budeme předpokládat zachovávající se objem listu papíru  $V$  (a malé deformace), dostaneme skutečné napětí

$$\sigma_t = \frac{Fl}{V} = \frac{Fl_0(1 + \varepsilon)}{V} = \frac{F}{S_0}(1 + \varepsilon). \quad (49)$$

Mez pevnosti definujeme jako napětí, při němž začne deformačně-napěťová křivka klesat a dojde k narušení celistvosti vzorku.

### Pomůcky

- Kancelářský papír,
- řezačka,
- LabQuest od firmy Vernier + Dual-Range Force Sensor,
- svorka na papír,
- mikrometr.

### Postup práce

Prvotním úkolem bylo nalézt způsob, jak upevnit papír na siloměr, aniž by došlo k jeho perforaci. Siloměr končí háčkem, na který jsme zavěsili plechovou kancelářskou svorku a tou papír přicvakli. Svorka nebyla však příliš silná – papíry širší než 2 mm se dříve ze svorky vyvlékly, než se přetrhly. Proto jsme využili řezačku k tvorbě velmi tenkých, rovných proužků papíru. Před každým pokusem jsme

změřili šířku proužku mikrometrem. Pro každou šířku jsme proměřili mez pevnosti několikrát. Siloměr měřil sílu s přesností na tři desetinná místa. Před každým pokusem byl vynulován.

Jednoduchým pokusem, při němž položíme čtverec papíru na vodu a pozorujeme jeho zkroucení, jsme zjistili, který ze směrů je příčný a který podélný. Osa zkroucení je rovnoběžná s podélným směrem vláken. Tento podélný směr vláken korespondoval s delší stranou papíru a příčný tedy naopak s kratší stranou papíru. Měřili jsme síly pro roztrhnutí jak v podélném směru vláken, tak v příčném.

Relativní prodloužení bylo vyhodnocováno pomocí videozáznamu.

### Zpracování

Hodnoty síly pro každý rozměr jsme statisticky zpracovali. Na základě opakovaných měření jsme stanovili nejistotu v šířce proužku jako  $s_s = 0,02$  mm (pro všechny proužky stejnou). Ke každé šířce papíru náležela sada hodnot naměřených sil, z nichž jsme vypočítali průměr a výběrovou směrodatnou odchylku. Na základě Studentova koeficientu pro  $3\sigma$  jsme stanovili interval spolehlivosti, na základě nějž jsme vylučovali hrubé chyby. Poté bylo statistické zpracování nejistot zopakováno.

Směrodatnou odchylku nepřímého měření jsem stanovili z Gaussova zákona hromadění chyb, který má pro naše měření tvar

$$s_{\sigma_t} = \sqrt{\left(\frac{1 + \varepsilon}{S}\right)^2 s_F^2 + \left(\frac{-F(1 + \varepsilon)}{S^2}\right)^2 s_s^2 + \left(\frac{F}{S}\right)^2 s_\varepsilon^2}.$$

Ze zákona hromadění chyb jsme vypočítali směrodatnou odchylku pro každou šířku papíru zvlášť a z těchto hodnot určili aritmetický průměr, který představoval hledanou mez pevnosti v tahu pro kancelářský papír.

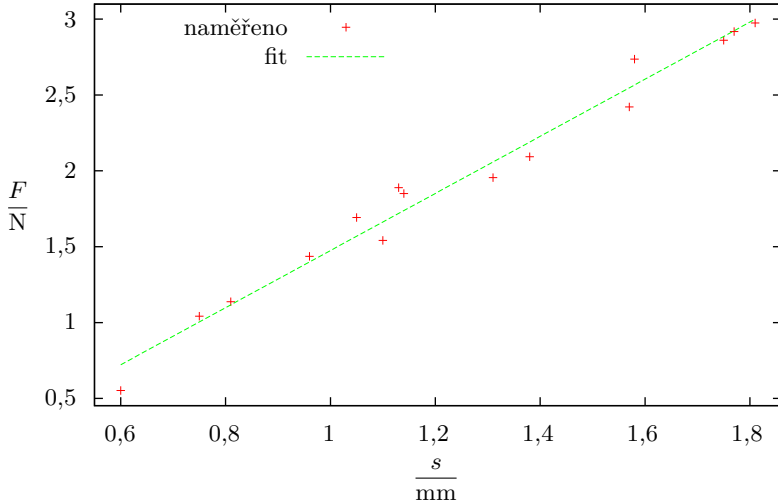
Tloušťku papíru jsem stanovili jako  $d = (0,105 \pm 0,01)$  mm. Maximální chyba mikrometru daná výrobcem je 0,004 mm a chyba siloměru je 0,005 N. Při zaokrouhlování bereme v potaz skutečnost, že při měření mikrometrem neaplikujeme vždy stejný tlak a chyby jsou proto spíše větší.

### Podélný směr

V podélném směru jsem naměřili 35 hodnot, z nichž některé jsme jako chyby vyřadili. Celkově zbylo 28 hodnot. Relativní prodloužení bylo  $(0,7 \pm 0,05)$  %, chybu jsme odhadovali ze snímků videozáznamu. Šířka proužku papíru se pohybovala v rozmezí od 0,84 mm do 1,5 mm, čemuž odpovídá rozmezí sil od 2,21 N do 3,945 N. Mez pevnosti v tahu papíru byla v podélném směru vypočítána jako

$$\sigma_{t1} = (24,9 \pm 0,7) \text{ MPa}.$$

Data pro podélný směr trhání jsou vynesena na obrázku 26.



Obr. 26: Graf závislosti síly potřebné k roztržení papíru v závislosti na šířce vzorku; podélný směr

### Příčný směr

V příčném směru jsem naměřila 100 hodnot, 92 z nich nepředstavovalo hrubé chyby. Relativní prodloužení bylo  $(0,9 \pm 0,05) \%$ . Šířka papíru se pohybovala od 0,6 mm do 1,81 mm. Síla pro roztržení se pohybovala od 0,85 N do 3,21 N. Mez pevnosti v tahu papíru byla v příčném směru vypočítána jako

$$\sigma_{t2} = (14,9 \pm 0,6) \text{ MPa} .$$

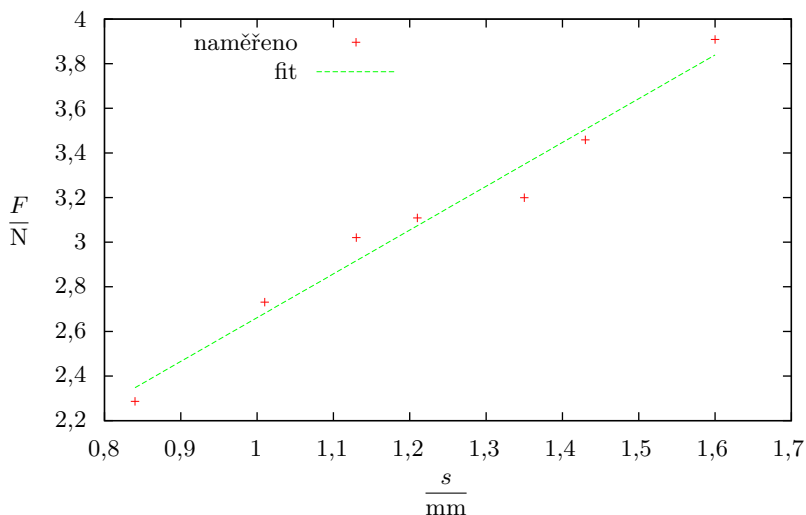
Data pro podélný směr trhání jsou vynesena na obrázku 27.

### Diskuse chyb

Největší chyby měření byly převážně způsobeny lidským faktorem. Nebylo možné docílit toho, aby za proužek vždy bylo taháno stejným způsobem. Nejvíce vychýlené hodnoty byly vyloučeny při statistickém zpracování metodou  $3\sigma$ .

Ačkoliv jsme u každého proužku kontrolovali, jestli má na obou koncích přibližně stejnou tloušťku, ve většině případů tomu tak ale nebylo, protože řezačka nebyla tak ostrá, aby papír přesně seřízla. Pro získání přesnějších hodnot by bylo vhodné změnit metodiku a stanovit šířku proužku jako minimální nikoli průměrnou. Měření relativního prodloužení by bylo možné podrobit detailnější analýze za pomoci rychloběžné kamery.

Vypočítané nejistoty typu B byly tak malé, že se vůbec nepromítly do prvních třech platných číslic meze v tahu, které ve výsledcích uvádíme. Proto jsem tyto



Obr. 27: Graf závislosti síly potřebné k roztržení papíru v závislosti na šířce vzorku; příčný směr.

nejistoty vůbec nezmiňovali. V průběhu měření jsme zjistili, že síla utržení závisí i na délce papíru, pravděpodobně v důsledku nerovnoměrného rozložení sil po délce. Měření tedy probíhalo vždy s papírem o stejné délce.

### Závěr

Na základě více než 100 měření jsme stanovili hodnoty meze v tahu papíru o gramáži  $80 \text{ g}\cdot\text{m}^{-2}$ . Potvrdili jsme teoretické předpoklady,<sup>8</sup> že pevnost v tahu ve směru podélném je větší než ve směru příčném.

Pevnost v tahu ve směru podélném je

$$\sigma_{t1} = (24,9 \pm 0,7) \text{ MPa},$$

pevnost v tahu ve směru příčném je

$$\sigma_{t2} = (14,9 \pm 0,6) \text{ MPa}.$$

V žádných běžně dostupných inženýrských tabulkách ani další literatuře jsme nenalezli hodnoty, s nimiž bychom mohli naše výsledky porovnat. Z internetových zdrojů jedinou číselnou hodnotu poskytl zdroj *Goyal, H.*: PaperOnWeb. <http://www.paperonweb.com/paperpro.htm#Strength%20Properties>. V ostatních zemích neurčují mez v tahu (*tensile strength*) v pascálech, ale v  $\text{kN}\cdot\text{m}^{-1}$ , je tedy potřeba naše výsledky násobit tloušťkou. Hodnoty po převodu jsou  $\sigma_{t1} \doteq 2,6 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$

<sup>8</sup> *Ph.D. Pecina, P.*: Papír. [http://www.ped.muni.cz/wtech/03\\_studium/papir.pdf](http://www.ped.muni.cz/wtech/03_studium/papir.pdf)

a ,  $\sigma_{t2} \doteq 1,6 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$ , ve zdroji je uvedeno  $3,6 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$  a  $2,6 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$  v příslušných směrech. Z našeho měření vychází tedy vychází pro příčný a podélný směr kvalitativně stejné výsledky, ale mez pevnosti je zhruba o  $1 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$  menší. Tento rozdíl bude pravděpodobně způsoben tím, že v našem experimentu nebyla dobře kontrolována šířka a neporušenost papíru po celé délce proužku. Zároveň se struktura našeho papíru může razantně lišit od struktury papíru zmíněného v internetovém zdroji.

## Úloha V.E ... fotografická

*Pomocí digitálního fotoaparátu změřte frekvenci střídavého proudu v síti. Postavte i chytrý telefon s vhodnou aplikací, která umožní nastavit přesnou hodnotu expozičního času.*

### Teorie

Principem úlohy je vyfotografování nějakého zdroje světla, třeba pouliční lampy, se známým expozičním časem fotoaparátu a za současného pohybu fotoaparátu. Je-li vhodný zdroj připojen k síti, kde ho živí střídavý proud, na rozmazané fotografii uvidíme jeho blikání. Spočteme-li počet bliknutí a vydělíme ho expozičním časem, získáme buď přímo frekvenci v síti, nebo její dvojnásobek, podle použitého zdroje. Podívejme se, jaké zdroje a proč můžeme použít.

Obyčejná žárovka s wolframovým vláknem se při průchodu elektrického proudu rozzhává a začne svítit. Použijeme-li střídavý proud z elektrické sítě, jeho frekvence je tak velká, že za dobu, kdy vláknem neprochází žádný (nebo jen velmi malý) proud, se vlákno nestihne zchladit, a bude tedy svítit nepřetržitě. Žárovka tedy není vhodným zdrojem pro tento experiment.

Lepší to bude se zářivkou. Ta je tvořena dlouhou skleněnou trubicí se dvěma elektrodami, která je naplněna rtuťovými parami a argonem. Při průchodu elektrického proudu nastává v trubici doutnavý výboj, který vyzařuje převážně v ultrafialové oblasti. Toto záření dopadá na stěny trubice, které jsou pokryty luminoforem, který záření přemění na viditelné světlo. Zářivka svítí pouze tehdy, když jí prochází proud – je-li připojena ke střídavému zdroji, nebude svítit nepřetržitě jako obyčejná žárovka, ale bude „blikat“. Toto blikání má vysokou frekvenci, je tedy pro lidské oko nepostřehnutelné, lidé vnímají zářivku jako kontinuální světelný zdroj (může však být skrytým nebezpečím pro epileptiky v nákupních centrech). Na rozmazané fotografii nicméně toto blikání zachytit lze. Protože svícení zářivky nezávisí na směru procházejícího proudu, jen na jeho velikosti, zaznamenaná frekvence je oproti té v síti dvojnásobná (během jedné periody proudu v síti zářivka dvakrát blikne).

Trochu jiné to bude, je-li zdrojem obyčejná LED (*light-emitting diode*). Je to polovodičová součástka, která je tvořena P-N přechodem. Jeho typickou vlastností je rozdílné chování vůči procházejícímu proudu pro opačné směry průchodu. Je-li zapojena v propustném směru, protéká jí proud a dioda emituje světlo. Je-li

zapojena v závěrném směru, proud jí neprochází (pokud ovšem do diody nepouštíme příliš velké napětí, abychom dosáhli průrazného napětí). Připojíme-li diodu ke zdroji střídavého proudu, propustí proud vždy jen v jednom směru, proud bude tedy diodou procházet vždy jen polovinu periody (jednocestný usměrňovač). Naměřená frekvence blikání LED bude přímo rovna frekvenci proudu v síti. Použijeme-li tzv. můstkové (Graetzovo) zapojení čtyř diod, bude proud propouštěn v obou směrech (dvoucestný usměrňovač). V takovém případě naměříme opět frekvenci blikání LED dvojnásobnou oproti frekvenci proudu v síti.

### Experiment

K experimentu byl použit mobilní telefon s fotoaparátem, kterým byly fotografovány lampy pouličního osvětlení v Praze. Snímky byly schválně pořizovány „rozmazané“, abychom mohli následně zjišťovat počet bliknutí lampy za dobu expozice snímku. Jelikož z výroby předinstalovaná aplikace na fotografování v telefonu neumožňovala zaznamenávat expoziční časy u jednotlivých fotek v člověkem čitelné podobě, bylo potřeba si stáhnout jinou aplikaci, která to umožňuje. Taková aplikace je například Camera FV-5 Lite, která je zdarma ke stažení pro mobilní telefony s OS Android na Google Play Store.

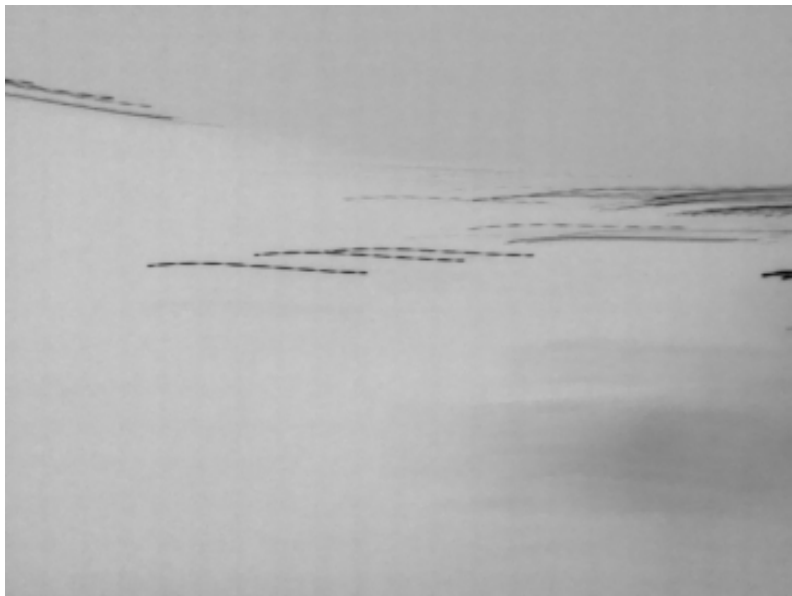
Příklad snímku, který byl pořízen, můžeme vidět na obrázku (28). Na obrázku (29) potom můžeme vidět výřez, na kterém je v detailu vidět blikání lampy. Z tohoto detailního obrázku můžeme určit počet bliknutí lampy během doby expozice snímku. Při fotografování je potřeba fotoaparátem pohybovat správnou rychlostí, abychom získali snímky, ze kterých budeme schopni něco vyčíst.

### Měření a vyhodnocení

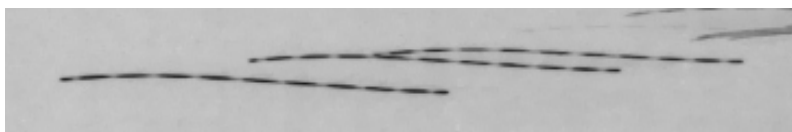
Zachytili jsme 14 rozmazaných snímků pouliční lampy, u nichž známe expoziční čas (ten se u jednotlivých snímků liší). Z každého snímku jsme vybrali jednu lampu a u ní jsme určili počet bliknutí a zjistili jsme expoziční dobu snímku. Jelikož nebylo vždy možné přesně určit počet čárek na snímku (jedna čárka představuje jedno bliknutí), museli jsme občas počet čárek odhadovat (např. dvě půlčárky na začátku a konci celé přerušované čáry dají dohromady jednu celou čárku). Toto číslo jsme společně s expoziční dobou snímku zanesli do tabulky (3).

Při vyhodnocování naměřených dat nejprve u každého měření vydělíme počet bliknutí lampy expoziční dobou snímku, čímž získáme naměřenou frekvenci blikání lampy, a z těchto čísel následně spočteme výběrový průměr a výběrovou směrodatnou odchylku. Tímto postupem dostáváme, že frekvence blikání lampy je  $(98,4 \pm 1,8)$  Hz.

Jelikož jsme celou dobu chtěli určit frekvenci proudu v elektrické síti, musíme si uvědomit, že pouliční lampy blikají s dvojnásobnou frekvencí, než je frekvence proudu v síti (viz odstavec Teorie). Musíme tedy naměřenou frekvenci blikání lampy vydělit dvěma. Po aplikaci vzorců na práci s chybami dostáváme, že frekvence proudu v síti je tedy  $(49,2 \pm 0,9)$  Hz.



Obr. 28: Ukázka rozmazaného snímku pouliční lampy. Barvy snímku byly invertovány a následně byl převeden do škály šedé.



Obr. 29: Detail rozmazaného snímku pouliční lampy.

### Závěr

Změřili jsme frekvenci proudu v elektrické síti využitím faktu, že zářivky při průchodu střídavého proudu nesvítí spojitě, ale blikají s frekvencí závislou na frekvenci proudu, který jimi prochází. Ačkoliv má toto blikání frekvenci kolem 100 Hz, byli jsme schopni ho pomocí fotoaparátu zachytit. Je známý fakt, že střídavý proud v elektrické síti má frekvenci 50 Hz, což je v souladu s výsledkem našeho experimentu 49,2 Hz. V našem experimentu jsme pořídili celkem 14 fotografií, které jsme dále zpracovávali, což nám stačilo na to, abychom měli chybu měření 0,9 Hz. Pokud bychom požadovali výsledek s větší přesností stačilo by provést více měření, což už jsme ale na tomto místě nepovažovali za nutné.

Tab. 3: Naměřené hodnoty počtu bliknutí lampy.

expoziční čas s	počet bliknutí lampy
1/10	10
1/10	10
1/12	8
1/14	7
1/10	10
1/14	7
1/10	11
1/10	10
1/10	11
1/12	8
1/10	9
1/14	6
1/14	7
1/14	7

## Úloha VI.E . . . zákeřný restituční koeficient

*Pokud pustíte hopík či jiný pružný míček na vhodný povrch, pak se začne odrážet. Při každém odrazu se disipuje (ztrácí do tepla, zvuku atd.) kinetická energie míčku a ten proto nevyskočí do počáteční výšky. Definujme koeficient restituice jako poměr kinetické energie míčku po dopadu ku kinetické energii před dopadem. Závisí koeficient restituice na výšce, ze které míček dopadal? Vyberte si jeden vhodný míček a jeden vhodný povrch (měření na více površích s více míčky samozřejmě náležitě oceníme), na kterém proměříte závislost koeficientu restituice na výšce, ze které míček dopadl. Experiment náležitě popište a proveďte dostatečný počet měření.*

### *Popis experimentu*

Nášim úkolem je změřit restituční koeficient odrazu skákacího míčku (dále jen hopík) od povrchu při různých výškách, ze kterých hopík na povrch padá. Toho lze dosáhnout různými způsoby. My budeme měřit časy mezi jednotlivými dopady analýzou zvuku pomocí programu Audacity<sup>9</sup>. Postupovat budeme tak, že pustíme hopík z určité výšky a necháme jej volně se odrážet tak dlouho, dokud to bude možné (příliš malé odrazy, úhel odrazu se odchyľuje, . . .). Konkrétní koeficienty restituice pro jednotlivé dopady (stejně jako výšku, ze které hopík padal) vypočítáme z časových rozdílů mezi předchozím a měřeným dopadem, a měřeným a následujícím dopadem. Tímto způsobem jsme schopni získat poměrně velké množství relativně přesných dat.

<sup>9</sup><http://www.audacityteam.org/>



### Teorie

Nechť  $t_1$  je čas mezi předchozím a měřeným dopadem,  $t_2$  čas mezi měřeným a následujícím dopadem a  $e$  je koeficient restituce kolize hopíku s povrchem.

Nejprve uvažujme situaci bez vlivu aerodynamického odporu. Nechť  $h_1$  je výška v bodě obratu hopíku před měřeným dopadem a  $h_2$  výška v bodě obratu po měřeném dopadu. Hopík se pohybuje v souladu s řešením pohybové rovnice pro pád z klidové výšky  $h_0$

$$h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2.$$

Potom tedy platí

$$h_1 = \frac{1}{8}gt_1^2,$$

$$h_2 = \frac{1}{8}gt_2^2.$$

Koeficient restituce  $e$  je definován jako podíl kinetických energií po odrazu a před odrazem. V modelu bez odporu vzduchu jsou tyto energie podle zákona zachování energie úměrné výškám bodů obratu, tedy

$$e = \frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{mgh_2}{mgh_1} = \frac{t_2^2}{t_1^2}.$$

Takže závislost koeficientu restituce na výšce vypuštění hopíku bude mít tvar

$$e(h) = e(h_1) = e(t_1) = \frac{t_2^2}{t_1^2}. \quad (50)$$

### Odpor vzduchu

V závislosti na parametrech a metodice Vašeho experimentu může hrát odpor vzduchu větší či menší roli. Proto by se měl každý experimentátor přesvědčit o tom, jaký vliv má aerodynamický odpor v daném uspořádání.<sup>10</sup>

Velikost odporové síly lze dobře přiblížit pomocí Newtonova vztahu<sup>11</sup>

$$F = \frac{1}{2}C_{\rho}Sv^2,$$

kde  $C$  je součinitel odporu,  $\rho$  je hustota vzduchu,  $S$  je plocha průřezu hopíku do roviny kolmé ke směru relativního pohybu hopíku a vzduchu,  $v$  je velikost vzájemné rychlosti hopíku a vzduchu. Směr této síly je vždy proti relativnímu pohybu hopíku vůči vzduchu. Newtonův vztah dobře popisuje aerodynamický odpor pro větší rychlosti. Pro nízké rychlosti sice hodnotu odporu podhodnocuje, ale pro tyto velikosti rychlosti jsou odporové síly stejně zanedbatelné, proto Newtonův

<sup>10</sup>Nestačí fakt, že Vám data vychází „pěkně“, jak se ukážeme později.

<sup>11</sup>Skripta KFPP MFF UK, rovnice 4,146; 10. 5. 2016 [http://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz\\_fyziky\\_pro\\_DS/display.php/kontinuum/4\\_6](http://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/display.php/kontinuum/4_6)

vztah popisuje náš systém dobře. Námi použité hopíky se dají aproximovat koulí o průměru  $d$  a hmotnosti  $m$ . Hodnotu Reynoldsova čísla lze odhadnout jako

$$\text{Re} = \frac{dv}{\nu},$$

kde  $\nu$  je kinematická viskozita vzduchu (nalezneme v tabulkách). Kvalifikovaným odhadem lze nahlédnout, že v našem případě přesáhne místy hodnota Reynoldsova čísla 10 000, takže aplikace newtonovského odporu je na místě.

Definujme  $k$  jako

$$k = \frac{\pi}{16} \frac{\rho d^2}{m},$$

kde jsme tiše položili  $C = 1/2$  jakožto součinitel odporu pro kouli. Pohybová rovnice hopíku mezi odrazy má potom tvar

$$\ddot{h} = -g \pm kh^2,$$

kde znaménko  $\pm$  nabývá hodnoty  $-$  pro pohyb hopíku nahoru a  $+$  při pohybu hopíku dolů. Tato diferenciální rovnice má řešení

$$\begin{aligned} h_+ &= H_1 + \frac{1}{k} \ln \left( \cos \left( \sqrt{gk} (T_1 - t) \right) \right), \\ h_- &= H_2 - \frac{1}{k} \ln \left( \cosh \left( \sqrt{gk} (T_2 + t) \right) \right), \\ v_+ &= \dot{h}_+ = -\sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{tg} \left( \sqrt{gk} (T_1 + t) \right), \\ v_- &= \dot{h}_- = -\sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{tgh} \left( \sqrt{gk} (T_2 + t) \right), \end{aligned}$$

kde  $H_1, H_2, T_1, T_2$  jsou konstanty, a znaménka v dolních indexech určují směr rychlosti  $v = \dot{x}$ .

Uvažujme pohyb hopíku mezi odrazy, který trvá čas  $T$ . Necht hopík dosáhne bodu obratu v čase  $t = 0$ . Dále položme  $H_1 = H_2 = 0$  jako výšku bodu obratu, podobně  $T_1 = T_2 = 0$ . Necht (první) odraz hopíku od povrchu nastal v čase  $t = -t_1$ , a (druhý) dopad hopíku na povrch v čase  $t = t_2$ . Potom platí

$$\begin{aligned} T &= t_1 + t_2, \\ h_m &= -\frac{1}{k} \ln \left( \cos \left( \sqrt{gk} (t_1) \right) \right) = \frac{1}{k} \ln \left( \cosh \left( \sqrt{gk} (t_2) \right) \right), \end{aligned} \quad (51)$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{tg} \left( \sqrt{gk} (t_1) \right), \quad (52)$$

$$v_1 = -\sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{tgh} \left( \sqrt{gk} (t_2) \right), \quad (53)$$

kde  $h_m$  je výška bodu obratu nad povrchem,  $v_0$  je rychlost hopíku bezprostředně po (prvním) odrazu a  $v_1$  je rychlost hopíku při (druhém) dopadu na povrch.<sup>12</sup> Z rovnice (51) dostaneme vztah mezi  $t_1$  a  $t_2$

$$\cosh\left(\sqrt{gk}(t_2)\right) = 1/\cosh\left(\sqrt{gk}(t_1)\right).$$

Odtud již můžeme získat zajímavý parametr – poměrnou ztrátu energie následkem aerodynamického odporu (tj. obdobu koeficientu restituce pro let). Označme jej  $e_v$ , platí pro něj

$$e_v = \frac{v_1^2}{v_0^2} = \frac{\operatorname{tgh}^2(\operatorname{acosh}(1/\cosh(\sqrt{gk}t_1)))}{\operatorname{tg}^2(\sqrt{gk}t_1)} = \cos^2(\sqrt{gk}t_1),$$

což můžeme pomocí (51) vyjádřit jako

$$e_v = e^{-2kh_m}. \quad (54)$$

Podle velikosti parametru maximálních hodnot  $e_v$  můžeme upravit další postup:

1. ( $1 - e_v \ll 1 - e$ ): Odpor vzduchu má na výsledek experimentu malý vliv, jeho zanedbáním nedojde k velké chybě. Příkladem může být velký, těžký hopík na dobře odrazivém povrchu pouštěný z velmi malé výšky.
2. ( $1 - e_v \ll 1$ ): Odpor vzduchu bude mít pravděpodobně<sup>13</sup> nezanedbatelný vliv na vaše výsledky a proto byste se měli pokusit jej při zpracování zohlednit. V případě potřeby je možné provést linearizaci

$$e_v = e^{-kh_m} \approx 1 - kh_m.$$

3. ( $e_v$  je malý): V tomto případě bude hrát odpor vzduchu klíčovou roli ve Vámi naměřených hodnotách. V důsledku toho je také možné, že získání hodnot koeficientů restituce odrazivosti nebude ani po započtení korekce možné, kvůli chybám při provádění této korekce. V této oblasti se nachází například pingpongové míčky pouštěné z výšky několika metrů.

V našem případě je situace ještě trochu složitější – nestačí totiž naměřené koeficienty podělit hodnotami  $e_v$ ; je třeba z času  $T$  určit rychlosti<sup>14</sup>  $v_0$  a  $v_1$ .<sup>15</sup>

Předpokládáme, že<sup>16</sup>  $kh_m \ll 1$  a označme

$$\tau_1 = \sqrt{gkt_1}; \quad \tau_2 = \sqrt{gkt_2}; \quad \tau = \frac{\sqrt{gkT}}{2} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2},$$

$$\Delta\tau = \frac{|\tau_1 - \tau_2|}{2}.$$

<sup>12</sup>Za povšimnutí stojí limitní přechod do modelu bez odporu vzduchu pro  $k$  jdoucí k nule, potom například  $\operatorname{tg}(\sqrt{gk}t_1) \approx \sqrt{gk}t_1$  a potom  $v_0 = gt_1$  etc.

<sup>13</sup>V závislosti na nepřesnosti vašeho měření.

<sup>14</sup>či energie

<sup>15</sup>Kdybychom to neprovedli, náš model formálně předpokládá rovnost  $v_0$  a  $v_1$ , proto při výpočtu koeficientu restituce po vydělení  $e_v(h_1)$  bychom do řešení stále vnášeli chybu.

<sup>16</sup>V našem případě součin  $kh_{\max}$  nepřesáhl hodnotu 0,05.

Vzhledem k tomu, že

$$\tau_1^2 = gkt_1^2 \approx 2kh_m,$$

Z (51) získáme

$$\cos \tau_1 = 1 / \cosh \tau_2.$$

Hodnoty  $\tau_1$  a  $\tau_2$  očekáváme poměrně malé, proto rozvíjíme tuto rovnici pomocí Taylorova rozvoje do pátého řádu

$$1 - \frac{\tau_1^2}{2} + \frac{\tau_1^4}{24} + o(\tau_1^5) = 1 - \frac{\tau_2^2}{2} + \frac{5\tau_2^4}{24} + o(\tau_2^5),$$

odkud

$$\tau_1^2 \approx \tau_2^2 \frac{1 - \frac{5\tau_2^2}{12}}{1 - \frac{\tau_1^2}{12}} \approx \tau_2^2 \left(1 - \frac{5\tau_2^2}{12}\right) \left(1 + \frac{\tau_1^2}{12}\right) \approx \tau_2^2 \left(1 - \frac{5\tau_2^2 - \tau_1^2}{12}\right).$$

Uvědomíme-li si, že  $\tau_1 = \tau - \Delta\tau$  a  $\tau_2 = \tau + \Delta\tau$  a tudíž že  $\tau_2^2 - \tau_1^2 = 4\tau\Delta\tau$ , dostaneme

$$48\tau\Delta\tau \approx \tau_2^2(5\tau_2^2 - \tau_1^2) \approx (\tau^2 + 2\tau\Delta\tau + \Delta\tau^2)(4\tau^2 + 12\tau\Delta\tau + 4\Delta\tau^2) \approx 4\tau^4.$$

Tedy můžeme přibližně vyjádřit  $\tau_1$  jako

$$\begin{aligned} \tau_1 &\approx \tau - \frac{\tau^3}{12}, \\ \tau_2 &\approx \tau + \frac{\tau^3}{12}, \end{aligned}$$

odkud dosazením do (51), (52) a (53) získáme funkce  $h_m(T)$ ,  $v_0(T)$  a  $v_1(T)$ . Označíme-li nyní časy  $T_1$  čas mezi předchozím a měřeným dopadem a  $T_2$  mezi měřeným a následujícím dopadem, potom pro koeficient restituce bude platit

$$e(h_m(T_1)) = \frac{v_0^2(T_2)}{v_1^2(T_1)}. \quad (55)$$

### Výsledky měření

Při našem měření jsme prováděli pro tři hopíky stejné formy: červený, modrý a zelený. Jednalo se o hopíky kulového tvaru.

#### Měření průměrů

Měření průměrů jsme prováděli digitálním posuvným měřidlem s rozlišením 0,01 mm. Chybu měření jsme stanovili na 0,01 mm. Při měření je třeba dbát na to, abychom při měření nedeformovali hopík – naměřené hodnoty by potom neodpovídali skutečným klidovým rozměrům. Měření jsme 15krát opakovali v různých směrech, abychom zamezili dalším systematickým chybám. Výsledky jsou v tabulce 4. Přitom jsme označili  $d_c$  je průměr červeného hopíku,  $d_m$  je průměr modrého hopíku a  $d_z$  je průměr zeleného hopíku.



Obr. 30: Měření hmotnosti a poloměru hopíku

Průměry hopíků byly tedy určeny jako<sup>17</sup>

$$d_c = (29,99 \pm 0,06) \text{ mm} ,$$

$$d_m = (29,97 \pm 0,04) \text{ mm} ,$$

$$d_z = (30,03 \pm 0,07) \text{ mm} .$$

### Měření hmotností

Hmotnosti jsme měřili pomocí digitálních vah s přesností 0,01 g. Výsledky měření jsou v tabulce 5, přičemž  $m_c$  je hmotnost červeného hopíku,  $m_m$  je hmotnost modrého hopíku a  $m_z$  je hmotnost zeleného hopíku.

Hmotnosti tedy byly určeny jako

$$m_c = (20,69 \pm 0,02) \text{ g} ,$$

$$m_m = (20,77 \pm 0,02) \text{ g} ,$$

$$m_z = (21,01 \pm 0,02) \text{ g} .$$

<sup>17</sup>Zpracování dat provádíme například podle: Zpracování měření, text fyzikální olympiády; 10. 5. 2016 <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/mereni.pdf>

Tab. 4: Naměřené průměry hopíků.

$\frac{d_c}{\text{mm}}$	$\frac{d_m}{\text{mm}}$	$\frac{d_z}{\text{mm}}$
30,24	30,28	30,41
30,01	30,04	29,77
30,35	29,96	29,74
29,62	29,93	29,63
29,84	30,08	29,86
29,79	30,03	29,91
30,12	29,76	29,90
29,92	29,79	30,00
30,04	29,83	30,16
30,22	29,84	30,25
29,85	30,02	30,21
29,94	29,96	29,94
29,88	30,10	30,36
29,87	30,04	30,27
30,16	29,96	30,00

Tab. 5: Hmotnosti hopíků.

$\frac{m_c}{\text{g}}$	$\frac{m_m}{\text{g}}$	$\frac{m_z}{\text{g}}$
20,68	20,77	21,01
20,68	20,79	21,03
20,70	20,78	21,00
20,70	20,74	21,00
20,71	20,77	20,99

### Měření časů mezi dopady

Bylo zaznamenáno celkem 397 relevantních dvojic časů. Vzhledem k množství zde přímo neuvedeme tabulkový výčet.<sup>18</sup>

Chybu určování časového údaje jsme stanovili na 2 ms (více o tomto níže), chyby vypočtených veličin se poté určovali podle zákona hromadění chyb.<sup>19</sup>

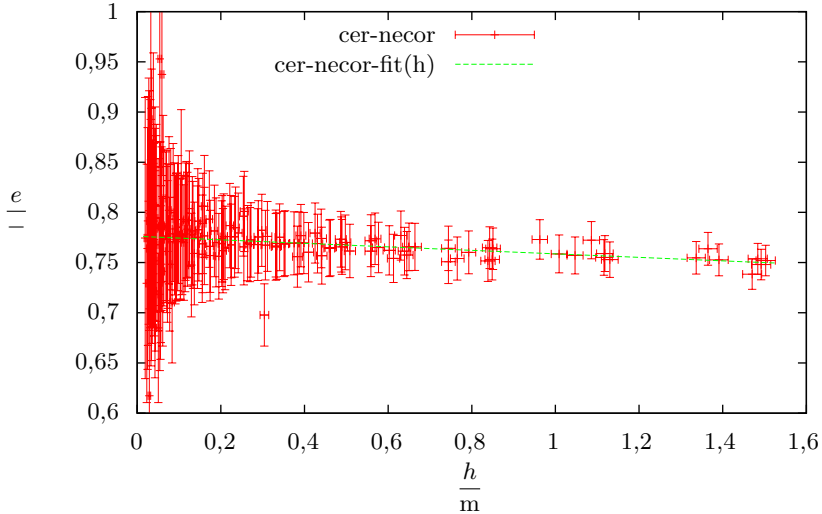
<sup>18</sup>Data lze dočasně nalézt zde: <https://uloz.to/x8FauBz/times-data-pdf>

<sup>19</sup>Zpracování měření, text fyzikální olympiády; 10. 5. 2016 <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/mereni.pdf>

## Závislost restitučního koeficientu na výšce

## Bez odporu vzduchu

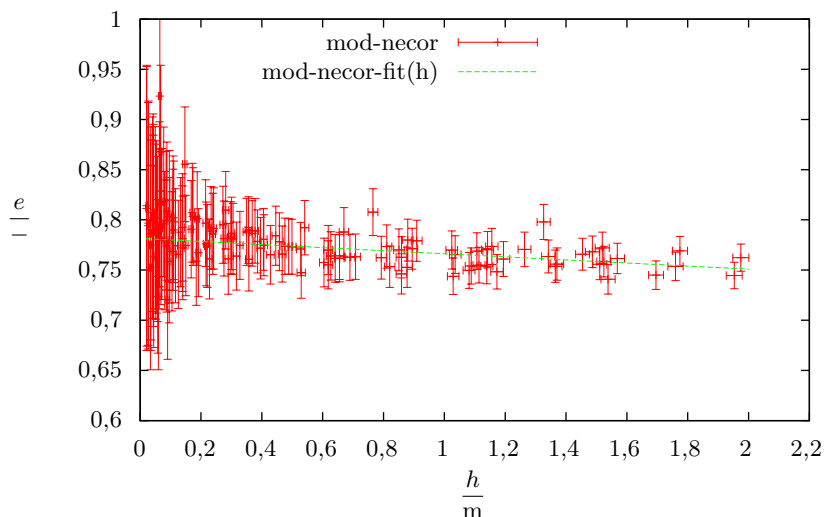
Nejprve určíme závislost restitučního koeficientu na výšce bez započtení odporu vzduchu, tedy podle (50). Výsledná data jsou vynesena na obrázcích 31, 32 a 33, kde *cer-necor* jsou data pro červený hopík, *mod-necor* jsou data pro modrý hopík a *zel-necor* jsou data pro zelený hopík.



Obr. 31: Závislost koeficientu restituce odrazu červeného hopíku na výšce od linolea – při zanedbání odporu vzduchu.

Funkce *cer-necor-fit(h)*, *mod-necor-fit(h)* a *zel-necor-fit(h)* jsou potom lineární funkce

$$\begin{aligned} \text{cer-necor-fit}(h) &= a_{cn}h + b_{cn} , \\ \text{mod-necor-fit}(h) &= a_{mn}h + b_{mn} , \\ \text{zel-necor-fit}(h) &= a_{zn}h + b_{zn} , \end{aligned}$$



Obr. 32: Závislost koeficientu restituce odrazu modrého hopíku na výšce od linolea – při zanedbání odporu vzduchu.

kde koeficienty byly získány pomocí lineární regrese<sup>20</sup> příslušných dat s výsledkem

$$a_{cn} = (-0,017 \pm 0,003) \text{ m}^{-1},$$

$$b_{cn} = (0,776 \pm 0,002),$$

$$a_{mn} = (-0,015 \pm 0,002) \text{ m}^{-1},$$

$$b_{mn} = (0,782 \pm 0,003),$$

$$a_{zn} = (-0,016 \pm 0,02) \text{ m}^{-1},$$

$$b_{zn} = (0,759 \pm 0,03).$$

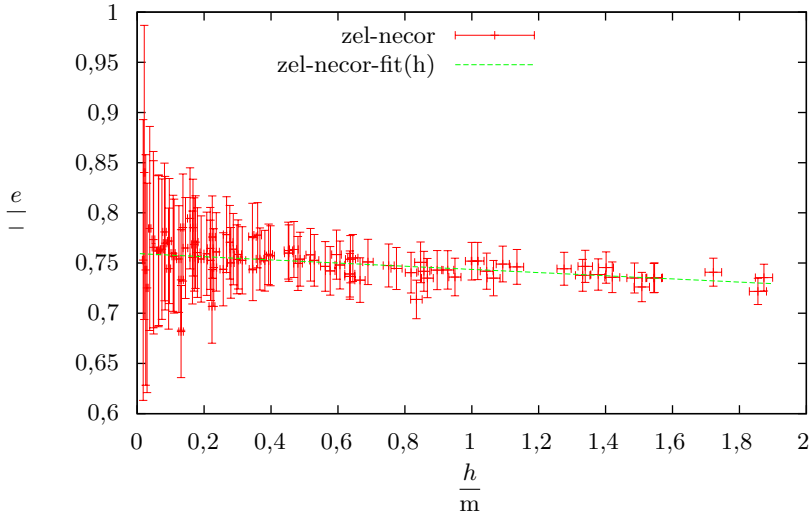
Při tomto zpracování nám koeficient restituce s výškou mírně klesá, což by mohlo být v souladu s faktem, že jsme zanedbali vliv odporu vzduchu. Provedme tedy zpracování i s korekcí na odpor vzduchu.

#### Korekce na odpor vzduchu

Namísto podle (50) zpracujme výsledky pomocí (55); zpracovaná data vynášíme do obrázků 34, 35 a 36. V použitém označení *cer-cor* jsou data pro červený hopík, *mod-cor* jsou data pro modrý hopík a *zel-cor* jsou data pro zelený hopík.

<sup>20</sup>Regresi jsme prováděli pomocí programu gnuplot, <http://www.gnuplot.info/>.





Obr. 33: Závislost koeficientu restituce odrazu zeleného hopíku na výšce od linolea – při zanedbání odporu vzduchu.

Funkce  $cer-cor-fit(h)$ ,  $mod-cor-fit(h)$  a  $zel-cor-fit(h)$  jsou potom lineární funkce

$$\begin{aligned} cer-cor-fit(h) &= a_{cc}h + b_{cc} , \\ mod-cor-fit(h) &= a_{mc}h + b_{mc} , \\ zel-cor-fit(h) &= a_{zc}h + b_{zc} , \end{aligned}$$

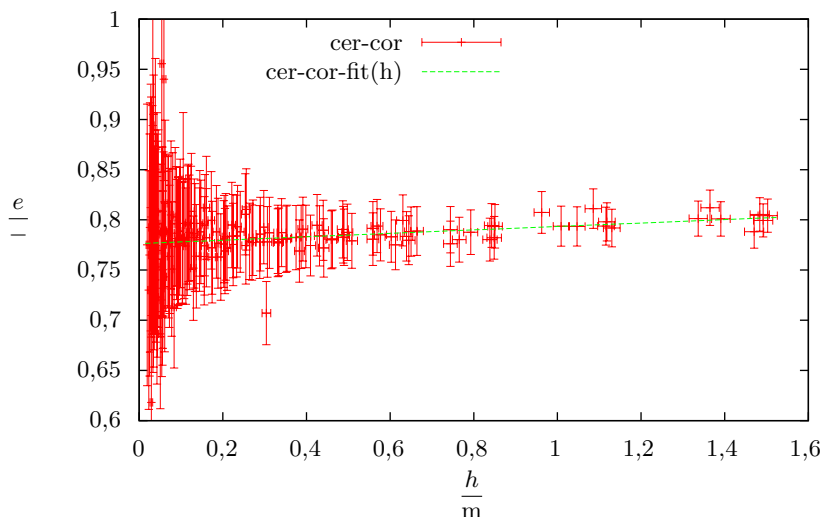
kde koeficienty byly získány pomocí lineární regrese na příslušná data jako:

$$\begin{aligned} a_{cc} &= (0,017 \pm 0,003) \text{ m}^{-1} , \\ b_{cc} &= (0,776 \pm 0,002) , \\ a_{mc} &= (0,020 \pm 0,002) \text{ m}^{-1} , \\ b_{mc} &= (0,782 \pm 0,003) , \\ a_{zc} &= (0,017 \pm 0,02) \text{ m}^{-1} , \\ b_{zc} &= (0,760 \pm 0,03) . \end{aligned}$$

Při započtení odporu vzduchu nám nyní koeficient restituce s výškou dokonce mírně roste.

### Diskuze výsledků

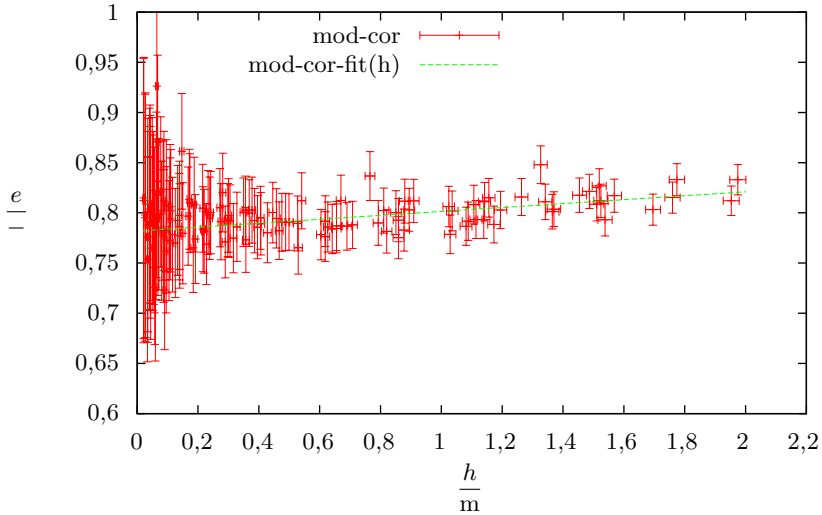
Při zanedbávání odporu vzduchu koeficient restituce klesal s rostoucí výškou, což je v souladu s očekávanými výsledky. Po započtení odporu vzduchu restituční koeficient s výškou dokonce mírně rostl, a to srovnatelně rychle jako klesal bez uvažování



Obr. 34: Závislost koeficientu restituce odrazu červeného hopíku na výšce od linolea s korekcí na odpor vzduchu.

odporu vzduchu. Tento výsledek je mírně překvapivý, jeho vysvětlení může být například takové, že vzhledem k tomu, že jsme měření prováděli na linoleu, mohlo při dopadech na nějaké kapsy či deformace v linoleu docházet k disipaci určité části energie, která příliš neroste s výškou. Může se také jednat o systematickou chybu měření času – časy dopadů jsme určovali ze závislosti tlaku na čase – pracovali jsme s rozlišením řádově větším než je stanovená chyba, nicméně jednoznačně určit okamžik nástupu vlny způsobené dopadem na místy ne příliš tichém pozadí je při těchto přesnostech problematické. Data jsme proto zaokrouhlovali na celé milisekundy a chybu stanovili větší (s připočtením možnosti náhodných lidských chyb). Nicméně nelze zcela vyloučit eventualitu, že při určování časů dochází ke zkreslení systematicky v závislosti na hlasitosti dopadu – tedy na výšce. Tento vliv by neměl být velký, ale ani celkový růst koeficientu po korekci není velký.

Další vliv mohl být horizontální pohyb hopíku. V některých případech se stalo, že se hopíky začaly pohybovat v horizontálním směru. V prvním přiblížení při malém pohybu by výsledná chyba byla zanedbatelná, protože při dopadech lze translační kinetickou energii rozložit na horizontální a vertikální složku a použité vztahy by pro tu vertikální měly pořád platit přibližně stejně. Skutečné vlivy tohoto pohybu ne nalézt až při hlubší analýze – vliv rotace hopíku, vliv vzdálenosti od mikrofonu (občas i více než metr a 1 metr  $\sim 3$  milisekundy, v rámci jednoho skoku míček byl rozdíl samozřejmě menší) a hlavně energetická ztráta vertikální kinetické energie, získal-li míček horizontální složku hybnosti při dopadu. Při našem experimentu jsme se samozřejmě snažili vyřadit ta měření, kde vliv horizontálního



Obr. 35: Závislost koeficientu restituce odrazu modrého hopíku na výšce od linolea s korekcí na odpor vzduchu.

pohybu byl nezanedbatelný, ale protože toto vyřazování jsme prováděli manuálně a subjektivně, je možné, že ve výsledném souboru je vliv tohoto jevu jiný pro malé a pro velké výšky.

Dále je dobré poznamenat, že z uvedených grafů člověk může získat dojem, že jak chyby měření, tak změny restituce s výškou jsou výraznější, než je tomu ve skutečnosti – proto z důvodů názornosti ještě uvedeme graf závislosti doby  $(n+1)$ -ho skoku na době  $n$ -tého skoku, viz obrázek 37.

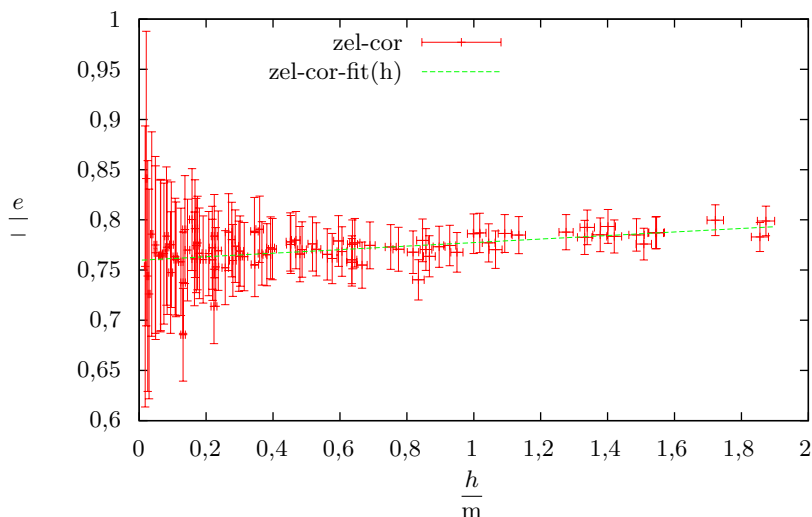
Co se týče vlivu povrchu na experiment, předpokládaná velikost restitučního koeficientu pro srážku dvou těles (v našem případě hopíku a podložky-povrchu) je

$$e_{12} = \frac{E_1 e_{11} + E_2 e_{22}}{E_1 + E_2},$$

kde  $e_{ij}$  je koeficient restituce pro srážku těles  $i$  a  $j$ ,  $E_i$  je Youngův modul pružnosti tělesa  $i$ . Několik našich orientačních měření pro různé hopíky a povrchy se kvalitativně shoduje s tímto vztahem.

### Závěr

Změřili jsme závislost koeficientu restituce na výšce, ze které byl hopík padal. Závislosti mají pro linoleový povrch a tři hopíky stejné série podobný charakter, na měření má odpor vzduchu nezanedbatelný vliv. V závislostech lze po korekcích pozorovat mírný nárůst. Koeficienty restituce se pohybovali v rozmezí 0,76 – 0,81.



Obr. 36: Závislost koeficientu restituce odrazu zeleného hopíku na výšce od linolea s korekcí na odpor vzduchu.

### Obecné poznámky k metodice

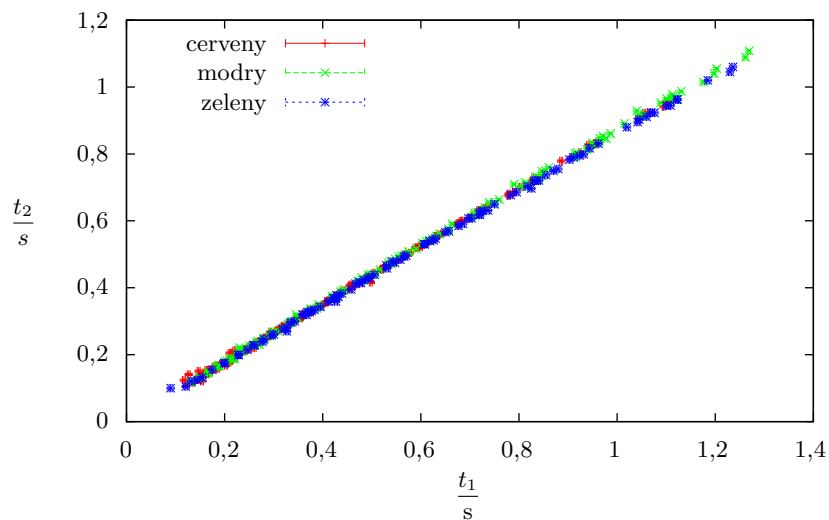
Pokud jste se rozhodli měřit v tomto experimentu časy optickými metodami (ať už ze záznamu nebo od oka stopkami), tak platí obecná poučka, že je lepší měřit časové intervaly mezi časově lépe lokalizovatelnými jevy – tj. mezi dopady, nikoli mezi dosahy maximálních výšek.<sup>21</sup> V tom případě je menší samotná chyba měření času, ale ve Vámi zvoleném postupu může být lepší měřit časy mezi maximy, pokud se to do dalšího zpracování hodí.

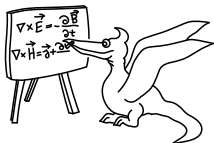
Snazíte-li se vyčíst časy (ať už dopadů či dosažení maxim) ze záznamu a nemáte k dispozici rychloběžnou kameru, může se stát, že časová odlehlost jednotlivých snímků (typicky několik málo setin sekundy) bude do měření vnášet příliš velkou chybu, můžete pohyb míčku interpolovat z pozice na snímcích okolo požadovaného jevu. K tomu Vám může posloužit například program Tracker.<sup>22</sup>

V případě vyčítání poloh maxim ze záznamu může rovněž posloužit program Tracker. Jen je zde třeba dát pozor na správnou kalibraci a zamyslet se nad perspektivou zaznamenávaného obrazu.

<sup>21</sup>Podobně, měříte-li doby kmitů matematického kyvadla, je lepší měřit doby mezi průkyvy minimy, než mezi obraty v maximech.

<sup>22</sup><http://physlets.org/tracker/>

Obr. 37: Závislost doby  $(n + 1)$ -tého skoku na době  $n$ -tého skoku



## Seriál o termodynamike

### Kapitola 1: Termodynamika

Tento rok bude seriál o termodynamike. Čo to je, tá termodynamika? Ak by sme sa pozreli, čo termodynamika skúma, mohli by sme to zhrnúť ako *makroskopické vlastnosti systémov*. Slovo makroskopický tu znamená, že sa pozeráme len na spoločný výsledok, hoci je dôsledkom správania sa veľmi veľkého množstva atómov. Namiesto sledovania polohy každého atómu teda napríklad sledujeme iba ťažisko, namiesto ich rýchlostí iba tlak a teplotu.

Prečo má termodynamika v sebe práve slovo termo? Ukazuje sa totiž, že za istých podmienok (myslíme *v termodynamickvej rovnováhe*) môžeme do každého systému pridávať teplo a sledovať jeho teplotu. Tým sa líši napríklad od tlaku a objemu, ktoré nie sú takto univerzálne.

V prvých pár dieloch sa budeme venovať základom termodynamiky: termodynamickým zákonom, ideálnemu plynu a entropii. Medzi odporúčané čítanie patria Feynmanove prednášky z fyziky (kapitoly 4 a 39–45), v angličtine aj útle knižky *Thermodynamics* od Enrica Fermiho a *Understanding Thermodynamics* od Hendrika C. Van Nessa.

V texte seriálu budeme takýmito odsekmi označovať pokročilé alebo rozširujúce partie. Pokojne ich pri prvom čítaní vynechajte.

Tiež budeme používať *kurzívou zvýraznený text*, na zvýraznenie významu a tiež na označenie nových pojmov.

### Energia

Čo je to energia? Spomeňte si na definície zo školy a zistíte, že veľa nehovoria. Veta „Energia je schopnosť telesa konať prácu.“ len vysvetlila energiu podľa pojmu práce. Iste, viete, čo sa deje pri konaní práce (niečo je tlačené silou), aj ako vyzerajú rôzne formy energie, no energia nie je tak predstaviteľná ako napríklad hmotnosť, či rýchlosť.

Táto naša neznalosť vôbec nie je hanba – energia je skutočne abstraktná veličina. Toto zdôrazňuje napríklad Feynman v úvode svojich slávnych prednášok, kde hovorí „v dnešnej fyzike nevieme, čo je energia“.

Presnejšie ide o štvrtú kapitolu prvého dielu prednášok. Ak ku ním máte prístup alebo čítate anglicky a pozriete si to<sup>1</sup>, oplatí sa prečítať si viac. Feynman tu vysvetľuje energiu na analógii hracích kociek, ktoré skrýva nezbedné dieťa. Mama vie, že tie kocky niekde

<sup>1</sup><http://www.feynmanlectures.caltech.edu>

musia byť, hoci ich nevie nájsť, a vyvinie teda vzorec na výpočet počtu kociek vo vani a v zatvorenej krabicike. Na rozdiel od mamy, naša energia nie je dávkovaná v kockách a netušíme, z čoho je vyrobená.

Energia je proste recept, ako dôjsť ku nejakému číslu, ktoré sa nebude meniť. Napríklad, častica s hmotnosťou  $m$ , veľkosťou rýchlosti  $v$  a výškou  $h$  v homogénnom gravitačnom poli s intenzitou  $g$  má celkovú mechanickú energiu

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh.$$

Ak táto častica padne do piesku, zrazu sa táto energia znuluje a musíme pridať ďalšie typy energie (zvuk, teplo, štruktúra piesku), aby sme splnili zákon zachovania energie! Vyzerá to trochu ako podvod, nie? Áno aj nie: ľudia postupne objavovali ďalšie typy energie, práve keď im zákon zachovania energie prestal fungovať. Na druhú stranu, to že takéto číslo vôbec existuje a že nám dáva solídne predpovede o sústave, je hlboký a netriviálny poznatok.

Práve táto možnosť „rozširovať“ energiu o ďalšie a ďalšie formy je dôvodom, prečo je ťažké mať pre ňu intuíciu. Len na začiatku minulého storočia Einstein zistil, že s hmotou je tiež viazaná energia podľa  $E = mc^2$ . Každá intuitívna predstava energie (napríklad predstava nestlačiteľnej kvapaliny) dostala ranu a musela zakomponovať tento nový zdroj.

Pozor, takéto objavy nie sú len vecou minulosti. Objav zrýchľovania expanzie vesmíru a temnej energie je z roku 1998. Hovorí, že mať nejaký priestor stojí trochu energie, približne 0,6 J na každý kubický kilometer.

Toto číslo si ľahko overíte, len treba trochu prepočtov. Namiesto hustoty energie sa uvádza hustota hmoty. V kozmológii sa tiež používa len násobok takzvanej *kritickej hustoty*. O kritickej hustote si môžete prečítať.<sup>2</sup> Pomer hustoty temnej energie ku kritickej hustote sa značí  $\Omega_\Lambda$  a jeho hodnotu môžete nájsť napríklad v pôvodnom článku od sondy WMAP<sup>3</sup> Trochu jednoduchšie je nájsť si hustotu temnej energie ( $6,91 \cdot 10^{-27} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ) ako uvádza Wikipédia.<sup>4</sup>

## Teplo

Teplo bolo najprv objavené ako schopnosť zohrievať iné telesá. Vedcom sa podarilo namerať tepelné kapacity rôznych látok a vedeli napríklad predpovedať, na akej teplote sa ustáli zmes kvapalín rôznej teploty. Odtiaľ pochádza definícia kalórie ako tepla potrebného na zohriatie 1 g vody o 1 °C.

Vďaka tomu, že sa teplo takto zachovávalo, považovali ho niektorí za kvapalinu, prúdiacu z teplejších objektov na chladnejšie. Takéto chápanie stačilo Carnotovi, aby rozvinul teóriu účinnosti tepelných strojov.

<sup>2</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Friedmann\\_equations#Density\\_parameter](https://en.wikipedia.org/wiki/Friedmann_equations#Density_parameter)

<sup>3</sup><http://arxiv.org/abs/1212.5225>, strana 129

<sup>4</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Dark\\_energy](https://en.wikipedia.org/wiki/Dark_energy)

Koncom 18. storočia sa využíval prenos tepla na konanie práce a tiež sa vedelo, že konaním práce môžeme zohrievať objekty. Správne pochopenie čakalo ale až na polovicu 19. storočia, kde Joulove pokusy viedli hlavne Helmholtza spojiť rôzne formy energie a postulovať zákon zachovania energie. Clausius už potom vysvetlil, že teplo je mechanická energia častíc hmoty.

Mimochodom, teraz by vám malo byť jasné, prečo existuje kalória a akú má hodnotu. Boli to práve Joulove pokusy, ktoré zistili, koľko práce (ktorú vtedy merali v ekvivalente Joulu, teda kombinácií metra, sekundy a kilogramu) treba na pridanie jednej kalórie tepla.

Zo zvyku sa kalória používa aj na meranie energie v jedle. Treba si ale dávať pozor, výživová energia sa udáva v kilokalóriách, ktoré sa niekedy značia aj symbolom Cal.

### Prvý termodynamický zákon

Druhý spôsob, ako zaviesť teplo, je pozrieť sa na energetickú bilanciu nejakého procesu: ak vieme spočítať energiu obsiahnutú v látke, zistíme, o koľko sa táto *vnútorná energia* počas procesu zmenila a od toho odčítame prácu, ktorú sme vykonali. Rozdiel, ktorý dostaneme, je zrejme energia, ktorá do látky prišla inak (teraz už zase veríme zákonu zachovania energie), a túto energiu nazveme teplo.

Takýto spôsob zavedenia tepla by sme mohli nazvať *fenomenologický*. Všeobecne sa tak označujú časti fyziky, ktoré sa nepokúšajú vysvetliť príčinu javu, stačí im ho popísať (popisujú len výsledné *fenomény*). Celá termodynamika je v podstate fenomenologická veda, pričom základnejšia teória je štatistická fyzika.

Slovo fenomenologický ste už možno počuli aj v kontexte časticovej fyziky. Tu má trochu iný významový odtieň, časticový fenomenológovia sa zaoberajú výpočtami pravdepodobnosti rôznych mikroskopických dejov (napríklad rozpadu Higgsovho bozónu na fotóny). Fundamentálna teória, na druhú stranu, buduje samotnú teóriu pola, ktorú potom fenomenológia používa na výpočty.

Všimnite si, že sa fenomenologická a fundamentálna vetva teórie dopĺňajú: fenomenológia poskytuje fundamentálnej teórii prepojenie s experimentom a fundamentálna teória hovorí fenomenológom, aké ďalšie javy môžu byť zaujímavé.

Hocijako teplo zavedieme, vždy nakoniec máme aj zákon zachovania energie. Keďže už poznáme jeho pohnutý osud, nebudeme mať nikomu za zlé, že ho v kontexte termodynamiky voláme *prvý termodynamický zákon*. Konkrétne sa myslí zákon zachovania energie napísaný pre nejaký systém.

Ak ho chceme zapísať do vzorcov, musíme urobiť viacero volieb. Vnútorná energia systému sa označuje  $U$ , teplo  $Q$  a práca  $W$ . Pri procese so systémom sa pozrieme na začiatok a na koniec a zmeriame, že zmena vnútornej energie  $\Delta U = U_{\text{koniec}} - U_{\text{začiatok}}$ . Zákon zachovania energie hovorí, že sa táto energia mohla zväčšiť len o toľko, koľko sme pridali energie, a to buď konaním práce  $W$  alebo pritečením tepla  $Q$

$$\Delta U = Q + W .$$



Tu sme urobili ďalšie voľby, a to o znamienku tepla a práce. Odteraz, ak bude do systému dodávané teplo a bude naň konaná práca,  $Q$  a  $W$  budú kladné čísla (tzv. IUPAC konvencia). V literatúre sa niekedy používajú opačné konvencie pre prácu (Clausiova konvencia). V tejto konvencii by prvý termodynamický zákon znel  $\Delta U = Q - W$ , no pri konaní práce na plyn by sme dosádzali záporné čísla: dve znamienka mínus by sa zrušili a dostali by sme rovnaký výsledok.

### Ideálny plyn

Termodynamika síce nie je veda o ideálnom plyne (ako by sa vám mohlo zdať), no nevyhneme sa mu – je to totiž najjednoduchší príklad látky, na ktorej môžeme robiť konkrétne výpočty. Slovo *ideálny* v tomto prípade má špeciálny význam, ktorý je dosť technický. Približne, predstavme si ideálny plyn tak, že je zložený z atómov alebo molekúl zanedbateľných rozmerov, ktoré sa zrážajú len na veľmi krátke okamihy. Pri izbových teplotách môžeme vzduch prehlásiť za ideálny plyn so slušnou presnosťou.

Už z týchto predpokladov sa dajú odvodiť (čo my robiť nebudeme) dve rovnice popisujúce ideálny plyn, *stavová* a *kalorická* rovnica. Platia pre nejaké množstvo ideálneho plynu, ktoré popisujeme jeho teplotou  $T$ , tlakom  $p$ , objemom  $V$  a počtom častíc  $N$ . Teplota  $T$  sa tu musí merať v základných jednotkách SI, teda v Kelvinoch. Preto sa značí veľkým písmenom.

Široká trieda látok spĺňa nejakú stavovú a nejakú kalorickú rovnicu. Takéto tvrdenie možno vyzerať silné, ale je celkom intuitívne. Stavová rovnica hovorí, že látka sa nakoniec ustáli v nejakej rovnováhe, ktorá je určená špeciálne zo všetkých možných hodnôt parametrov (teplota, objem atď.) touto rovnicou. Kalorická rovnica zase hovorí, že vieme spočítať celkovú vnútornú energiu látky v tejto rovnováhe.

Typický príklad (okrem ideálneho plynu) môže byť napríklad van der Waalsov plyn. Preň už napríklad kalorická rovnica závisí aj na teplote, aj na objeme.

Stavová rovnica zväzuje tieto veličiny spolu, teda pre dané tri veličiny je tá štvrtá určená:

$$pV = k_B NT.$$

Konštanta  $k_B$  sa nazýva Boltzmannova a jej hodnota je približne  $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Kalorická rovnica nám hovorí, koľko vnútornej energie je v plyne (to potrebujeme na použitie prvého termodynamického zákona):

$$U = \frac{s}{2} k_B NT.$$

Parameter  $s$  je vlastnosť plynu, ktorá sa nazýva *počet stupňov voľnosti* a závisí na tom, koľkými atómami je tvorená molekula plynu. Pre jednoatómové plyny je  $s = 3$ , pre dvojatómové je  $s = 5$ . Ide o dôsledok *ekvipartičného* teorému, ktorý hovorí, že na jeden stupeň voľnosti pripadá energia  $k_B T/2$ . Vnútnú energiu plynu dostaneme tak, že spočítame tieto energie pre všetky stupne voľnosti a pre všetky molekuly plynu.

Počet stupňov voľnosti je počet nezávislých smerov, v ktorých sa môže molekula pohybovať. Najjednoduchšie je to vidieť na príklade: pre jednoatómový plyn sú to len tri priestorové smery. Pre dvojatómovú molekulu, ktorá vyzerá ako tyčka, pribúdajú dva smery, okolo ktorých sa môže otáčať: tretí smer s osou prechádzajúcou touto tyčkou má príliš malú energiu.

V skutočnosti je to trochu komplikovanejšie, s totiž závisí na teplote. Kvôli kvantovaniu energetických hladín totiž pri nízkej teplote nemusí byť energia prvého excitovaného stavu vôbec dosiahnuteľná – vtedy je tento pohyb takzvané *zamrznutý* a neprispieva do  $s$ . Pri zvyšovaní teploty potom  $s$  spojite rastie (tzn. nemusí to byť vždy celé číslo), až kým je energia teplotného pohybu výrazne vyššia ako vzdialenosť medzi energetickými hladinami. Vtedy už môžeme kvantovú mechaniku zanedbať a počítať s týmto pohybom ako s novým stupňom voľnosti.

Pri bežných teplotách sú teda rozmrznuté stupne voľnosti na pohyb a na rotáciu, okrem rotácie okolo osi lineárnej molekuly. Pri dostatočne vysokých teplotách začínajú rozmŕzať aj vibračné pohyby molekúl. Pre predstavu, pre molekulu oxidu uhoľnatého CO je teplota rozmŕzania rotácií 2,8 K, no teplota rozmŕzania vibrácií až 3103 K. Molekuly s veľmi veľkými alebo slabo viazanými atómami ale majú teplotu rozmŕzania vibrácií menšiu, napríklad pre  $I_2$  je to 308 K.

Ak vám pripadá rozprávanie o nezávislých smeroch trochu vágne, vedzte, že to ide aj presnejšie: Nezávislým smerom sa myslí člen vo vzťahu pre energiu atómu, ktorý má tvar  $mv^2/2$ . Pre jednoatómovú molekulu to sú tri zložky rýchlosti  $mv_x^2/2 + mv_y^2/2 + mv_z^2/2$ , pre dvojatómovú molekulu pribúdajú aj energie rotácie tvaru  $I\omega^2/2$  okolo dvoch osí.

Hoci to tak na prvý pohľad nemusí vyzeráť, tieto zákony sú veľmi jednoduché (práve tomu vďaka za svoju popularitu). Stavová rovnica je najjednoduchšia kombinácia daných veličín s  $k_B$  so správnymi jednotkami. Všimnime si, že v takomto tvare vôbec nezávisí na druhu plynu; to si všimol už Avogadro a po ňom sa tento zákon volá.

Kalorická rovnica zase hovorí, že pri deji s konštantnou teplotou sa nemení vnútorná energia plynu. Ak na plyn pri tomto deji konáme prácu, vyteká z neho rovnaké množstvo tepla.

### Práca ideálneho plynu

Začneme zjednodušenou predstavou: majme plyn vo valcovom pieste s plochou pohyblivého piestu  $S$ . Na piest pôsobí sila  $pS$  a pri posune piestu o  $\Delta x$  vykonáme prácu  $pS\Delta x$ . Súčin  $S\Delta x$  je ale zmena objemu plynu pri tomto posune, vykonanú prácu teda môžeme napísať aj ako  $p\Delta V$ . Ešte si uvedomíme, aké má byť znamienko: pri zväčšení objemu koná prácu plyn, pri zmenšení ju konáme, teda v súlade s našou konvenciou je vykonaná práca  $W = -p\Delta V$ .

Výsledok v takomto tvare ale platí všeobecne pre ľubovoľnú (malú, inak by sa menil tlak) zmenu objemu plynu, teda napríklad pre rozpínanie balónu. Jeden zo spôsobov, ako to vidieť, je predstaviť si povrch plynu pokrytý malými piestami, ktoré postupne zatláčame (vždy vykonávajú malú časť práce), až sa výsledok sčíta na súčin tlaku a celkovej zmeny objemu. Ak by sme menili objem plynu viac, museli by sme vykonanú prácu rozdeliť na postupné malé zmeny objemu a sčítat tieto postupné príspevky spolu. To si ale necháme nabudúce.

## Úloha I.S ... zahřívací

6 bodů

- a) Na rozehrátí a seznámení se s čísly zjistíte, do jaké výšky byste mohli zdvihnout průměrného člověka (70 kg), využijete-li celou energii běžné tyčinky Mars (okolo 250 Cal pro 50 g tyčinku). Také vypočtete, jaká energie je  $k_B T$  při pokojové teplotě a vyjádřete ji také v elektronvoltech (pokud neznáte takovou jednotku energie, vezte, že je to energie, kterou získá elektron při urychlení na rozdíl potenciálů 1 V, a číselně  $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ).
- b) Se stavovou rovnicí se dá hodně cvičit. Když namísto počtu částic použijete molární množství  $n$ , dostanete

$$pV = nN_A k_B T,$$

kde se součin  $N_A k_B$  značí  $R$  a nazývá se univerzální plynová konstanta. Určete její hodnotu. Také dále upravte stavovou rovnici do tvaru, ve kterém se vyskytuje hmotnost plynu, a potom do tvaru obsahujícího hustotu plynu.

- c) Určete objem molu plynu při pokojové teplotě. Toto číslo je užitečné znát z paměti.
- d) Nakonec trochu úvahová úloha. Povšimněte si, že v diskusi o práci ideálního plynu jsme automaticky použili tlak plynu. Zkuste sebe a mě přesvědčit, že je to ten správný tlak – já bych totiž namítal, že jsme mohli použít okolní tlak nebo dokonce rozdíl tlaků vně a uvnitř.

*Poznámka:* Hodnocení této části bude mírné, nebojte se zamyslet a napsat cokoli, na co přijdete.

(řešení str. 165)

## Kapitola 2: Termodynamické procesy

Minule sme sa venovali zákonu zachovania energie. Pre ideálny plyn sme ho potom vedeli jednoducho použiť, pretože jeho vnútorná energia je rovná  $U = sk_B NT/2$ . Spomenuli sme ale, že analogický vzorec vieme odvodiť pre veľké množstvo fyzikálnych systémov (často je komplikovanejší).

Veľmi dôležité je, že tento vzorec platí pre systém v *termodynamickovej rovnováhe*. Termodynamická rovnováha je taký stav, keď vieme popísať termodynamické (môžeme povedať aj makroskopické) vlastnosti systému pomocou niekoľko málo parametrov, ktoré sa nemenia. Pre ideálny plyn<sup>5</sup> sú tieto parametre napríklad dvojica tlak, teplota. Všetky podstatné veci vieme totiž dopočítať (objem, energiu, tepelnú kapacitu...) pomocou nich. Nie je pravda, že určujú všetky vlastnosti systému: nehovoria nám presné polohy a rýchlosti jednotlivých molekúl. To nám ale vyhovuje, pretože všetko je výrazne jednoduchšie.

Kedy nie je ideálny plyn v rovnováhe? V praxi vtedy, keď nemá všade rovnakú teplotu, tlak alebo hustotu častíc. V krabici, ktorá má všade na stenách teplotu  $T$  a tlak  $p$ , no v strede vákuum, by sa takmer okamžite vyrovnal tlak a ustálil na novej hodnote.

<sup>5</sup>Počas tohoto dielu seriálu budeme držať počet častíc každej zložky plynu fixný.

Zo skúsenosti vieme, že plyn sa po istom čase dostane do rovnováhy. Takúto vlastnosť budeme požadovať od všetkých systémov, ktoré budeme skúmať.

Rovnováha je problematický pojem hneď z dvoch dôvodov. Po prvé, za dostatočne dlhý čas sa zmení každý systém: kvôli vývoju vesmíru, kvôli rádioaktívnym procesom alebo chemickým reakciám. Druhý problém je, že môžeme mať materiál pri rovnakých termodynamických parametroch, ktorý je ale v rôznych stavoch. Inak povedané, jeho stav závisí na histórii, akou sme sa do toho stavu dostali. To je pre rovnováhu veľký problém, pretože systém nevieme popísať len termodynamickými parametrami. Príkladom je kalená oceľ – jej štruktúra a vlastnosti závisia od toho, ako prudko sme ju schladili.

Oba tieto príklady hovoria, že definícia rovnováhy je *fyzikálna definícia*. Teda ju treba aplikovať s rozumom a keď natrafíme na paradox, treba skontrolovať, či s ňou nie je problém.

## Procesy

Rovnováha je užitočná, budeme totiž uvažovať procesy, ktoré spájajú dva rovnovážne stavy systému.

Ak proces prebieha dostatočne pomaly, systém sa po každej malej zmene môže dostať blízko ku rovnováhe. Takýto proces nazývame *kvázistatický* (alebo niekedy aj *rovnovážny*, pretože prechádza sériou rovnovážnych stavov).

Trochu abstraktnejšia vlastnosť je *vratnosť*: proces je vratný, ak môže prebiehať v oboch smeroch. Tým myslíme, že sa v každom momente môžeme zastaviť a otočiť sa, takže sa všetky termodynamické veličiny menia, akoby sme vracali čas. Napríklad, ak pomaly stláčame plyn, opačný proces bude pomalé rozpínanie: tlak, teplota aj objem sa dostanú do pôvodných hodnôt.

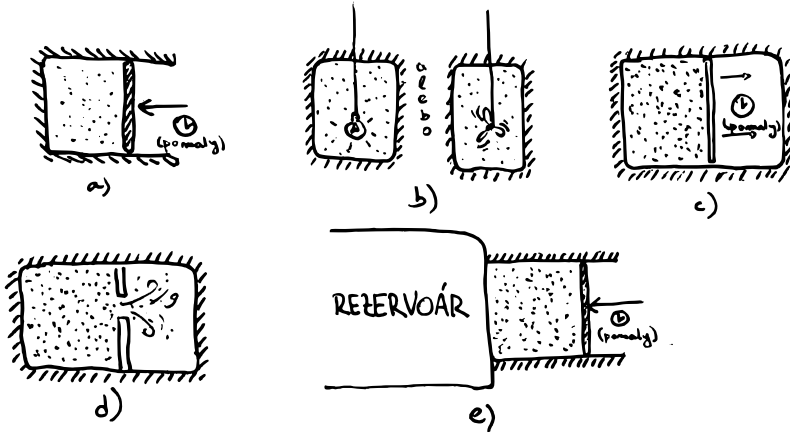
Ako spolu súvisia tieto vlastnosti? Vratné procesy sú kvázistatické, no naopak to platiť nemusí. Proces, ktorý nie je kvázistatický, nevieme totiž hocikedy zastaviť, systém sa bude hýbať ďalej do rovnováhy.

To, že pomalý proces môže byť nevratný, súvisí s uvoľňovaním tepla. Energiu uloženú v teple totiž nevieme úplne premeniť späť na mechanickú energiu. Ak sa teda pri procese premenia práca na teplo nevhodným spôsobom, tak opačný proces nevykonáme. Táto nevratnosť je obsahom druhého termodynamického zákona, na ten si ale ešte chvíľu počkáme.

Najlepšie je vybudovať si intuíciu o procesoch na nejakých príkladoch, pozrime sa teda na ne na obrázku 38.

Typický príklad rovnovážneho kvázistatického procesu je pomalé stláčanie plynu umiestneného v izolovanej nádobe (proces **a**) – stačí pomaly púšťať piest a dostaneme späť rovnakú prácu, akú sme vykonali. Ak sa však pri pohybe piestu uvoľňovalo teplo v dôsledku trenia, proces by už nebol vratný.

Ak do izolovanej nádoby umiestnime dostatočne slabú žiarovku, proces bude opäť kvázistatický, ale nevratný. Rovnaký efekt by sme dosiahli aj občasným zapnutím vrtuľky (proces **b**). Nevratnosť je tu spôsobená tým, že nedokážeme



Obr. 38: Termodynamické procesy.

premeniť všetko teplo uložené v plyne na energiu, ale žiarovka premieňa všetku elektrickú prácu na teplo.

Plyn v nádobe s piestom, ktorý má na druhej strane vákuum, sa bude pri postupnom popúšťaní piestu rozpínať vratne a kvázistaticky, opačný proces dosiahneme stláčaním piestu (proces c). Ak piest uvoľníme okamžite, proces už nebude vratný, ani kvázistatický (je to to isté ako keby sme plyn do vákua vypustili, proces d). Takýto pokus urobil Joule a zistil pri ňom, že sa nemení teplota plynu. My dnes vieme, že je to kvôli zachovaniu jeho vnútornej energie.

Nakoniec, často budeme uvažovať systém v kontakte s tepelným rezervoárom: veľkým zásobníkom, ktorý môže prijímať teplo a nemení pri tom svoju teplotu. Ak systém budeme pomaly stláčať, pričom bude pripojený na tento rezervoár, bude si držať stále rovnakú teplotu a bude dodávať teplo do rezervoáru (proces e). Tento proces je kvázistatický a vratný, pretože pri pomalom popúšťaní piestu pôjde systém opačným smerom, stále bude mať konštantnú teplotu a teplo bude z rezervoáru brať.

Procesy sa tiež pomenovávajú podľa veličiny, ktorá je počas procesu konštantná (ak taká existuje). Vždy máme na mysli kvázistatické procesy, aby sme mohli použiť termodynamiku.

- *Izotermický* proces prebieha pri konštantnej teplote.
- *Izochorický* je proces pri konštantnom objeme (*choros* je po grécky priestor). Keďže sa nemení objem, nemôžeme na plyn konať prácu – celková zmena vnútornej energie je kvôli toku tepla.
- Nakoniec (z tejto kategórie) *izobarický* proces prebieha pri konštantnom tlaku. Vďaka tomu je jednoduché spočítať vykonanú prácu,  $W = -p\Delta V$ .

- Trochu inak je charakterizovaný proces *adiabatický*. Ten prebieha v dokonalej tepelnej izolácii, z čoho vyplýva  $Q = 0$ . Počas adiabatického procesu sa nemení veličina  $pV^\kappa$ , kde  $\kappa = (s - 2)/s$ ,  $s$  je počet stupňov voľnosti. Tento výsledok si aj odvodíme. Premyslite si, že ani jeden z predchádzajúcich procesov nie je adiabatický.

Pre ideálny plyn vieme vyjadriť závislosti zvyšných dvoch parametrov, ktoré sa pri týchto *izo* procesoch menia; podľa ich historických objaviteľov majú tieto zákony mená (v poradí Boyle a Mariott, Charles, Gay-Lussac, adiabatický nemá špeciálne meno).

### Malé zmeny

*Nasledujúca kapitola je relatívne matematická! Správny spôsob ako čítať také odseky je s papierom a perom, aby ste si mohli prepočítať všetky výpočty ručne. Mne tiež pomáha čítať viackrát. Nezabudnite na seriálové úlohy, kde si môžete takéto výpočty precvičiť.*

Najjednoduchšie procesy sú tie, pri ktorých sa parametre zmenia len veľmi málo. Napríklad vieme, že pri malej zmene objemu  $\Delta V$  je vykonaná práca rovná  $p\Delta V$ .

Ak zmeníme tlak ideálneho plynu o  $\Delta p$  a objem o  $\Delta V$ , zmení sa aj teplota, a vieme presne spočítať o koľko:

$$T + \Delta T = \frac{(p + \Delta p)(V + \Delta V)}{nR},$$

alebo s použitím  $T = pV/nR$

$$\Delta T = \frac{V}{nR} \Delta p + \frac{p}{nR} \Delta V + \frac{\Delta p \Delta V}{nR}.$$

Ak budeme rozprávať o *malých zmenách*, namiesto veľkého gréckeho písmena  $\Delta$  budeme používať latinské  $d$ . Píšeme teda

$$dT = \frac{V}{nR} dp + \frac{p}{nR} dV + \frac{dp dV}{nR}.$$

Pozrime sa na relatívne veľkosti jednotlivých členov (tzn. ich pomer ku ich pôvodným hodnotám). To, že ide o malú zmenu, znamená, že  $dp/p$  a  $dV/V$  sú malé čísla (napríklad 1/1000). Potom  $dT/T$  je tiež malé číslo podobnej veľkosti. Posledný člen v rovnici,  $dp dV$ , je ale oveľa menší! Malé relatívne zmeny sa tu vynásobia a z jednej tisíciny dostávame jednu milióntinu. Ak by sme začali z jednej milióntiny, posledný člen bude jedna bilióntina.

Presnejšie môžeme tento argument zapísať tak, že skutočne vypočítame relatívne zmeny

$$\frac{dT}{T} = \frac{V}{nRT} dp + \frac{p}{nRT} dV + \frac{dp dV}{nRT}$$

a s použitím  $pV = nRT$

$$\frac{dT}{T} = \frac{V}{pV} dp + \frac{p}{pV} dV + \frac{dp dV}{pV} = \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} + \frac{dp dV}{pV}.$$

Nemusíte sa ale báť, že zanedbaním posledného členu sa naše výpočty stanú nepresnými! Ak by nám niekto povedal, že sme sa dopustili nejakej chyby, spýtame sa akej. On/ona nám to povie a my si zvolíme také  $dp/p$  a  $dV/V$ , aby naša chyba bola menšia. Naša nepresnosť je teda ľubovoľne malá.

Symbol  $=$  ale musíme chápať ako "rovné až na úmerné  $(dx)^2$ ". Predchádzajúci argument nás ubezpečuje, že tieto členy *prvého rádu* v  $dx$  sú dobre definované a druhý rád je oproti nim zanedbateľný. Samozrejme ale existujú situácie, v ktorých nás zaujímajú aj vyššie mocniny. Pre skúsenejších: tak by sme počítali vyššie derivácie, alebo vyjadrovali elementy plochy či objemu.

To nás oprávňuje zarámovať si prvé pravidlo počítania s  $d$ :

Súčin dvoch  $d$  veličín je 0:

$$da \cdot db = 0.$$

Špeciálne

$$(dx)^2 = 0.$$

Píšeme teda

$$dT = \frac{V}{nR} dp + \frac{p}{nR} dV.$$

Niekedy to pravidlo ani nemusíme použiť. Napríklad, ak chceme zistiť, ako sa mení vnútorná energia s teplotou

$$dU = \frac{s}{2} nR dT.$$

Ak by nás však zaujímala zmena  $U$  pri známej zmene  $p$  a  $V$ , už by sme ho museli použiť, pretože

$$U = \frac{s}{2} pV,$$

a teda

$$dU = \frac{s}{2}(p + dp)(V + dV) - \frac{s}{2}pV = \frac{s}{2}(p dV + V dp).$$

Celý rozdiel je v tom, že raz vyjadrujeme  $U$  ako funkciu  $T$  a raz ako funkciu  $p$  a  $V$ :

$$dU(T) = \frac{s}{2} nR dT,$$

$$dU(p, V) = \frac{s}{2}(p dV + V dp).$$

Všimli ste si nejaké pravidlo? Ak funkcia závisí na nejakej premennej, zmena tejto funkcie závisí od zmeny tejto premennej cez nejaký koeficient:

Pre zmenu funkcie  $f(x, y, \dots)$  pri malej zmene jej parametrov platí

$$df(x, y, \dots) = f_{,x}(x, y, \dots) dx + f_{,y}(x, y, \dots) dy + \dots$$

pre nejaké funkcie  $f_{,x}, f_{,y}, \dots$

Predchádzajúci výsledok pre  $U(p, V) = (s/2)pV$  teda zapíšeme ako  $U_{,p} = sV/2$  a  $U_{,V} = sp/2$ . Pre  $T(p, V) = pV/(nR)$  by to bolo  $T_{,p} = V/(nR)$  a  $T_{,V} = p/(nR)$ . *Napíšte si to na papier a porovnajte!*

Nakoniec, budeme potrebovať nejaké pravidlá na počítanie zmien rôznych funkcií:

- Konštantná funkcia  $f(x) = C$  sa vôbec nemení, ak meníme  $x$ , preto  $df(x) = 0$ . Toto stručne zapisujeme proste ako

$$dC = 0,$$

kde na pravej strane vlastne myslíme  $0 \cdot dx$

- Mocniny  $x^n$  sa menia ako

$$d(x^n) = nx^{n-1} dx.$$

Tento vzorec platí aj pre neceločíselné mocniny, teda napríklad

$$d(\sqrt{x}) = d\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

Ak vám začínajú vzťahy pripadať komplikované, vráťte sa ku významu  $d$ : vzťah  $d(x^2) = 2x dx$  hovorí, že ak pohneme číslo  $x = 2$  o jednu stotinu na 2,01, tak  $x^2$  sa zmení približne o  $2x dx = 2 \cdot 2 \cdot 0,01 = 0,04$ . Skutočne,  $2,01^2 = 4,0401$ .

Inú interpretáciu dostaneme po vydelení  $x^n$ :

$$\frac{d(x^n)}{x^n} = n \frac{dx}{x}.$$

Ak teda zmeníme  $x$  o napr. 2%, potom  $x^n$  sa zmení o  $2n\%$ . Toto pravidlo je užitočné na počítanie mocnín v hlave, ale platí len pre malé zmeny.

- Súčin dvoch funkcií sa správa ako

$$d(fg) = d(f)g + f d(g),$$

čo poznáme z výpočtov  $d(pV)$ .

- Súčet funkcií sa mení ako

$$d(f + g) = d(f) + d(g).$$

To je intuitívne: ak máme dve funkcie, ktoré sa zmenia o nejakú hodnotu, zmena ich súčtu je jednoducho súčet zmien.

- Nakoniec, tabuľka zmien základných funkcií

$$d(e^x) = e^x dx,$$

$$d(\sin x) = \cos x dx,$$

$$d(\cos x) = -\sin x dx,$$

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x},$$

pričom posledný vzorec hovorí o prirodzenom logaritme a platí len pre kladné  $x$  (nemôžeme logaritmovať záporné čísla).



Zatiaľ sme to tajili, ale počítanie malých zmien je to isté, ako počítanie *derivácií*. Derivácia funkcie je zmena funkcie delená malou zmenou jej argumentu, teda

$$\frac{df(x)}{dx}.$$

Funkcie  $f, x$  sú *parciálne derivácie*, ak má  $f$  viac argumentov, pretože meníme len jeden z nich, ostatné pokladáme za konštantné.

Derivácií sa nebojte, v skutočnosti prinášajú obrovské zjednodušenie. Napríklad, výraz  $(x + dx)^n$  má  $n + 1$  členov, no pri počítaní s malými zmenami stačí uvažovať len prvé dva! Navyše, veľa fyzikálnych dejov stačí popisovať takouto zmenou, ako si hned predvedieme.

### Tepelná kapacita a adiabatický proces

Aby sme sa zoznámili s malými zmenami, spočítame si s ich pomocou tepelnú kapacitu ideálneho plynu. Ako je definovaná tepelná kapacita? Je to prijaté teplo vydelené nárastom teploty pri tomto prijatom teple. Teplo ale môžeme pridávať do systému rôzne, napríklad izochoricky alebo izobaricky (alebo aj inak).

Pri pridávaní tepla *izochoricky* sa nekoná žiadna práca, teda platí  $dU = \delta Q$ , kde  $\delta Q$  je teraz maličký nárast tepla.<sup>6</sup> Ako sa zmení teplota? Vieme, že  $dU = (s/2)nR dT$ , odkiaľ by sme vedeli vyjadriť  $dT = 2/(snR) dU$ .

Tepelná kapacita pri izochorickom procese  $c_V$  sa častejšie nazýva *tepelná kapacita pri konštantnom objeme*, spočítame ju podľa definície

$$c_V = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} = \frac{s}{2}nR.$$

Pri *izobarickom* procese už neplatí  $dU = \delta Q$ , ale  $dU = \delta Q - p dV$ . Opäť by sme to radi vyjadrili ako niečo úmerné  $dT$ , čo nie je ťažké: všeobecne platí, že pri malej zmene je

$$dT = \frac{V}{nR} dp + \frac{p}{nR} dV,$$

ale u nás sa tlak nemení, teda  $dp = 0$ . Dostávame teda  $p dV = nR dT$  a tepelná kapacita pri konštantnom tlaku je

$$c_p = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU + p dV}{dT} = \frac{\frac{s}{2}nR dT + nR dT}{dT} = \left(\frac{s}{2} + 1\right) nR.$$

Trochu pokročilejšia aplikácia bude odvodenie zákona  $pV^\kappa = \text{konst}$  pre adiabatický proces. Opäť vyjdeme z prvého termodynamického zákona, no pri adiabatickom procese je nulové prenesené teplo, takže platí  $dU = -p dV$ . Zmenu vnútornej energie sme už mali vyjadrenú: ak sledujeme tlak a objem, je rovná  $dU = (s/2)(p dV + V dp)$ . Spolu teda máme rovnicu

$$\frac{s}{2}(p dV + V dp) = -p dV.$$

---

<sup>6</sup> $\delta$  pripomína, že je maličký. Prečo nepíšeme  $dQ$  si povieme nabudúce.

Ak dáme všetky veličiny na jednu stranu, dostaneme

$$\frac{s}{2} V dp + \left(\frac{s}{2} + 1\right) p dV = 0.$$

Ešte vydelíme  $s/2$  a označíme vzniknutý faktor ako  $\kappa$ :

$$0 = V dp + \frac{\frac{s}{2} + 1}{\frac{s}{2}} p dV =: V dp + \kappa p dV.$$

Teraz si všimneme, že sme skoro v tvare  $d(pV)$  až na konštantu  $\kappa$ . Také faktory ale dostávame, ak počítame  $d(V^\kappa) = \kappa V^{\kappa-1} dV$ . Vynásobíme teda rovnicu  $V^{\kappa-1}$  a upravujeme

$$0 = V^\kappa dp + p \kappa V^{\kappa-1} dV = V^\kappa dp + p d(V^\kappa) = d(pV^\kappa).$$

Čo takýto výraz znamená? Hovorí nám, že počas adiabatického procesu je zmena  $pV^\kappa$  nulová, inými slovami,  $pV^\kappa$  je konštanta! Aká konštanta? Najľahšie ju spočítame s pomocou počiatočných podmienok, teda pre začiatočný stav  $p_0, V_0$  je  $pV^\kappa = p_0 V_0^\kappa$ . Nakoniec upravíme výraz pre konštantu  $\kappa$

$$\kappa = \frac{\frac{s}{2} + 1}{\frac{s}{2}} = \frac{s + 2}{s},$$

pre jednoatómový plyn  $s = 3$  a  $\kappa = 5/3$ , pre dvojátómový plyn je  $s = 5$  a  $\kappa = 7/5$ .

## Úloha II.S ... procesní

6 bodů

- Které ze skupiny 4 procesů (izobarický, izochorický, izotermický a adiabatický) mohou být vratné?
- VeźmĚte vztah  $T = pV/(nR)$  s  $n = 1$  mol,  $p = 100$  kPa a  $V = 22$  l. O kolik se zmĚnĚ  $T$ , pokud  $p$  i  $V$  zvĚtšíme o 10%, 1% a 0,1%? SpočĚtejte to dvĚma způsoby: přesně a pomocí vztahu  $dT = T_{,p} dp + T_{,V} dV$ . Jak se liší tyto výsledky?
- d gymnastika:
  - Ukaźte, že  $d[Cf(x)] = C d[f(x)]$ , kde  $C$  je konstanta.
  - VypočĚtejte  $d(x^2)$  a  $d(x^3)$ .
  - Ukaźte, že  $d(1/x) = -dx/x^2$  z definice, tedy

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x + dx} - \frac{1}{x}.$$

MůžĚ se vĚm hodit  $(x + dx)(x - dx) = x^2 - (dx)^2 = x^2$ .

- Bonus:* PlatĚí  $\sin(d\vartheta) = d\vartheta$  a  $\cos(d\vartheta) = 1$ . TaktĚž mĚme součtový vzorec  $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ . Dokaźte  $d(\sin\vartheta) = \cos\vartheta d\vartheta$ .
  - Bonus:* PodobnĚ ukaźte  $d(\ln x) = dx/x$  s pomocí  $\ln(1 + dx) = dx$ .
- d) VysvĚtlete fyzikĚlnĚ, proč je izobarickĚ tepelnĚ kapacita vĚtší nĚž izochorickĚ.

(řĚšení str. 166)

## Kapitola 3: Entropia

Aj počas tohoto dielu seriálu uvažujeme konštantný počet častíc pri všetkých procesoch. Výnimku urobíme až úplne na konci, na čo vás samozrejme upozorním.

V úlohe z minulého dielu ste mali rozdeliť procesy na vratné a nevratné. Videli ste, že pri skúmaní vratnosti sme sa museli pozrieť na celý systém zúčastňujúci sa procesu.

Nevratné procesy boli tie, pri ktorých tieklo teplo z teplejšieho telesa na chladnejšie. Môže to nastať napríklad pri izochorickom a izobarickom procese. Pri izotermickom (s tepelným rezervoárom) tečie teplo medzi telesami rovnakých teplôt a pri adiabatickom teplo netečie.

To, že tok tepla z teplejšieho na chladnejšie teleso je nevratný, je intuitívne, ale veľmi dôležité tvrdenie. Preto sa volá *druhý termodynamický zákon*.

Neexistuje spôsob, ako prinútiť teplo tiecť z chladnejšieho telesa na teplejšie bez ovplyvňovania okolia.

S ovplyvňovaním okolia je to, samozrejme, jednoduché. Robí to napríklad každá chladnička.

Vidíme, že nastala menšia zrážka terminológie. Slovo vratný proces sa dá chápať dvoma spôsobmi:

- vratný je vývoj jedného systému, pričom nespomíname okolie.
- proces so všetkými systémami, ktoré sa ho zúčastňujú, je vratný.

Pod pojmom vratný proces budeme myslieť tú druhú možnosť (pretože každý proces s plynom je vratný v prvom zmysle, stačí vziať robotickú ruku pre každú molekulu plynu). Pri zmätení je ale dobré spomenúť si, že to sú dva rôzne koncepty.

### *Perpetuum mobile*

Termodynamické zákony sa často spomínajú v súvislosti s perpetuum mobile: prístrojom, ktorý by nám poskytoval energiu zadarmo.

Prvý termodynamický zákon zakazuje perpetuum mobile prvého druhu: také, ktoré by z ničoho vyrábalo energiu. Druhý termodynamický zákon zakazuje perpetuum mobile druhého druhu: to by dokonale premieňalo teplo na energiu. Treba si totiž uvedomiť, že napríklad svetové oceány skrývajú obrovské množstvo energie v neusporiadanom pohybe svojich molekúl: ak by sme túto energiu vedeli využiť, mali by sme po energetických starostiach.

Teplo vieme čerpať a čiastočne premieňať na energiu: priložením chladnejšieho telesa a využitím prúdu, ktorý medzi nimi vznikne (existuje ale aj lepší spôsob, tzv. *Carnotov cyklus*). Na to ale potrebujeme chladnejšie teleso a tie sa mňajú používaním.

Druhý termodynamický zákon teda hovorí, že nedokážeme tieto chladnejšie telesá opäť ochladzovať zadarmo – ak by sme to vedeli, tak by sme stále využívali

prúd tepla do telesa (napr. z oceánu) a mali by sme perpetuum mobile druhého druhu. Preto sa druhý termodynamický zákon hovorí aj v tomto tvare

Perpetuum mobile druhého druhu neexistuje.

Hovorí sa, že ide o *ekvivalentnú* formuláciu.

### Meranie nevratnosti

Vedeli by sme povedať, ako veľmi je nejaký proces nevratný? Zistili sme, že nevratnosť súvisí s pridaním tepla, nejaká zmena „miera nevratnosti“ teda by mala byť úmerná  $\delta Q$ . Nejako ale treba zobrať do úvahy aj teplotu. Vieme, že ochladzovať veľmi chladné objekty je ťažké, ochladzovať veľmi teplé objekty je ľahké: preto skúsime jednoducho teplotou vydeliť. Toto sa ukáže z viacerých dôvodov ako veľmi dobrý nápad, zatiaľ to ale vezmeme ako nástrel.

Táto miera nevratnosti sa nazýva *entropia*, značí sa  $S$  a je to skutočne číslo závisiace na stave systému. Pre ideálny plyn by to teda bola funkcia napríklad teploty a objemu  $S(T, V)$ . Ak plyn s teplotou  $T$  pri nejakom *kvázistatickom* procese prijme teplo  $\delta Q$ , povieme, že sa entropia zmenila o

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

Tu sme urobili jeden veľmi silný predpoklad a to, že existuje funkcia  $S$  stavu systému, ktorá sa pri malých zmenách systému mení ako  $\delta Q/T$ . Ak si totiž predstavíme dlhší proces spájajúci dva stavy systému  $(T_A, V_A)$  a  $(T_B, V_B)$ , zmenu entropie  $\Delta S = S(T_B, V_B) - S(T_A, V_A)$  by sme mali nasčítat po malých kúskoch procesu.

Ak by sme mali takéto procesy dva, tak vôbec nemusí byť jasné, že po súčte po dvoch rôznych cestách by sme dostali rovnaké  $\Delta S$ ! Ešte sa ku tomuto predpokladu vrátime.

Ďalšia dôležitá vlastnosť entropie je sčítavacia: ak máme viacero systémov, tak entropia celku sa definuje ako súčet entropií jednotlivých častí. Vyzbrojený týmito vlastnosťami sa môžeme presvedčiť, že entropia skutočne meria nevratnosť (aspoň pre procesy s ideálnym plynom).

- Pri adiabatickom deji je  $\delta Q = 0$ , a teda aj  $dS = 0$ . Preto sa nazýva aj *izoentropický*.
- Pri izotermickom deji sa síce entropia plynu mení, ale nesmieme zabudnúť na entropiu rezervoáru. Ak plyn prijme teplo  $\delta Q$ , tak rezervoár odovzdá  $\delta Q$ , resp. prijme  $\delta Q_{\text{rez}} = -\delta Q$ . Celková zmena entropie je

$$dS_{\text{celk}} = dS_{\text{plyn}} + dS_{\text{rez}} = \delta Q/T + \delta Q_{\text{rez}}/T = \delta Q/T - \delta Q/T = 0.$$

- Predchádzajúci výpočet stál na tom, že teplota plynu a rezervoáru je rovnaká. Vieme ale, že pri izochorickom a izobarickom deji musí byť plyn v kontakte s rezervoárom inej teploty, inak by sa nič nedialo. Ak plyn teplo prijíma, tak je rezervoár teplejší, a teda  $\delta Q > 0$ ,  $T_{\text{rez}} > T_{\text{plyn}}$  a zmena entropie

$$dS_{\text{celk}} = dS_{\text{plyn}} + dS_{\text{rez}} = \delta Q/T_{\text{plyn}} - \delta Q/T_{\text{rez}} = (T_{\text{rez}} - T_{\text{plyn}}) \frac{\delta Q}{T_{\text{plyn}} T_{\text{rez}}} > 0.$$

Entropia teda rastie práve pri nevratných procesoch. Preto sa môže druhý termodynamický zákon formulovať aj pomocou rastu entropie. Použijeme *izolovaný systém*, teda taký, ktorý už neinteraguje s ďalšími systémami. Myslíme tým, že sa pozeráme na všetky časti, ktoré sa procesu zúčastňujú.

Entropia izolovaného systému rastie.

Kvôli tomuto je entropia populárna aj medzi verejnosťou, zákon sa ľahko pamätá a vyjadruje istú nevyhnutnosť. My však vieme, že je to len iný spôsob ako povedať „teplo tečie z teplejšieho telesa na chladnejšie, ale nie naopak“.

Dôležitá poznámka je o pomalosti týchto procesov: stále sme predpokladali, že sú kvázistatické. Pozrime sa napríklad na Joulov pokus z minulého dielu: rýchle vypustenie plynu na dvojnásobný objem. Ide o izolovaný proces (netečie teplo) a plyn nekoná prácu (proti vákuu), takže sa nezmení ani vnútorná energia. Z toho vyplýva, že sa nezmení ani teplota. Dostali sme teda plyn s rovnakou teplotou, dvojnásobným objemom a teda polovičným tlakom.

Čo sa stalo s jeho entropiou? Ak by sme ho teraz adiabaticky stlačili na pôvodný objem, jeho entropia sa nezmení a dostali by sme plyn s rovnakým objemom ako na začiatku, ale s vyššou teplotou. Plyn s vyššou teplotou a rovnakým objemom má ale vyššiu entropiu: pretože takýto stav vieme dosiahnuť i kvázistatickým pridávaním tepla, pri ktorom je  $dS > 0$ .

Takto sme teda vypustením plynu s  $\delta Q = 0$  dostali stav s vyššou entropiou ako na začiatku.

### Vsuvka: *Premenné v termodynamike*

Pre ideálny plyn je stav určený dvoma veličinami, napríklad teplotou a tlakom. Pomocou stavovej a kalorickej rovnice vieme dopočítať objem a vnútornú energiu. Podobne ale môžeme stav udať aj dvojicou hodnôt teplota, tlak alebo tlak, objem alebo napríklad tlak a vnútorná energia.

Ideálny plyn je špeciálny v tom, že vnútorná energia závisí len od teploty: tým myslíme, že pre rovnaké teploty a rôzne objemy (alebo tlaky) je energia rovnaká. Preto máme jednu výnimku, a to dvojicu teplotu a vnútornú energiu: so zadanou teplotou už poznáme vnútornú energiu, ale nevieme ešte dopočítať tlak a objem.

Všeobecne teda potrebujeme dva parametre (celý čas berieme počet častíc za konštantný) na určenie stavu, ale môžeme si vybrať rôzne dvojice. Ostatné veličiny, ktoré závisia od stavu, potom vyjadríme pomocou tejto dvojice premenných. Preto máme napríklad vyjadrenie  $U(p, V) = (s/2)pV$  a  $U(T, V) = (s/2)nRT$ <sup>7</sup>. Všimnite si, že z matematického pohľadu sú to iné funkcie: berú iné veličiny a ak by sme do nich predsa len dosadili rovnaké čísla, výsledky by boli iné (napríklad  $U(p, V)$  je nula pre nulový objem, ale  $U(T, V)$  nie je.). To, že ich značíme rovnakým písmenom

<sup>7</sup>Tu vkladáme aj objem, aby sme boli konzistentní s tými dvoma parametrami. Použiť by sme mohli aj tlak.

$U$ , je veľmi výstižné (lebo merajú tú istú veličinu), ale môže to spôsobiť zmatok, najčastejšie pri počítaní zmien funkcie.

$U$  entropie si tiež môžeme zvoliť veličiny, podľa ktorých vyjadríme, čo sa nám bude hodiť. Za úlohu potom budeme mať pocvičiť sa vo vyjadrovaní entropie do ďalších párov.

Ponaučenie z tejto diskusie teda je: je rozdiel medzi fyzikálnou veličinou, závisiacou na stave telesa, a funkciou, ktorá počíta jej hodnotu na základe iných parametrov, určujúcich stav. Obe sa značia rovnakým písmenom a označujú rovnakú vec, ale niekedy je dôležité ich v mysli rozlíšiť.

*Pozor, náročná poznámka! Pokojne ju preskočte.* Ak máme nejakú fyzikálnu veličinu  $f$ , závisiacu od stavu, tak jej zmenu pri malom procese udáme napríklad

$$df = f_{,T}dT + f_{,p}dp,$$

čo nám dáva, pri známych funkciách  $f_{,T}$  a  $f_{,p}$ , návod ako počítať zmeny  $f$ . Mohli by sme do tohoto návodu pridať aj napríklad zmenu objemu? Určite,

$$dg = \alpha dT + \beta dp + \gamma dV,$$

kde sme ale označili nové funkcie inak. Ak totiž poznáme zmenu  $dT$  a  $dp$ , môžeme určiť aj zmenu všetkých ostatných funkcií stavu, teda aj objemu  $V$ . Preto posledná formula obsahuje viac informácií, ako potrebujeme. Presnejšie, už dávnejšie sme spočítali

$$pdV + Vdp = nRdT,$$

Dosadením by sme vedeli eliminovať  $dV$ ,  $dp$  alebo  $dT$ , ktoré si vyberieme. Napríklad, dosadením za  $dT$  by sme dostali

$$dg = \frac{\alpha}{nR}(pdV + Vdp) + \beta dp + \gamma dV = \left(\frac{\alpha V}{nR} + \beta\right) dp + \left(\frac{\alpha p}{nR} + \gamma\right) dV,$$

Tu vidíme dôvod, prečo sme  $\beta$  neoznačili  $g_{,p}$ : nie sú to rovnaké funkcie.

Ďalší problém, ktorý vidíme, je, že  $g_{,p}$  dáva zmysel, len ak vieme, na akých premených  $g$  závisí. Ak totiž

$$dg = \mu_1 dT + \nu dp = \mu_2 dT + \varrho dV,$$

funkcie  $\mu_1$  a  $\mu_2$  sú určite rôzne, hoci by sme ich označili  $g_{,T}$ . Rozdiel je v tom, že v prvom prípade robíme s  $g(T, p)$  a v druhom s  $g(T, V)$ . Existuje aj iné značenie, ktoré by  $\mu_1$  zapísalo ako  $(g_{,T})_p$  a  $\mu_2$  ako  $(g_{,T})_V$ . Takéto funkcie sa volajú postupne zmena  $g$  s teplotou pri konštantnom tlaku a pri konštantnom objeme: premyslite si prečo.

### Entropia ideálneho plynu

Pre ideálny plyn sa dá entropia  $S(T, V)$  ľahko vyjadriť. Použijeme ku tomu myslený kvázistatický proces a pozrieme sa, o koľko sa entropia zmení. Z prvého termodynamického zákona vieme vyjadriť  $\delta Q$

$$\delta Q = dU + pdV.$$

Použijeme  $\delta Q = TdS$  a dostaneme pre zmenu entropie

$$TdS = dU + pdV.$$

Zmenu vnútornej energie vyjadríme podľa zmeny teploty, za plyn dosadíme zo stavovej rovnice

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV = \frac{s}{2}nR\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V}.$$

Použijeme  $d \ln x = dx/x$ , násobenie konštantou a sčítavanie, aby sme pravú stranu vyjadrili ako  $d$  od niečoho

$$dS = d\left(\frac{s}{2}nR \ln T + nR \ln V\right).$$

Ak to ešte prehodíme na jednu stranu, dostaneme

$$d\left(S - \frac{s}{2}nR \ln T - nR \ln V\right) = 0.$$

Táto rovnica hovorí, že pri kvázistatickom procese sa nemení veličina

$$S - \frac{s}{2}nR \ln T - nR \ln V,$$

tá teda musí byť rovná konštantе

$$S = \frac{s}{2}nR \ln T + nR \ln V + S_0.$$

Počas celého procesu sme brali počet častíc ako konštantný parameter, preto aj konštantа  $S_0$  na ňom môže závisieť.

*Teraz idem robiť úvahu s premenným počtom častíc*

Závislosť na počte častíc si odvodíme fyzikálnou úvahou. Prepíšme si najprv takto prefíkane konštantu  $S_0(n)$

$$S_0(n) = nR(s_0 - \ln(f(n))),$$

kde  $f(n)$  je nejaká nová, neznáma funkcia. Pridali sme aj konštantu  $s_0$ , lebo môžeme. S takýmto vyjadrením sa nám entropia zjednoduší na

$$S(T, V; n) = nR \ln \left( \frac{T^{\frac{s}{2}} V}{f(n)} \right) + nR s_0.$$

Pozrime sa teraz na nádobu v tvare kvádra s objemom  $2V$ , naplnenú  $2n$  molami ideálneho plynu. Ak ju napoly rozdelíme stenou, dostaneme dva oddelené plyny s objemom  $V$  a rovnakými teplotami. Toto prehradenie vieme opakovať ako chceme, určite teda nemení celkovú entropiu. Pred prehradením má celá sústava entropiu  $S(T, 2V; 2n)$ . Po prehradení máme 2 plyny, každý s entropiou  $S(T, V; n)$ . Celková entropia je súčet a keďže rozdelenie nemení entropiu, musí platiť

$$S(T, 2V; 2n) = 2S(T, V; n).$$

Pri pohľade na vzorec na entropiu vidíme, že dvojku dostaneme z faktoru  $nR$  pred logaritmom. V logaritme už teda pri zmene  $2V, 2n \rightarrow V, n$  nesmie nič zmeniť, teda  $V/f(n)$  musí byť len ich podiel  $V/n$  (hocijakú konštantu, ako napríklad  $V/(2n)$ ), dáme do  $s_0$  vďaka tomu, že je v logaritme). Dostávame teda

$$S(T, V; n) = nR \ln \left( \frac{T^{\frac{5}{2}} V}{n} \right) + nR s_0.$$

Nabudúce sa pozrieme na Carnotov cyklus. Entropia nám totiž umožní jednoducho rozprávať o účinnosti rôznych strojov a najúčinnější z nich bude práve Carnotov cyklus.

### Úloha III.S ... entropická

6 bodů

- a) Všetchny stavy ideálneho plynu umíme nakresliť do rôznych diagramů:  $pV$  diagram,  $pT$  diagram a tak ďalej. Na svislou osu sa vynáša prvá veličina, na vodorovnú osu sa vynáša druhá veličina. Každý bod teda určuje dva parametry.

Načrtněte do  $pV$  diagramu čtyři děje s ideálním plynem, které znáte. Udělejte to samé pro  $Tp$  diagram. Jak by vypadal  $UT$  diagram? Vysvětlete, jak se nevhodnost těchto dvou proměnných projeví na tomto obrázku.

- b) Jaké jednotky má entropie? Jaké jiné veličiny s těmito jednotkami znáte?  
 c) V seriálu jsme rozebrali případ nárůstu entropie, když plyn přijímal teplo. Proveďte obdobnou úvahu pro plyn odevzdávající teplo.  
 d) Víte, že při adiabatickém ději se entropie nemění. Proto entropie jako funkce objemu a tlaku  $S(p, V)$  může obsahovat jen takovou kombinaci objemu a tlaku, která se též nemění při adiabatickém procesu. Jaký je to výraz? Nakreslete do  $pV$  diagramu (svislá osa je  $p$ , vodorovná  $V$ ) křivky, na nichž je entropie konstantní. Souhlasí výsledek této úvahy se vzorcem, který jsme pro entropii odvodili?  
 e) Vyjádřete entropii ideálního plynu jako funkci  $S(p, V)$ ,  $S(T, V)$ , a  $S(U, V)$ .

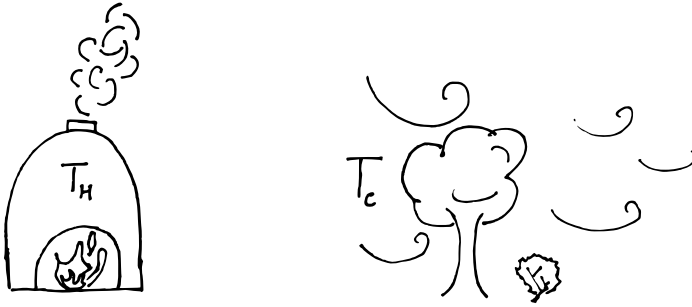
(řešení str. 170)

## Kapitola 4: Tepelné stroje

Predstavte si, že staviate napríklad parnú lokomotívu. V nej máte kotol s nejakou vysokou teplotou  $T_H$ , okolo je zase chladný vzduch s teplotou  $T_C$ . Ak prepojíte kotol a okolie, tak bude tiecť teplo a vy sa snažíte čo najviac tohto toku využiť na konanie práce – každé odobraté teplo z kotla totiž získavate pálením uhlia. Zo zákona zachovania energie vieme, že ak odoberieme z kotla teplo  $Q$  a vykonáme prácu  $W$ , tak do okolia potom pošleme zvyšok,  $Q - W$ .

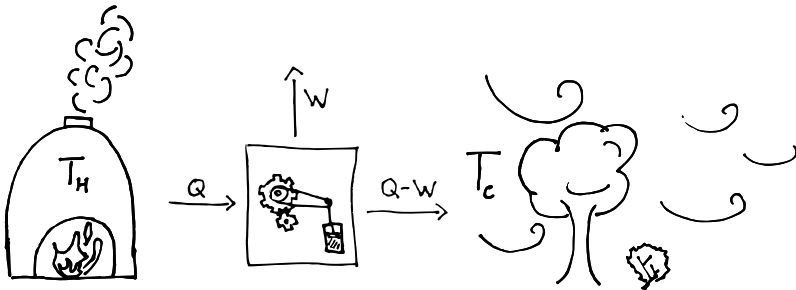
Prirodzená otázka je: „Aké je maximálne  $W$  pri danom  $Q$ ?“. Určite nemôže byť  $W = Q$ ; to by sme odobrali teplo a premenili ho všetko na prácu (to je perpetuum mobile druhého druhu). Nejakú prácu ale získať určite môžeme; stačí napríklad dať vrtulku do prievanu spôsobeného rozdielom teplôt.





Obr. 39: Kotel a okolie.

Urobme zopár zjednodušujúcich predpokladov. Považujme kotel aj okolie za rezervoáre: to znamená, že ich teplota sa nemení pri odoberaní tepla. Tiež si povedzme, že mechanizmus – stroj, ktorý sa snaží premeniť tok tepla na prácu, sa po odovzdaní získanej práce a prebytočného tepla vráti do pôvodného stavu, teda v ňom neostane žiadna zvyšková energia.



Obr. 40: Extrakcia práce strojom.

Počítajme teraz celkovú zmenu entropie sústavy kotel + stroj + okolie. Kotel príde o teplo  $Q$  pri teplote  $T_H$ , okolie prijme teplo  $Q - W$  pri teplote  $T_C$ . So strojom sa niečo medzi tým deje, no na konci je v rovnakom stave, takže jeho entropia sa nemení. Celková zmena entropie je súčet<sup>8</sup>

$$\Delta S_{\text{tot}} = \frac{-Q}{T_H} + \frac{Q - W}{T_C},$$

a keďže je táto sústava izolovaná, celková zmena entropie musí byť kladná

$$\Delta S_{\text{tot}} \geq 0.$$

<sup>8</sup>Nemali by sme zabudnúť ani na systém, ktorý nakoniec odoberie získanú prácu: ten je totiž v kontakte so strojom. Žiadne teplo do neho ale netečie a predpokladáme, že si sám entropiu nevyrobí.

Z tejto nerovnosti vyjadríme prácu  $W$  a dostaneme

$$W \leq Q \left( 1 - \frac{T_C}{T_H} \right).$$

Druhý termodynamický zákon nám teda dáva ohraničenie na maximálnu prácu, akú môžeme extrahovať z takéhoto procesu! Práca bude najväčšia, ak nastane rovnosť, čo zodpovedá vratnému procesu.

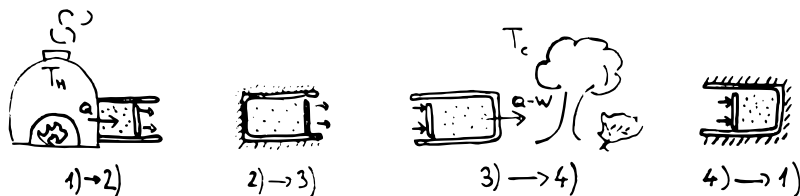
Tento výsledok je príklad *zákona o maximálnej práci*, ktorý hovorí, že za istých predpokladov je extrahovaná práca maximálna pre vratné procesy a táto práca je rovnaká pre všetky vratné procesy (spájajúce dva rovnaké stavy).

### Carnotov cyklus

Zatiaľ sme sa vôbec nerozprávali o tom, ako postaviť tento stroj. Jeden zo spôsobov je využiť ideálny plyn na prenášanie tepla. Vieme, že s použitím len dvoch rezervoárov môžu byť vratné len izotermické a adiabatické procesy. Ako s pomocou týchto procesov získať prácu vymyslel už Carnot:

Vezmeme piest s ideálnym plynom. Postupne vykonáme štyri procesy spájajúce štyri rôzne stavy, ktoré označíme 1, 2, 3 a 4.

- 1)  $\rightarrow$  2) Začneme s plynom na vyššej teplote  $T_H$  – toto je stav 1. Počas prvého procesu ho dáme do kontaktu s kotlom a necháme ho izotermicky sa rozpínať. Čím väčší bude finálny objem, tým viac tepla odoberieme a tým viac práce vykonáme.
- 2)  $\rightarrow$  3) Máme teraz plyn v stave 2 na vyššej teplote. Aby sme ho ochladili, izolujeme ho a necháme ho adiabaticky sa rozpínať, až kým nenadobudne teplotu okolia  $T_C$ .
- 3)  $\rightarrow$  4) Na nižšej teplote plyn budeme izotermicky stláčať, prebytočné teplo bude unikať do okolia. Zastavíme sa na takom objeme, aby sme sa potom v poslednom procese vrátili späť do pôvodného stavu.
- 4)  $\rightarrow$  1) Tu pokračujeme v stláčaní, ale v úplnej izolácii, teda adiabaticky. Stláčame, čím plyn zohrievame, až do teploty  $T_H$ . V predchádzajúcom kroku sme plyn stlačili tak, že aj objem a tlak sa teraz vrátili do pôvodného stavu, a sme opäť v stave 1.



Obr. 41: Carnotov cyklus

Vidíme, prečo sa Carnotov cyklus volá cyklus: plyn sa nakoniec vrátil do pôvodného stavu a celý proces môžeme opakovať. Všimnite si, že práca sa koná vo všetkých štyroch krokoch: v prvých dvoch ju získavame z plynu, v druhých dvoch zase konáme prácu na plyn. Práce pri dvoch adiabatických dejoch sa ale vrušia. Pri adiabatickom deji je totiž nulové teplo  $Q$ , takže práca je rovná zmene vnútornej energie. Oba procesy idú medzi rovnakými koncovými teplotami, ale opačnými smermi. Pre ideálny plyn závisí energia len od teploty, a teda zmeny vnútornej energie sú v oboch prípadoch presne opačné, z čoho nakoniec vyplýva, že aj práce sú opačné.

Môžeme teda povedať, že skutočná práca sa koná pri izotermických procesoch. Aká je celková získaná práca? Ide o vratný dej, takže by sme mali získať prácu  $W = Q(1 - T_C/T_H)$ . To ale vieme aj sami overiť, vy si to môžete dopočítať ako jednu zo seriálových úloh.

### Jedinečnosť Carnotovho cyklu

Vďaka takejto priamej konštrukcii vieme, že rovnosť v nerovnici

$$W \leq Q \left(1 - \frac{T_C}{T_H}\right),$$

vieme dosiahnuť. Vieme tiež, že Carnotov cyklus dosahuje najvyššiu možnú získanú prácu pri danom teple.

Cyklický tepelný stroj s dvoma rezervoármi, odoberajúci teplo  $Q$  z toho teplejšieho, dodá prácu maximálne

$$W = Q \left(1 - \frac{T_C}{T_H}\right).$$

My sme to dokázali s pomocou úvahy o entropii, no existuje aj iný, tiež zaujímavý dôkaz. Predstavme si, že máme stroj, ktorý odporuje tomuto tvrdeniu, teda je cyklický (vracia sa do pôvodného stavu), berie teplo  $Q$  no dáva prácu  $W'$  väčšiu než Carnotov cyklus. Vezmime si Carnotov stroj a otočme ho: on teraz vezme z chladnejšieho rezervoáru teplo  $Q - W$ , vezme aj prácu  $W$  a do teplejšieho vráti teplo  $Q$ . Ak pustíme oba stroje po sebe, celkový výsledok je: teplejší rezervoár má stále rovnako veľa tepla, získali sme prácu  $W' - W$  a z chladnejšieho rezervoáru sme odobrali teplo

$$Q - W - (Q - W') = W' - W.$$

Celkový efekt teda je, že sme odobrali teplo a vykonali ekvivalentnú prácu, čo je perpetuum mobile druhého druhu. Stroj účinnejší ako Carnotov stroj teda nemôže existovať.

Pri tomto dôkaze sme použili otočený Carnotov stroj, takzvanú *Carnotovu chladničku*. To sme mohli urobiť vďaka tomu, že Carnotov cyklus je vratný. Hocijaký iný vratný cyklus vieme tiež otočiť. Ak by takýto vratný cyklus bral teplo  $Q$  a dával energiu  $W''$  menšiu ako  $W$ , po otočení by z neho bola chladnička účinnejšia ako tá Carnotova! Brala by totiž teplo  $Q - W''$  a potrebovala by len

energiu  $W'' < W$ . Spojením takejto chladničky a Carnotovho stroja by sme dostali opäť perpetuum mobile druhého druhu. Dostávame teda druhé tvrdenie pre vratné cyklické deje.

Vratný cyklický tepelný stroj s dvoma rezervoármi, odoberajúci teplo  $Q$  z toho teplejšieho, dodá prácu práve

$$W = Q \left( 1 - \frac{T_C}{T_H} \right),$$

teda je rovnako účinný ako Carnotov stroj.

### Tepelné stroje

Pozrime sa na záver na rôzne tepelné stroje. U nich môžeme definovať účinnosť v závislosti na ich funkcii. Tri kategórie tepelných strojov sú motory, chladničky a tepelné čerpadlá.

#### Motory

Motory vezmú teplo  $Q$  z teplejšieho rezervoáru, vykonajú prácu  $W$  a zvyšok vrátia do chladnejšieho rezervoáru. Pre motory definujeme účinnosť ako podiel získanej práce a dodaného tepla (práve za to platíme, keď prikladáme palivo)

$$\eta_e = \frac{W}{Q}.$$

Treba si dať pozor: v čitateli je celkový súčet práce, teda získanej mínus použitej, no v menovateli je len odovzdané teplo. V niektorých prípadoch treba pozorne určiť, ktoré teplo to je, jednoduchý príklad takejto záludnosti je v seriálovej úlohe.

My už vieme, že maximálnu účinnosť dosahujú vratné motory. Táto účinnosť je rovná

$$\eta_{e,\max} = 1 - \frac{T_C}{T_H}.$$

Pri veľmi podobných teplotách kotla a okolia je účinnosť veľmi malá, preto je žiaduce čo najviac rozhorúčiť kotol. Vždy sa ale pohybuje len medzi hodnotami 0 a 1.

#### Chladničky

Chladničky sa používajú opačne: vezmú energiu  $W$  zo zdroja a teplo  $Q_C$  z chladnejšieho rezervoáru a do teplejšieho rezervoáru vypustia teplo  $Q_C + W$ . Účinnosť sa ale definuje inak: užitočné je pre nás teplo  $Q_C$ , platíme za prácu  $W$ , účinnosť je teda

$$\eta_r = \frac{Q_C}{W}.$$

Maximálna účinnosť je opäť pre Carnotovu chladničku:

$$\eta_{r,\max} = \frac{Q_C}{W} = \frac{Q - W}{W} = \frac{Q}{W} - 1 = \frac{1}{\eta_{e,\max}} - 1 = \frac{T_C}{T_H - T_C}.$$

Tu je to už zaujímavejšie, povolené hodnoty účinnosti sú medzi 0 a  $\infty$ . Tie vysoké účinnosti dosiahneme ak je teplý a studený rezervoár podobnej teploty, vtedy treba málo energie na presúvanie tepla medzi nimi. Medzi rezervoármi rovnakej teploty dokonca teplo tečie samo.

Hovoríme o rezervoároch, hoci chladíme ten chladnejší. Myslíme to tak, že počas jedného cyklu stroja sa teploty zmenia zanedbateľne, takže môžeme použiť vzťah  $\Delta S = Q/T$ . Ak potom postupne meníme teplotu napríklad chladnejšieho rezervoáru, bude sa meniť aj účinnosť.

### Tepelné čerpadlá

Nakoniec, tepelné čerpadlá sa používajú napríklad na vykurovanie. Fungujú rovnako ako chladničky, len akoby vnútro chladničky pozerá von z domu a horúca časť chladničky vykuruje dom. Čerpadlo teda z chladnejšieho rezervoáru vezme teplo  $Q_C$  a spotrebuje prácu  $W$  aby vykúrilo dom teplom  $Q_C + W$ . Účinnosť sa definuje opäť ako pomer užitočné ku drahému, teda

$$\eta_p = \frac{Q_C + W}{W}.$$

Najlepšie čerpadlo je opäť napríklad to Carnotovo, ktorého účinnosť odvodíme z účinnosti chladničky

$$\eta_{p,\max} = \frac{Q_C + W}{W} = \frac{Q_C}{W} + 1 = \eta_{r,\max} + 1 = \frac{T_H}{T_H - T_C}.$$

Pri rovnakých teplotách ani nepotrebujeme tepelné čerpadlo, teplo pôjde v podstate samo, ale aj pri nulovej teplote chladnejšieho čerpadla budeme vykurovať aspoň tou energiou, ktorú do čerpadla dáme. Preto sa účinnosť čerpadla hýbe medzi 1 a  $\infty$ .

V praxi sa ako chladnejší rezervoár používa zem alebo ešte lepšie geotermálny prameň, ktoré sú hlavne v zime teplejšie ako okolitý vzduch. Treba si tiež uvedomiť, že ak by sme našli vrt s vyššou teplotou vyššou než cieľová teplota domu, nepotrebujeme čerpadlo: stačí teplú vodu z vrtu nahnať do radiátorov.

Všimnite si, že tepelné stroje nám dávajú teoreticky možnosť merať teplotu bez toho, aby sme sa spoliehali na ideálnosť plynu. Stačí totiž zmerať čisto mechanicky merateľné veličiny: teplo a prácu, aby sme mohli povedať niečo o pomere teplôt dvoch rezervoárov. Tým vieme určiť teplotu až na multiplikatívnu konštantu. Tú si môžeme zvoliť ľubovoľne. My si ju volíme tak, aby sme dostali teplotu v Kelvinoch.

To je na tento diel všetko, nabudúce sa pozrieme na podmienky rovnováhy a ich súvis s maximálnou entropiou či minimálnou energiou. To nás dovedie až ku ďalším *termodynamickým potenciálom* ako entalpia a Gibbsova voľná energia.

## Úloha IV.S . . . pracovní

6 bodů

a) Z nerovnosti

$$\Delta S_{\text{tot}} \geq 0$$

ze seriálu vyjádřete  $W$  a odvoďte tak nerovnost pro práci

$$W \leq Q \left( 1 - \frac{T_C}{T_H} \right).$$

b) Vypočítejte účinnost Carnotova cyklu bez použití entropie.

*Pomůcka:* Napište čtyři rovnice spojující čtyři vrcholy Carnotova cyklu

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \quad p_2 V_2^{\kappa} = p_3 V_3^{\kappa}, \quad p_3 V_3 = p_4 V_4, \quad p_4 V_4^{\kappa} = p_1 V_1^{\kappa}$$

a vynásobte je všechny čtyři spolu. Po úpravě dostanete

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Dále stačí použít vzorec pro práci při izotermickém procesu: pokud jde proces z objemu  $V_A$  do  $V_B$ , práce vykonaná na plynu je

$$nRT \ln \frac{V_A}{V_B}.$$

Teď si už jen stačí uvědomit, že práce při izotermickém ději je rovna teplu (se správným znaménkem) a vypočítat získanou práci (vzpomeňte si, že adiabatické procesy nepřispívají) a odevzdané teplo. *Jako řešení stačí doplnit detaily tohoto postupu.*

- c) Minule jste pracovali s  $pV$  a  $Tp$  diagramem. Proveďte podobné cvičení s  $TS$  diagramem, tedy nakreslete do něj izotermický, izobarický, izochorický a adiabatický proces. Nakreslete do diagramu též cestu plynu v Carnotově cyklu a označte správně směr a vrcholy, aby souhlasily s obrázkem v seriálu.
- d) V seriálu jsme zmínili, že někdy je třeba dávat pozor na přijaté a odevzdané teplo. Někdy se totiž to, zda teplo přijímáme anebo dáváme, mění během procesu. Jedním z příkladů je proces

$$p = p_0 e^{-\frac{V}{V_0}},$$

kde  $p_0$  a  $V_0$  jsou konstanty. Určete, pro jaké hodnoty  $V$  (při rozpínání) proudí teplo do plynu, a kdy z plynu.

(řešení str. 173)

## Kapitola 5: Termodynamické potenciály

Vráťme sa na začiatku do tretieho dielu seriálu a spomeňme si na definíciu entropie

$$\delta Q = TdS.$$

Spolu s prvým termodynamickým zákonom môžeme napísať

$$dU = \delta Q + \delta W = TdS - pdV.$$

Toto znamená, že ak vezmeme vnútornú energiu ako funkciu  $S$  a  $V$ , parciálnymi deriváciami dostaneme teplotu  $T$  a záporný tlak  $-p$ , opäť ako funkcie  $S$  a  $V$ . V jednej funkcii  $U(S, V)$  máme teda schované navyše aj funkcie  $T(S, V)$  a  $p(S, V)$ . Ak by sme ďalej vyjadrili entropiu napríklad z  $T(S, V)$  a dosadili, dostaneme funkcie  $U(T, V)$  a  $p(T, V)$ , čo by pre ideálny plyn boli práve naša kalorická a stavová rovnica.

Funkcia  $U(S, V, N)$  obsahuje aj ďalšie informácie o chemickom potenciáli (ten budeme definovať o chvíľu), ktoré len zo stavovej a kalorickej rovnice nevieme určiť! Naozaj, *všetky* informácie o systéme sú obsiahnuté vo funkcii  $U(S, V, N)$ . To môžeme chápať tak, že z nej vieme vypočítať výsledky ľubovoľných experimentov s látkou, pokiaľ neporušia predpoklady termodynamiky (napríklad manipulácia s jednotlivými časticami).

To je veľký rozdiel oproti napríklad funkcii  $U(T, V)$ . Pre ideálny plyn je to dokonca  $U(T, V) = \frac{5}{2}nRT$ , z čoho nezískam žiadne informácie o tlaku.

Vidíme, že pre vnútornú energiu máme špeciálne premenné  $S$  a  $V$ . Ak je v nich vyjadrená, potom obsahuje všetky informácie o systéme. Tieto premenné sa nazývajú *prirodené*. Podobne má prirodzené premenné aj entropia, stačí vyjadriť  $dS$

$$dS = \frac{1}{T}dU - \frac{p}{T}dV$$

a vidíme, že z vyjadrenia  $S(U, V)$  vieme dostať teplotu  $T$  a potom aj tlak z  $p/T$ .

### Chemický potenciál

Aby sme pre ideálny plyn zakódovali rovnakú informáciu ako máme v  $S(U, V, N)$  alebo  $U(S, V, N)$ , potrebujeme závislosti teploty, vnútornej energie a *chemického potenciálu* na premenných  $p, V, N$ . Chemický potenciál súvisí práve s počtom častíc  $N = nN_A$ , ktorú sme doteraz brali ako konštantu. Preto sme nikde nepísali členy ako  $dN$ . To sme ale robili len kvôli jednoduchosti, nič nám nebráni meniť počet častíc. Ak do plynu pridáme časticu, zrejme tým zmeníme jeho vnútornú energiu. To, o koľko sa zmení jeho energia, ak pri pridaní častice nezmeníme entropiu a objem, voláme *chemický potenciál* a značíme  $\mu$ . To matematicky zapíšeme ako ďalší možný príspevok do energie

$$dU = \delta Q + \delta W = TdS - pdV + \mu dN.$$

Správne sú teda prirodzené premenné pre energiu  $S, V$  a  $N$ , pre entropiu zase  $U, V$  a  $N$ .

Chemický potenciál sme tiež nevedeli dopočítať priamo zo stavovej a kalorickej rovnice. Pri výpočte entropie sme totiž mali vo výsledku neznámu funkciu počtu častíc. Pretože chemický potenciál vypočítame aj ako

$$\mu(S, V, N) = -\frac{1}{T} \frac{\partial S(U, V, N)}{\partial N}$$

výsledok tiež závisí na tejto funkcii. Entropiu sme nakoniec vedeli dopočítať pomocou úvah o zdvojnásobení počtu častíc, čo sú ale dodatočné informácie. Ostala nám len neznáma konštanta  $s_0$ , ktorú nevieme určiť. To ale len vyjadruje nejednoznačnosť vo voľbe nuly energie (ako to poznáme napríklad z elektrického potenciálu). V praxi sa to rieši tak, že sa zvolí jeden stav systému s nulovým  $\mu$  a ostatné sa udávajú voči nemu.

### Termodynamický potenciál

Ak teda poznáme funkciu  $U(S, V, N)$ , vieme dopočítať všetko, aj chemický potenciál. Preto nazývame  $U$  aj *termodynamický potenciál*.

Názov *potenciál* zrejme súvisí s používaním slova potenciál v mechanike alebo elektrostatičke. V týchto situáciách tiež vieme derivovaním potenciálu vypočítať sily.

Pomocou potenciálu vieme vypočítať všetko, ale pre reálne látky sa môže stať, že nevieme napísať funkciu  $U(S, V, N)$ . Vždy ale vieme takéto funkcie merať experimentálne. Pre vodu sa napríklad tabuľky termodynamického potenciálu volajú *parné tabuľky*.

Entropia tiež kóduje všetky informácie o systéme, ale nenazýva sa termodynamický potenciál, pretože nemá rozmer energie. Podobne ako pre energiu, vieme robiť rôzne Legendreove transformácie entropie. Tie sa potom nazývajú *Massieuove funkcie*.

Je vhodné upozorniť na to, že názov chemický potenciál nesúvisí úplne s termodynamickými potenciálmi, hoci chemický potenciál bude veľmi úzko spojený s jedným z termodynamických potenciálov, Gibbsovou energiou.

Máme teda vyjadrené všetky vlastnosti systému pomocou jednej funkcie. To je výborné, ale môže to mať háčik. Aby sme mali všetko vyjadrené pomocou termodynamického potenciálu, musíme používať prirodzené premenné, no tie môžu byť pre nás veľmi nepraktické. Vidieť to hlavne na vnútornej energii: popisovať systém podľa toho, koľko má entropie, je pre nás veľmi neprirodzené. Experimentálne vieme typicky meniť teplotu a tlak, niekedy aj objem, ale priama kontrola entropie je náročná. Preto by sme chceli mať potenciál, ktorý by mal prirodzené premenné napríklad  $T, V, N$  či  $T, p, N$ .

Už sme ale videli, že len vyjadriť entropiu ako funkciu  $T, V, N$  zo vzťahu

$$T(S, V, N) = \frac{\partial U(S, V, N)}{\partial S}$$

a dosadiť do  $U$  nám nedá termodynamický potenciál, nefunguje to napríklad ani na ideálnom plyne. Dôvod, prečo to tak je, má pekné geometrické vysvetlenie:



Pozrime sa na úplne jednoduchý prípad, funkciu  $f(x)$ . My sa pokúšame vyjadriť informácie, ktoré má táto funkcia, pomocou derivácie  $f(x)$ . Ak iba dosadíme za  $x(p)$  z rovnice  $p = f'(x)$ , máme závislosť hodnoty funkcie  $f$  na jej zmene. Teda namiesto dvojíc  $[x, f(x)]$  máme  $[f'(x), f(x)]$ . Tu ale strácame informáciu: Ak si vezmeme inú funkciu, ktorej graf je posunutý doprava či doľava, tak máme rovnakú závislosť hodnoty funkcie od zmeny funkcie.

To nemusí vyzerať ako problém, je to predsa len posun. Ak sa ale pozrieme na viacrozmerné funkcie, namiesto konštanty, o ktorú sa posúvame, máme funkciu ostatných premenných, o ktorú sa môžeme posunúť.

Toto je inak dôvod, prečo sme v treťom diele seriálu nedostali správnu závislosť  $S$  na počte častíc. Tým, že sme prešli ku jednotkám teplota a objem, dostali sme neurčitost v ľubovoľnej funkcii počtu častíc. Našťastie sme túto funkciu (až na konštantu) vedeli určiť z fyzikálnych úvah a vlastností entropie, čo ale bola informácia navyše. Vidíme teda, že kalorická rovnica  $U(T, N)$  a stavová rovnica  $T(p, V, N)$  *nemajú* všetky potrebné informácie o ideálnom plyne.

Riešenie, ktoré sa používa v termodynamike, sa nazýva *Legendreova transformácia*. Má aj peknú geometrickú interpretáciu, ale pre nás je dôležitejší zápis pomocou funkcií: Vezmime si napríklad  $U(S, N, V)$  a chceme vyjadriť teplotu  $T = \partial U(S, V, N) / \partial S$ . Pozrime sa na výraz

$$U - TS.$$

To je určite dobre definovaná veličina, lebo každý stav systému má presne definovanú vnútornú energiu, teplotu a entropiu. Pozrime sa teraz na jej malú zmenu pri malom posunutí systému

$$\begin{aligned} d(U - TS) &= dU - SdT - TdS = TdS - pdV + \mu dN - SdT - TdS = \\ &= -SdT - pdV + \mu dN. \end{aligned}$$

To je veľmi zaujímavý vzťah: Ak totiž vyjadríme  $U - TS$  ako funkciu  $T$ ,  $V$  a  $N$ , dostaneme derivovaním ostatné veličiny:  $S$ ,  $p$  a  $\mu$ . Funkcia  $U - TS$  v týchto svojich prirodzených premenných opäť obsahuje všetky mysliteľné informácie o systéme. Nepriamo to môžeme dokázať tak, že z nej vieme späť vyrobiť  $U$  vo svojich prirodzených premenných. Na to stačí zderivovať  $U - TS$  podľa teploty, čo dá entropiu, potom pripočítať  $TS$ , takže máme  $U - TS + TS = U$  v premenných  $T, V, N$ , a nakoniec vyjadriť teplotu pomocou entropie.

Funkcia  $U - TS$  sa nazýva Helmholtzova voľná energia, väčšinou sa značí  $F$  (ako **F**ree, nie podľa Helmholtza) a pozrieme sa na ňu teraz podrobnejšie.

### *Helmholtzova voľná energia*

Prirodzené premenné Helmholtzovej voľnej energie sú  $T$ ,  $V$  a  $N$ . Parciálnymi deriváciami dostaneme postupne entropiu, tlak a chemický potenciál. Aby sme ju

vyjadrili pre ideálny plyn, potrebujeme vyjadriť  $U - TS$  v prirodzených premenných. Keďže  $U(S, V, N)$  ešte ani nemáme vyjadrené, použijeme radšej pre nás známe vzťahy pre  $U(T, V, N)$  a pre  $S(T, V, N)$ :

$$F = U - TS = \frac{s}{2}nRT - nRT \ln \left( \frac{T^{\frac{s}{2}} V}{n} \right) + nRs_0 = F(T, V, N).$$

Môžeme napríklad overiť vzťah pre  $\partial F(T, V, N)/\partial V = -p$ :

$$-p = \frac{\partial F(T, V, N)}{\partial V} = -nRT \frac{\partial}{\partial V} \ln V = -\frac{nRT}{V},$$

čo je práve stavová rovnica! Všimnite si, ako sa nám vďaka logaritmu podarilo zbaviť derivovania takmer všetkých členov.

Vieme, že ak máme dva systémy s vnútornými energiami  $U_1$  a  $U_2$ , tak ich celková vnútorná energia je súčet týchto vnútorných energií. Rovnakú vlastnosť sme definovali aj pre entropiu. Ak navyše majú oba systémy rovnakú teplotu, môžeme písať pre ich celkovú Helmholtzovu voľnú energiu

$$F = U - TS = U_1 + U_2 - T(S_1 + S_2) = U_1 - TS_1 + U_2 - TS_2 = F_1 + F_2,$$

takže aj voľná energia podsystemov sa sčítava. Takúto vlastnosť majú aj ostatné termodynamické potenciály, ako sa ľahko môžete presvedčiť.

### Fyzikálna interpretácia $F$

Ak vo fyzike existuje takýto pekný matematický postup, treba hľadať aj zaujímavú fyzikálnu interpretáciu:

Vezmime si nejaký systém v kontakte s rezervoárom. Vieme, že v rovnováhe bude teplota tohoto systému rovnaká ako teplota rezervoáru, teda  $T = T_r$ . Ďalej predpokladajme, že systém samotný nie je celý v rovnováhe, napríklad pozostáva z dvoch plynov oddelených prepážkou, ktorá sa môže hýbať. Necháme teda systém kvázistaticky vyvíjať tak, ako ho to samého ťahá, teda do rovnováhy. Pri maličkom kroku sa nejako zmení vnútorná energia systému a vnútorná energia rezervoáru:

$$dU_{\text{total}} = dU + dU_r.$$

Vnútorná energia rezervoáru sa ale môže meniť len tým, že doň pritečie teplo, teda

$$dU_r = \delta Q_r = T_r dS_r.$$

Keďže ale posúvame systém kvázistaticky a izotermicky, musí byť  $dS = -dS_r$ , a teda

$$dU_r = -T_r dS.$$

Teplota systému je ale rovná teplote rezervoáru, môžeme písať  $T$  namiesto  $T_r$ . Spolu teda

$$dU_{\text{total}} = dU - T dS = d(U - TS) = dF,$$

pretože teplota systému sa nemení, takže s ňou môžeme vojsť dovnútra diferenciálu d.

Práve sme si ukázali, že práca, ktorú získame zo systému a rezervoáru, je rovná zmene Helmholtzovej voľnej energie! Ku tomuto záveru vieme dospieť aj tým, že sa pozrieme na  $dF$ :

$$dF = d(U - TS) = -SdT - pdV + \mu dN.$$

Ak držíme teplotu a počet častí konštantný, tak potom je zmena voľnej energie rovná práve  $-pdV = \delta W$ .

Navyše, ak systém s rezervoárom môžu prácu konať, teda  $dF < 0$  pre nejaký malý proces, tak ju aj konajú budú: Je všeobecný zákon, že sa systém snaží dostať do minima energie. Ak by bolo pre nejaký malý proces  $dF > 0$ , tak pri opačnom procese bude  $dF < 0$  a systém s rezervoárom sa ďalej hýbe. Celý proces sa zastaví až v minime voľnej energie pre danú teplotu  $T_r$ , teda pre

$$dF = 0.$$

To je druhá časť interpretácie voľnej energie: Pre systémy v kontakte s rezervoárom tepla sa minimalizuje. To je pre nás výhodné pri výpočtoch. Stačí si povedať, že teplota systému je rovná teplote rezervoáru, a môžeme na rezervoár zabudnúť.

*Ak je pre vás táto časť ťažko pochopiteľná, skúste si spočítať podúlohu c) seriálovej úlohy. Potom si o Helmholtzovej voľnej energii prečítajte ešte raz a predstavujte si pri tom proces z úlohy.*

Práve sme použili *princíp minimálnej energie*: Ak sa inak uzavretý systém môže pomaly vyvíjať, tak sa vyvíja do stavu s minimálnou energiou. To poznáte dobre z mechaniky. Platí totiž, že ak systém pri malom posune zmenší svoju energiu, tlačí ho do tohoto posunu sila – to je nejakom zmysle dokonca definícia sily vzťahom  $F = -dE(x)/dx$ .

Ako to, že platí princíp minimálnej energie a súčasne zákon zachovania energie? Spomeňte si na mechaniku: Necháme guľôčku kotúlať sa po hrboľatej zemi. Ak ju necháme úplne voľne, tak sa jej potenciálna energia zmení na kinetickú, takže sa nedostane hneď do rovnováhy. Postupne svoju energiu premení na iné formy a skončí v jamke. Podobne, ak uvoľníme termodynamický systém, tak sa bude hýbať rýchlo a nebude preň platiť rovnovážna termodynamika, teda ani vzťah na výpočet vnútornej energie. Po chvíli sa kvôli treniu ustáli, ale s inými termodynamickými parametrami.

Čistejší spôsob, ako nechať systém vyvíjať do rovnováhy, je robiť to kvázistaticky. Pri tom bude uvoľňovať prácu, ktorú my môžeme zbierať. Ak toto uvoľňovanie bude navyše vratné, bude sa i zachovávať entropia. To sme presne urobili v predchádzajúcom výpočte pre systém napojený na rezervoár. Navyše sme zistili, že táto pozbieraná práca je rovná práve zmene Helmholtzovej voľnej energie.

Ak systém uzavrieme úplne, teda z neho nebudeme vyberať prácu, bude sa správať podľa *princípu maximálnej entropie*. Pre takýto systém bude zachovaná celková vnútorná energia, ale vnútorné procesy (ktoré môžu byť nevrátne) budú vždy zvyšovať entropiu. Preto sa proces zastaví až na najvyššej entropii.

Všimnite si, ako sa menia tieto princípy. Predstavte si systém, ktorý má napríklad viac rôznych termodynamických podsystemov.

- Pre úplne izolovaný systém sa maximalizuje entropia. V úplne izolovanom systéme sa zachováva celková vnútorná energia, objem a počet častíc.
- Zasiahnime teraz do systému tak, že jeho entropiu budeme brať konštantnú. To dosiahneme tým, že samovoľné toky vo vnútri systému urobíme vratne. Ak v predchádzajúcom prípade vystrelil piest, teraz ho pomaly posúvame a čerpáme energiu, ak tieklo teplo medzi dvoma rezervoármi, teraz ho prenášame pomocou Carnotovho stroja a zvyšnú prácu si nechávame. V takomto prípade sa vnútorná energia nezachová, ale minimalizuje.
- Teraz navyše pridajme podmienku konštantnej teploty, teda systém napojíme na rezervoár teploty. Entropia sa bude meniť, pretože bude tiecť z rezervoáru do systému. Minimum tu nadobudne voľná energia.
- S ďalšími potenciálmi to bude podobne. Ak prejdeme ku novej premennej  $X$ , tak pri konštantnom  $X$  sa minimalizuje nejaký iný potenciál.

### Ďalšie termodynamické potenciály

Rovnakým spôsobom ako pri Helmholtzovej voľnej energii môžeme definovať i ďalšie termodynamické potenciály. *Entalpia* je definovaná ako  $H = U + pV$ . Pre jej diferenciál platí

$$dH = TdS - pdV + \mu dN + d(pV) = TdS + Vdp + \mu dN$$

a pri konštantnom tlaku a počte častíc je jej zmena rovná nárastu tepla (podobne ako pre energiu je  $dU = \delta Q$  pri konštantnom objeme a počte častíc). Keďže fázové zmeny prebiehajú práve pri konštantnom tlaku, teplo potrebné na ich realizáciu je práve zmena entalpie.

Vymeniť môžeme viaceré premenných, ako napríklad u *Gibbsovej energie*  $G = H - TS = U + pV - TS$ . Lahko spočítame

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN.$$

Gibbsova voľná energia má veľké uplatnenie. Veľa procesov, napríklad v chémii, totiž prebieha pri konštantnej teplote a tlaku. To je kvôli tomu, že ich robíme v otvorených nádobách, kde musí byť atmosférický tlak a teplota. Pri týchto podmienkach, ak povolíme premenný počet častíc, je zmena Gibbsovej energie na jednu časticu rovná chemickému potenciálu.

Rovnako môžeme prejsť i ku termodynamickým potenciálom závisiacim na chemickom potenciáli: *Grandkanonický potenciál* je  $\Omega = F - \mu N$ . Ten má efekt vtedy, ak dovoľíme premenný počet častíc. Príklad takéhoto systému je hemoglobín v pľúcach, ktorý si môže vymieňať molekuly kyslíku a oxidu uhličitého s molekulami vo vdýchnutom vzduchu.

Takto by sme mohli samozrejme pokračovať ďalej a vyrábať ďalšie potenciály. Vy si ešte niečo prepočítate v seriálovej úlohe. Termodynamické potenciály sú ale veľmi bohatá oblasť, takže nabudúce v nich budeme pokračovať. Okrem toho sa konečne pozrieme na niečo iné ako na dobre známy ideálny plyn.

## Úloha V.S ... přirozeně proměnná

6 bodů

- a) Použijte vztah pro entropii ideálního plynu  $S(U, V, N)$  z řešení třetí seriálové úlohy

$$S(U, V, N) = \frac{s}{2} nR \ln \left( \frac{UV^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} Rn^{\kappa}} \right) + nR s_0.$$

a vztah pro změnu entropie

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN$$

a vypočítejte chemický potenciál jako funkci  $U$ ,  $V$  a  $N$ . Upravte dále na funkci  $T$ ,  $p$  a  $N$ .

*Pomůcka:* Přečtěte si o derivacích a malých změnách v druhém díle seriálu. Nyní by už mělo být zřejmější, že koeficienty jako  $1/T$  před  $dU$  spočítáte jako parciální derivaci  $S(U, V, N)$  podle  $U$ . Nezapomeňte na užitečný vztah  $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$  a že  $n = N/N_A$ .

*Bonus:* Vyjádřete tímto způsobem i teplotu a tlak jako funkce  $U$ ,  $V$  a  $N$ . Eliminujte závislost tlaku na  $U$ , abyste dostali stavovou rovnici.

- b) Je chemický potenciál ideálního plynu kladný, nebo záporný ( $s_0$  považujte za zanedbatelné)?
- c) Co se bude dít s plynem v pístu, pokud je plyn napojený na rezervoár s teplotou  $T_r$ ? Píst se může volně pohybovat a z druhé strany na něj nic nepůsobí. Popište, co se bude dít, pokud dovolíme jen kvazistatické procesy. Kolik práce takto dokážeme extrahovat? Platí, že se takto minimalizuje volná energie?

*Pomůcka:* Na výpočet práce se vám může hodit vztah

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln \frac{b}{a}.$$

- d) Entalpii jsme v seriálu definovali jako  $H = U + pV$ , Gibbsovu energii jako  $G = U - TS + pV$ . Jaké jsou přirozené proměnné těchto potenciálů? Jaké termodynamické veličiny dostaneme derivacemi těchto potenciálů podle svých přirozených proměnných?
- e) Vypočítejte změnu grandkanonického potenciálu  $d\Omega$  z jeho definičního vztahu  $\Omega = F - \mu N$ .

(řešení str. 177)

## Kapitola 6: Termodynamické potenciály a fotónový plyn

V minulom díle seriálu sme sa venovali náročnej téme, termodynamickým potenciálom. Videli sme, že ak chceme zakódovať všetku informáciu o systéme do jednej funkcie, musíme povedať, aké premenné používame. Pre vnútornú energiu  $U$  sú tieto *přirozené proměnné*  $S, V, N$ . Ak chceme použiť iné premenné, musíme prejsť ku iným funkciám. Výsledky si zosumarizujeme:

- *Vnúťorná energia*  $U$  má prirodzené premenné  $S, V, N$ . V týchto premenných platí

$$dU = TdS - pdV + \mu dN.$$

- *Helmholtzova voľná energia*  $F$  je definovaná ako  $F = U - TS$  a má prirodzené premenné  $T, V, N$ . V týchto premenných platí

$$dF = -SdT - pdV + \mu dN.$$

- *Entalpia*  $H$  je definovaná ako  $H = U + pV$  a má prirodzené premenné  $S, p, N$ . V týchto premenných platí

$$dH = TdS + Vdp + \mu dN.$$

- *Gibbsova energia*  $G$  je definovaná ako  $G = U - TS + pV$  a má prirodzené premenné  $T, p, N$ . V týchto premenných platí

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN.$$

- *Grandkanonický potenciál*  $\Omega$  je definovaný ako  $\Omega = U - TS - \mu N$  a má prirodzené premenné  $T, V, \mu$ . V týchto premenných platí

$$d\Omega = -SdT - pdV - Nd\mu.$$

- Za zmienku stojí aj *entropia*, hoci sa nenazýva termodynamický potenciál (nemá jednotky energie). Má prirodzené premenné  $U, V, N$  a platí pre ňu

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN.$$

Používanie termodynamických potenciálov ale nemusí byť také zložité, ako bolo ich odvodenie. Pokúsime sa to ukázať na viacerých jednoduchých príkladoch, ako aj na popise úplne nového systému: *fotónového plynu*.

Pretože je tento diel seriálu posledný, vrátime sa ku niektorým bodom, ktoré vám mohli byť nejasné. Začnime ale so spomínanou aplikáciou termodynamických potenciálov, najprv s entalpiou a fázovými prechodmi.

### Skupenské teplo

Pri úvahách s potenciálmi je veľmi dôležité pamätať na podmienky, pri ktorých prebiehajú procesy: podľa toho, aké premenné držíme konštantné, si musíme vybrať i termodynamický potenciál.

Budeme študovať fázové prechody, pre konkrétnosť hovoríme o vyparovaní. Fázové prechody prebiehajú pri konkrétnej teplote a väčšinou nie sú uzavreté do konštantného objemu, ale majú stále konštantný tlak. Pozrieme sa tiež na fázovú premenu, ktorá prebieha kvázistaticky, teda je blízko rovnováhy. Ak umiestnime pohár vody do vákua, bude búrlivo vriieť. My sa chceme pozrieť na situáciu, keď máme nad hladinou takmer nasýtené pary.

Iný spôsob, ako popísať túto rovnováhu, je pomocou Gibbsovej energie. Spomeňme si, že systém s konštantným tlakom a teplotou sa snaží minimalizovať svoju Gibbsovu energiu. Preto, ak by bola Gibbsova energia (na jednu časticu) nižšia napríklad v pare, tak by systém nebol v rovnováhe, kvapalina by sa vyparovala.

Rovnako by sme mohli rozprávať aj o chemickom potenciáli, ako môžeme vidieť aj vo vzťahu

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN.$$

Pri vyparení časti kvapaliny sa nezmení tlak ani teplota, teda celková zmena je priamo úmerná počtu častíc a chemickému potenciálu. V rovnováhe teda musia byť aj chemické potenciály oboch fáz rovnaké.

Pozrieme sa teraz na zmenu *entalpie* pri fázovej zmene. Na to sa bude hodiť vyjadrenie  $H = G + TS$ . Ak sa vyparí napríklad jeden mol kvapaliny, pričom sme takmer v rovnováhe, tak sa jeho Gibbsova energia takmer nezmení, alebo  $G_0 = G_1$ . Teplota je konštantná, takže platí

$$\Delta H = H_1 - H_0 = G_1 + TS_1 - G_0 - TS_0 = T(S_1 - S_0) = T\Delta S.$$

Výraz  $T\Delta S$  je ale pri konštantnej teplote a kvázistatickom procese rovný prijatému teplu: Zmena entalpie pri fázovom prechode je práve skupenské teplo tohoto prechodu. Ak vypočítame napríklad zmenu entalpie na jeden mol, dostávame molárne skupenské teplo.

Ak je toto teplo kladné, teda pri fázovom prechode látka prijme teplo, nazýva sa tento prechod *endotermický*. Každý má skúsenosť s tým, že vyparovanie vody z pokožky chladí, čo je práve kvôli tomu, že ide o endotermický proces. Ak je naopak  $\Delta H < 0$ , proces sa nazve *exotermický* a látka pri fázovom prechode odovzdá teplo.

Vzťah  $\Delta H = T\Delta S$  súhlasí s predstavou o entropii ako o čísle vyjadrujúcom neusporiadanosť. Napríklad pri topení alebo vyparovaní sa výrazne zvyšuje neusporiadanosť systému,  $\Delta S$  je kladné a ide o endotermický dej.

### *Gibbsova energia a spontánnosť procesov*

Predstavte si teraz podchladenú vodu, teda vodu s teplotou pod teplotou tuhnutia. Na rozdiel od predchádzajúcej časti, voda nie je v rovnováhe s ľadom, ale sama začne rýchlo mrznúť. To môžeme charakterizovať tým, že ľad má nižší chemický potenciál, alebo Gibbsovu energiu. Takýto proces, pri ktorom klesne Gibbsova energia, sa nazve *exergonický* a prebehne *spontánne*. Opačne, ak by pri nejakom procese mala narásť Gibbsova energia, tak sám od seba neprebehne. Vtedy sa proces nazýva *endergonický*.

Nemusíme ale rozprávať len o fázových prechodoch. Často sa napríklad uvádza Gibbsova energia pre rôzne chemické látky a porovnaním celkovej Gibbsovej energie reaktantov a produktov určíme, či reakcia bude prebiehať. Chemické reakcie totiž tiež často prebiehajú v otvorených nádobách, teda s (približne) konštantným tlakom a teplotou.

Treba ešte poznamenať, že spontánnosť reakcie ešte nehovorí nič o jej rýchlosti. Napriek tomu, že reakcia je energeticky výhodná, môže na ňu byť potrebná taká aktivačná energia, že bude prebiehať zanedbateľnou rýchlosťou. Vtedy sa používajú katalyzátory alebo sa napríklad zvýši teplota. Zvýšením teploty totiž zvýšime energiu častíc, ktoré tak ľahšie prekonajú energetickú bariéru.

Všimnime si, že exotermický proces (teda  $\Delta H < 0$ ) nemusí byť automaticky aj exergonický. Zo vzťahu

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$$

vidíme, že ak pri procese klesá aj entropia, závisí jeho spontánnosť na teplote (ak zanedbáme závislosť  $G$  a  $H$  na teplote). Podľa rôznych znamienok  $\Delta H$  a  $\Delta S$  môžu nastať 4 rôzne situácie

- Pri exotermickom procese  $\Delta S > 0$  bude  $\Delta G$  vždy záporné, teda proces bude exergonický a prebehne spontánne. To je napríklad výbuch alebo horenie: určite ide o exotermický proces a navyše pri ňom rastie entropia: z usporiadanej látky dostaneme menej usporiadaný plyn.
- Ak je pri exotermickom procese  $\Delta S < 0$ , závisí znamienko  $\Delta G$  od teploty. Pre malú teplotu preváži záporné  $\Delta H$ . Ak je ale teplota väčšia ako  $\Delta H/\Delta S$ , proces už samovoľne neprebehne. Samozrejme, tuhnutie je pekný príklad, kritická teplota je tu proste teplota tuhnutia. Oplatí sa spomenúť aj polymerizáciu, ktorá je exotermická, ale dostávame sa do usporiadanejšieho stavu. Od istej teploty  $T_c$  (z anglického *ceiling temperature*) už tiež nebude prebiehať.
- Naopak, pri endotermickom procese s  $\Delta S > 0$  bude  $\Delta G$  záporné pri dosť vysokých teplotách. Opak tuhnutia, topenie, je príklad takéhoto procesu. Pekná aplikácia je krakovanie ropy, kde potrebujeme rozbiť reťazce uhlovodíkov, čo je proces pri ktorom rastie entropia, no je endotermický. Preto krakovanie nastane až pri zvýšenej teplote.
- Nakoniec proces, pri ktorom by sa zvýšila energia a znížila entropia. Takýto proces je vždy endergonický a spontánne nikdy nenastane, ale nastane jeho opak. Napríklad fotosyntéza potrebuje energiu a znižuje entropiu. To, že prebieha, je vďaka schopnosti rastlín šikovne využívať slnečnú energiu.

Skutočnosť je o trochu zložitejšia. Hoci by aj bola nejaká reakcia veľmi entalpicky nevýhodná, napriek tomu vo veľmi malej miere nastane. Takéto správanie je ale schované aj v rovnici  $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ . Napriek tomu, že ak je napríklad chemická reakcia entalpicky nevýhodná v zmysle  $\Delta H > 0$ , pre dostatočne malý počet zreagovaných častíc bude  $T\Delta S$  vždy väčšie ako  $\Delta H$ .

Je to kvôli takzvanej *zmiešavacej entropii*: pri vzniku novej fázy totiž entropia vždy narastie kvôli miešaniu s pôvodnou fázou. Tento nárast entropie spôsobí, že pre ľubovoľnú teplotu bude aspoň na začiatku  $\Delta G$  záporné. Reakcia teda vždy aspoň začne.

O čom sme teda doteraz rozprávali? Väčšinou sa porovnávajú Gibbsove energie reaktantov a produktov v takzvaných štandardných podmienkach: teda pri atmosférickom tlaku a izbovej teplote. Ak majú napríklad reaktanty nižšiu Gibbsovu energiu ako produkty pri štandardných podmienkach, očakávame, že v rovnováhe (pri štandardných podmienkach) bude viac reaktantov. Pri začiatku reakcie ale produkty určite nie sú v štandardných podmienkach, vôbec ani neexistujú! Špeciálne majú nulový tlak.



Kompletná predstava o termodynamickom procese je takáto: na začiatku reakcia začne, pretože tak vieme zvýšiť entropiu. Postupne, ako pribúda produktov, sa ale začína Gibbsova energia blížii svojej hodnote v štandardných podmienkach. Ak je hodnota v štandardných podmienkach oveľa menšia u reaktantov, tak vznikne len malé množstvo produktov a chemické potenciály sa vyrovnajú veľmi rýchlo. Naopak, ak je Gibbsova energia nižšia u produktov, tak zreaguje väčšina reaktantov a produktov ostane málo.

Najlepšie je všetko ilustrovať na príklade, ktorý všetci poznáte: na vzniku pH vody. Napriek tomu, že voda je oveľa stabilnejšia v molekule  $\text{H}_2\text{O}$ , táto molekula sa vo vode rozpadá na  $\text{H}^+$  a  $\text{OH}^-$ . V rovnováhe je potom jedna takáto rozpadnutá molekula na  $10^7$  nerozpadnutých molekúl. Toto číslo 7 je práve pH vody – tak je pH definované.

Vidíme, prečo väčšinou nemusíme uvažovať takéto energeticky nevýhodné reakcie: prebiehajú len vo veľmi malom množstve. Rovnaké úvahy samozrejme platia napríklad aj o vyparovaní. Aj pri izbovej teplote sa totiž z vody niečo vyparuje. Pri zvyšovaní teploty sa potom posúva rovnováha ku vyparenej vode, pretože klesá člen  $-T\Delta S$ , a tak klesá aj rozdiel  $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ .

### Fotónový plyn

Skočíme teraz na úplne inú tému, a to na popis nového systému, *fotónového plynu*. Predstava množstva fotónov zavretých do krabice nie je úplne presná: fotóny totiž musia byť v rovnováhe so stenou krabice, aby do nej mohli naraziť, byť absorbované a späť vyžiarené. To okrem iného znamená, že ich počet sa mení, lebo počet vyžiarených fotónov nemusí byť rovný počtu tých absorbovaných. Preto sa ani nedá hovoriť o počte fotónov, ten sa stále mení. Na popis fotónového plynu teda stačí len teplota a objem.

V takýchto premenných je najlepšie popísať plyn pomocou Helmholtzovej voľnej energie. Pomocou štatistickej fyziky sa dá odvodiť, že platí

$$F(T, V) = -\alpha VT^4,$$

kde  $\alpha$  je odstrašujúco vyzerajúca konštanta

$$\alpha = \frac{k_{\text{B}}^4 \pi^2}{45 \hbar^3 c^3}.$$

Tu je  $c$  je rýchlosť svetla a  $\hbar$  je redukovaná Planckova konštanta  $\hbar = h/(2\pi)$ . Pozrieme sa na prvú stranu tohoto dielu seriálu a ľahko si vypočítame napríklad tlak

$$p = -\frac{\partial F(T, V)}{\partial V} = \alpha T^4$$

a entropiu

$$S = -\frac{\partial F(T, V)}{\partial T} = 4\alpha VT^3.$$

Ak vám pripadá mocnina teploty povedomá, pripadá vám správne: fotónový plyn úzko súvisí s čiernym telesom a jeho vyžarovaním. Fotón s hybnosťou  $\mathbf{p}$  nesie energiu  $|\mathbf{p}|c$  a vieme, že tlak  $p$  na stenu krabice je kvôli odovzdávaniu hybnosti fotónov. Výkon žiarenia dopadajúci na stenu by mal teda byť niečo ako  $pc$ . V skutočnosti

musíme uvažovať rôzne smery dopadajúcich fotónov, takže nakoniec by sme dostali pre výkon dopadajúci na štvorcový meter, ktorý označíme  $j$ , vzťah

$$j = \frac{3}{4}pc.$$

Po dosadení čísel skutočne dostaneme Stefanov-Boltzmannov zákon pre vyžarovanie čierneho telesa.

Fotónový plyn je takzvaný *ultrarelativistický kvantový plyn*. To znamená, že jeho častice musíme popisovať s pomocou relativity (to používame vo vyjadrení energie ako  $|\mathbf{p}|c$ , nie  $\mathbf{p}^2/(2m)$ ) a že je tvorený bozónmi, kvantovými časticami.

Celý vesmír je vyplnený takýmto fotónovým plynom a jeho teplota je s veľmi vysokou presnosťou rovná 2,73 K. Takto nízka teplota je spôsobená práve rozpínaním fotónového plynu, ktorý sa adiabaticky rozpínal spolu s vesmírom. Ďalej sa s fotónovým plynom zoznámite v seriálovej úlohe.

### Poznámky na záver

#### Jednotky entropie

Pozrime sa opäť na vzťah

$$S(U, V, N) = \frac{s}{2}nR \ln \left( \frac{UV^{\kappa-1}}{\frac{s}{2}Rn^{\kappa}} \right) + nRs_0.$$

V logaritme máme niečo s jednotkou  $m^{3(\kappa-1)} \cdot \text{mol}^{1-\kappa} \cdot \text{K}$ , čo je prinajmenšom podozrivé!

V skutočnosti to je kvôli tomu, že sme konštantu  $s_0$  napísali mimo logaritmus: ak vezmeme  $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ , dostaneme vo všeobecnosti rozdiel logaritmov čísel s jednotkou. Poriadne je teda lepšie písať vzťah pre entropiu ako

$$S(U, V, N) = \frac{s}{2}nR \ln \left( \frac{UV^{\kappa-1}}{n^{\kappa}\Phi} \right),$$

kde konštanta  $\Phi$  má rovnaké jednotky ako  $UV^{\kappa-1}n^{-\kappa}$ .

Hodnota tejto konštanty sa dá určiť s použitím štatistickej fyziky. Pre monoatómový plyn ju udáva tzv. Sackurova-Tetrodeho rovnica ako

$$\Phi = \frac{3\pi\hbar^2 N_A^{\frac{5}{3}}}{me^{\frac{5}{3}}},$$

kde  $m$  je hmotnosť jedného atómu plynu.

V minulej seriálovej úlohe ste mali určiť znamienko chemického potenciálu. Po dosadení čísel (v jednotkách SI je rovná približne 1/100) zistíme, že je pri bežných podmienkach oveľa menšia ako súčin  $UV^{\kappa-1}n^{-\kappa}$ , teda skutočne vyjde chemický potenciál záporný.

**Prečo píšeme  $\delta Q$** 

Mohli ste sa zaujímať, prečo stále píšeme  $\delta Q$  a nie  $dQ$ , hoci používame  $dS$ ,  $dU$  a tak ďalej. Rozdiel medzi  $Q$  a napríklad  $S$  je, že entropia  $S$  je dobre definovaná funkcia od termodynamického stavu: v každom rovnovážnom stave vieme určiť entropiu, napríklad podľa predchádzajúceho vzťahu. Preto píšeme  $dS$ , ide skutočne o zmenu funkcie  $S$ .

Funkcia  $Q$ , ktorá by bola dobre definovaná pre každý stav a jej zmena by bola rovná  $\delta Q$ , ale *neexistuje!* Je to kvôli tomu, že pri rôznych cestách medzi dvoma stavmi môžeme prijať rôzne teplá: napríklad cyklus v Carnotovom stroji končí v rovnakom stave ako začínal, ale medzi tým prijme teplo  $Q_H - Q_C$ .

To, že takáto funkcia  $Q$  neexistuje, sa dá ľahko dokázať. Podržieme pre jednoduchosť konštantný počet častíc. Potom napríklad vo vyjadrení pre nejakú funkciu  $X(T, V)$  dostaneme

$$dX = \frac{\partial X(T, V)}{\partial T} dT + \frac{\partial X(T, V)}{\partial V} dV.$$

Tieto dva koeficienty  $\partial X(T, V)/\partial T$  a  $\partial X(T, V)/\partial V$  sú spolu ale úzko zviazané: ak ich označíme  $X_{,T}$  a  $X_{,V}$  platí

$$\frac{\partial X_{,T}}{\partial V} = \frac{\partial^2 X}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 X}{\partial T \partial V} = \frac{\partial X_{,V}}{\partial T}. \quad (56)$$

Nie každé dve funkcie, ktoré pridáme pred  $dT$  a  $dV$ , teda môžu byť získané ako parciálne derivácie jednej funkcie! Pozrime sa ako to bude pre teplo  $\delta Q$ . Z prvého termodynamického zákona vieme, že pre ideálny plyn platí

$$\delta Q = dU - \delta W = dU + pdV = \frac{s}{2} nRdT + \frac{nRT}{V} dV.$$

Spĺňajú koeficienty  $Q_{,T} = snR/2$  a  $Q_{,V} = nRT/V$  podmienku (56)? Nie! Platí totiž

$$\frac{\partial Q_{,T}}{\partial V} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial Q_{,V}}{\partial T} = \frac{nR}{V}.$$

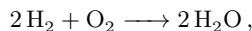
Preto nemôže existovať funkcia  $Q(V, T)$ , ktorej zmena je rovná  $\delta Q$ . Platí ale, že existuje funkcia, ktorej zmena je rovná  $\delta Q/T$  – vyskúšajte si! Samozrejme, táto funkcia je práve entropia.

To je všetko! Ďakujem, že ste sa dočítali až sem. Okrem riešiteľom a čitateľom seriálu patrí vďaka aj korektorom za pozorné čítanie a Dorotke za pomoc s chémiou.

**Úloha VI.S ... záverečná**

6 bodů

a) Najdte v tabulkách nebo na internetu, jak se změní entalpie a Gibbsova energie při reakci



kde jde o přeměnu plynů na plyn a odehrává se při standardních podmínkách. Vypočítejte také, jak se změní entropie při takovéto reakci. Výsledky udávejte vztahené na jeden mol.

- b) Pro fotonový plyn platí, že tok energie skrze plochu je dán vztahem

$$j = \frac{3}{4} \frac{k_{\text{B}}^4 \pi^2}{45 \hbar^3 c^3} c T^4 .$$

Dosaďte hodnoty konstant a porovnejte výsledek se Stefanovým-Boltzmannovým zákonem.

- c) Vypočítejte vnitřní energii a Gibbsovu energii fotonového plynu. Dále pomocí vnitřní energie vypočítejte závislost teploty fotonového plynu na objemu při adiabatickém rozpínání, tedy při procesu s  $\delta Q = 0$ .

*Nápověda:* Zákon pro adiabatický děj s ideálním plynem jsme odvodili v druhém dílu seriálu.

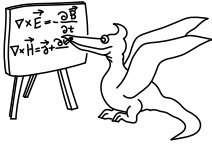
- d) Vezměme si fotonový plyn. Ukažte pro  $\delta Q/T$ , že pokud ho vyjádříme jako

$$\delta Q/T = f_{,T} dT + f_{,V} dV ,$$

tak funkce  $f_{,T}$  a  $f_{,V}$  splňují nutnou podmínku na existenci entropie, tedy že

$$\frac{\partial f_{,T}(T, V)}{\partial V} = \frac{\partial f_{,V}(T, V)}{\partial T} .$$

(řešení str. 181)



## Řešení úloh ze seriálu

### Úloha I.S ... zahřívací

- a) Na rozehrání a seznámení se s čísly zjistěte, do jaké výšky byste mohli zdvihnout průměrného člověka (70 kg), využijete-li celou energii běžné tyčinky Mars (okolo 250 Cal pro 50 g tyčinku). Také vypočtete, jaká energie je  $k_B T$  při pokojové teplotě a vyjádřete ji také v elektronvoltech (pokud neznáte takovou jednotku energie, vezte, že je to energie, kterou získá elektron při urychlení na rozdíl potenciálů 1 V, a číselně  $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ).
- b) Se stavovou rovnicí se dá hodně cvičit. Když namísto počtu částic použijete molární množství  $n$ , dostanete

$$pV = nN_A k_B T,$$

kde se součin  $N_A k_B$  značí  $R$  a nazývá se univerzální plynová konstanta. Určete její hodnotu. Také dále upravte stavovou rovnici do tvaru, ve kterém se vyskytuje hmotnost plynu, a potom do tvaru obsahujícího hustotu plynu.

- c) Určete objem molu plynu při pokojové teplotě. Toto číslo je užitečné znát zprávně.
- d) Nakonec trochu úvahová úloha. Povšimněte si, že v diskusi o práci ideálního plynu jsme automaticky použili tlak plynu. Zkuste sebe a mě přesvědčit, že je to ten správný tlak – já bych totiž namítal, že jsme mohli použít okolní tlak nebo dokonce rozdíl tlaků vně a uvnitř.
- Poznámka: Hodnocení této části bude mírné, nebojte se zamyslet a napsat cokoli, na co přijдете.

- a) Z textu seriálu víeme, že  $1 \text{ Cal} \doteq 4 \text{ 200 J}$ , v Marske je teda  $E_{\text{Mars}} = 4 \text{ 200 J} \cdot 250 = 1,05 \text{ MJ}$  energie. Túto energii premeníme na potenciálnu energiu  $m_p g \Delta h$  tak, že zdvihneme priemerného človeka s hmotnosťou  $m_p = 70 \text{ kg}$  o  $\Delta h$ , odkiaľ vyjadrieme zdvihnutie

$$\Delta h = \frac{E_{\text{Mars}}}{m_p g} \doteq 1,5 \text{ km}.$$

Všimnite si, že pri účinnosti človeka niekoľko desiatok percent vám stačí na slušnú horskú túru len pár takýchto tyčíniek (čo aj potvrdzuje skúsenosť).

Izbová teplota  $T_i = 20 \text{ }^\circ\text{C} \doteq 293 \text{ K}$  zodpovedá energii

$$E_{\text{term}} = k_B T_i \doteq 4,0 \cdot 10^{-21} \text{ J} \doteq 25 \text{ meV}.$$

Môžeme ju nazvať *termálnou* energiou, pretože približne takúto kinetickú energiu budú mať jednotlivé molekuly uložené vo svojom neusporiadanom pohybe.

b) Vynásobením dvoch konštánt dostaneme<sup>1</sup>  $R = k_B N_A \doteq 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

Ak vieme, koľko váži jeden mol plynu (tzv. molová hmotnosť, značíme  $M$ ), počet imolov zistíme z hmotnosti  $m$  jednoducho ako  $n = m/M$

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

Ďalej už stačí rovnicu len vydeliť objemom

$$p = \frac{\rho}{M} RT.$$

c) Dosadíme typický atmosférický tlak  $p_a = 101 \text{ kPa}$ ,  $n = 1 \text{ mol}$  a teplotu  $T_i$  do stavovej rovnice a dostávame

$$V = \frac{nRT_i}{p_a} \doteq 241.$$

Odtiaľto si môžete ľahko dopočítať približnú hustotu plynu: mol napr.  $\text{N}_2$  váži 28 g a má objem tých 241, teda bude mať hustotu okolo  $\rho_{\text{N}_2} \doteq 1,2 \text{ g}\cdot\text{l}^{-1}$ .

d) Možno najjednoduchší argument je takzvaný limitný prípad, čo pre plyn znamená vákuum: *Vákuum nemôže konať prácu, no plyn môže konať prácu, hoci by bol v nádobe umiestnenej vo vákuu, stačí aby napríklad tlačil na pružinku*. Ak túto úvahu rozvineme ďalej, tak vidíme, že vonkajší plyn je len jedna z možných pružín, do ktorej sa môže prenášať energia pri zmene objemu vnútorného plynu.

Dúfal som, že táto úloha vás donúti premýšľať, čo sa môže stať, ak je vonkajší a vnútorný tlak rozdielny. Ak by sme v takomto systéme nechali vnútorný plyn sa voľne rozpínať, prudké vyrovnanie tlakov by spôsobilo dej, ktorý už nevieme popísať v rámci rovnovážnej termodynamiky. Pri pohybe piestu by sa nestíhal vyrovnávať tlak a ako uvidíme v druhom dieli seriálu, takýto proces je fundamentálne iný ako pomalé posúvanie. Toto pomalé posúvanie samozrejme môžeme dosiahnuť, napríklad zarážkami, pružinou alebo inak; pričom takéto vylepšenia spôsobia, že plyn vo vnútri bude z vonka cítiť prakticky rovnaký tlak, akým tlačí on sám.

## Úloha II.S ... procesní

a) *Které ze skupiny 4 procesů (izobarický, izochorický, izotermický a adiabatický) mohou být vratné?*

---

<sup>1</sup>Ak si chcete zapamätať toto číslo, všimnite si, že stačí obrátiť poradie číslíc v Boltzmannovej konštante  $k_B \doteq 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ . Rád Boltzmannovej konštanty si môžete zapamätať pomocou Avogadroho čísla: v oboch je to 23, len jedna konštanta je (v SI) malíčka a druhá obrovská.

- b) Vezměte vztah  $T = pV/(nR)$  s  $n = 1$  mol,  $p = 100$  kPa a  $V = 221$ . O kolik se změní  $T$ , pokud  $p$  i  $V$  zvětšíme o 10 %, 1 % a 0,1 %? Spočítejte to dvěma způsoby: přesně a pomocí vztahu  $dT = T_p dp + T_V dV$ . Jak se liší tyto výsledky?
- c) d) gymnastika:

- Ukažte, že  $d[Cf(x)] = C d[f(x)]$ , kde  $C$  je konstanta.
- Vypočítejte  $d(x^2)$  a  $d(x^3)$ .
- Ukažte, že  $d(1/x) = -dx/x^2$  z definice, tedy

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x + dx} - \frac{1}{x}.$$

Může se vám hodit  $(x + dx)(x - dx) = x^2 - (dx)^2 = x^2$ .

- Bonus: Platí  $\sin(d\vartheta) = d\vartheta$  a  $\cos(d\vartheta) = 1$ . Taktéž máme součtový vzorec  $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ . Dokažte  $d(\sin\vartheta) = \cos\vartheta d\vartheta$ .
  - Bonus: Podobně ukažte  $d(\ln x) = dx/x$  s pomocí  $\ln(1 + dx) = dx$ .
- d) Vysvětlete fyzikálně, proč je izobarická tepelná kapacita větší než izochorická.

- a) Správná odpověď na túto otázku nie je stručná, pretože záleží na tom, ako tento proces realizujeme. Dohodnime sa hneď na začiatku, že proces prebieha kvázistaticky; nekvázistatické procesy nie sú vratné.

Mohli by ste si povedať, že pomalý proces s plynom je stále rovnaký, vieme predsa ako sa menia všetky vlastnosti plynu. Dôležité ale je pozrieť sa na to, čo sa deje s okolím, ktoré sa tiež podieľa na procese.

*Hovoríme väčšinou o procese, pri ktorom plyn zohrievame alebo stláčanie: je to ale iba voľba, všetky tieto úvahy platia aj o opačných procesoch.*

*Adiabatický proces* je najjednoduchší: plyn pomaly stláčame, interaguje len s prístrojom, ktorý ho stláča. Ak začneme piest púšťať, plyn sa bude rozpínať cez rovnaké hodnoty objemu, tlaku a teploty, ako keď sme ho stláčali. Z toho vyplýva, že tiež bude konať rovnakú prácu, akú sme pred tým my konali na neho. Ak teda máme kvalitné alternátory, po spätnom rozpínaní si späť uložíme rovnakú prácu a celý systém sa vráti do pôvodného stavu.

*Izotermický proces* je taktiež vratný, ale okrem práce je v kontakte s tepelným rezervoárom, ktorému (pri stláčaní) odovzdáva teplo. Rovnaké teplo pretečie späť pri rozpínaní: opäť totiž tlak, teplota aj plyn kopírujú rovnaké hodnoty po ceste tam aj po ceste späť, teda konáme rovnakú prácu, vnútorná energia je konštantná a teda teplo musí byť tiež v oboch prípadoch rovnaké (len ide opačnými smermi).

Ako môže byť niečo nevratné? Najprv si musíme premyslieť, ako by sme realizovali napríklad *izochorický proces*. Keďže prácu nemôžeme konať, môžeme len dodávať alebo odberať teplo. Na dodávanie tepla máme v podstate dva spôsoby: rozpochybovanie molekúl v plyne (žiarovkou, vrtulou) alebo priložením plynu ku teplejšiemu telesu. Odoberanie tepla vieme realizovať len kontaktom s chladnejším telesom.

A práve tu sa skrýva nevratnosť: ak chceme zvrátiť to, že sme plynu pridali teplo z nejakého telesa, odoberieme ho do chladnejšieho telesa. Plyn sám o sebe pôjde tam aj späť po rovnakej ceste, ale ostatné telesá už nie. Na konci takéhoto pokusu o opačný proces totiž skončilo nejaké teplo pôvodne z teplejšieho telesa v tom chladnejšom. Odtiaľ ho na teplejšie teleso (bez použitia zase ďalších zariadení) nedostaneme.

To ale nie je koniec: aj výmenu tepla vieme urobiť vratnú. Stačí na to použiť veľa telies za sebou. Nech ich teploty rastú od  $T_0$  do  $T_1$  a z každého (okrem prvého, ktorý má rovnakú teplotu ako plyn) preniesieme teplo  $\Delta Q$  pri konštantnom objeme plynu. Takto zohrejeme plyn z  $T_0$  na  $T_1$ , pričom teplo sme si postupne vypožičali od všetkých týchto telies. Ak chceme ísť späť, musíme začať na predposlednom telese (pretože to najteplejšie teleso už plyn neochladí), a teplo  $\Delta Q$  postupne prenášať späť do telies. Takto sa nakoniec plyn vráti izochoricky do pôvodného stavu. Takisto sa vráti do pôvodného stavu všetky rezervoáry, okrem prvého a posledného: z posledného sme preniesli teplo  $\Delta Q$  do toho prvého (nakreslite si!). Túto nevratnosť ale vieme urobiť ľubovoľne malú: čím viac telies, tým menšie  $\Delta Q$ .

Ak si teda počíname šikovne, aj izochorický proces vieme urobiť vratne. Nevratný by bol vtedy, ak by sme teplo dodávali len z jedného rezervoáru, alebo napríklad žiarovkou.

Podobne to funguje aj pre *izobarický proces*: tiež pri ňom musíme brať teplo a tým zväčšovať objem. Realizujeme ho napríklad tak, že zohrievame s povoleným piestom, aby sa udržal konštantný tlak. Na rozdiel od predchádzajúceho prípadu si môžeme uložiť nejakú prácu, ktorú koná plyn pri rozpínaní, a použiť ju na stláčanie. Stále ale potrebujeme tepelné rezervoáre na rôznych teplotách; pri použití len dvoch rezervoárov by bol proces nevratný, pri použití rady rezervoárov vratný.

Máme teda ponaučenie: *vratnosť procesu* vyžaduje, aby sme sa pozreli na všetky systémy, ktoré sa procesuúčastnia – nie len plyn, ale aj rezervoáre.

Systém, ktorý zo systému berie prácu a dokáže ju späť konať, sa niekedy nazýva rezervoár práce. Môžeme si ho predstaviť ako motor, dynamo a elektrickú batériu, pričom nedokonalá účinnosť je spôsobená len inžinierskymi problémami a v princípe môže byť odstránená. Dôležitý rozdiel voči teplotnému rezervoáru je to, že batéria si môže vratne vymieňať energiu s ľubovoľným systémom. Rezervoár tepla, na druhú stranu, potrebuje systém s rovnakou teplotou, inak bude najprv teplo tiecť samovoľne na chladnejší systém. Táto vlastnosť tepla (ktorá je dôsledkom mechaniky molekúl) ho vylučuje ako veličinu, ktorej tok môže byť nevratný.

b) Spočítame si z funkcie

$$T(p, V) = \frac{pV}{nR}$$



Tab. 6: Výpočet zmien teploty

%	$\Delta p$	$\Delta V$	$T_{,p}\Delta p + T_{,V}\Delta V$	$T(p + \Delta p, V + \Delta V) - T(p, V)$
10 %	10 kPa	2,21	53 K	56 K
1 %	1 kPa	0,221	5,29 K	5,32 K
0,1 %	100 Pa	0,0221	529,2 mK	529,5 mK

najprv koeficienty

$$T_{,p}(p, V) = \frac{V}{nR} \doteq \frac{0,022}{1 \cdot 8,31} \text{ K} \cdot \text{Pa}^{-1} \doteq 2,65 \text{ K} \cdot \text{kPa}^{-1},$$

$$T_{,V}(p, V) = \frac{p}{nR} \doteq \frac{100\,000}{1 \cdot 8,31} \text{ K} \cdot \text{m}^{-3} \doteq 12 \text{ K} \cdot \text{l}^{-1}$$

a už len dosadíme. Výsledky sú zapísané v tabuľke 6. Pri niektorých hodnotách v tabuľke sme použili priveľa cifier (zadané veličiny by diktovali použiť tak 2 cifry). Je to preto, lebo porovnáваме matematický efekt zanedbania, nie skutočné fyzikálne výsledky. S presnosťou na dve platné cifry by sme pri zmene o 1 % a menej ani nevideli rozdiel.

c) d gymnastika:

- Dôkaz  $d[Cf(x)] = C d[f(x)]$  je jednoduchý: pri zmene  $x$  o  $dx$  sa  $f(x)$  zmení o

$$d[f(x)] = f(x + dx) - f(x).$$

Vynásobením tejto rovnice  $C$  dostaneme to, čo hľadáme

$$Cd[f(x)] = Cf(x + dx) - Cf(x).$$

Ľavá strana je zmena  $f(x)$  krát  $C$ , pravú môžeme chápať aj ako zmenu  $Cf(x)$ .

- Rozvinieme

$$(x + dx)^2 = x^2 + 2x dx + (dx)^2 = x^2 + 2x dx.$$

Pripomeňme si, že  $d(x^2)$  je zmena  $x^2$  pri zmene o  $dx$ , teda druhý člen v rozvoji, ktorý sme práve spočítali

$$d(x^2) = 2x dx.$$

Pre  $d(x^3)$  by sme mohli postupovať rovnako, ale už vôbec nebudeme písať členy s vyššou akou prvou mocninou  $dx$ . Také sú len dva

$$(x + dx)^3 = x^3 + 3x^2 dx,$$

ako sa ľahko presvedčíte z roznásobovania  $(x + dx)(x + dx)(x + dx)$ . Dostávame

$$d(x^3) = 3x^2 dx.$$

- Najprv použijeme trik zo zadania

$$\frac{1}{x + dx} = \frac{x - dx}{x^2 - (dx)^2} = \frac{x - dx}{x^2}$$

a už len odčítame  $1/x$

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x + dx} - \frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}.$$

- Rozpíšeme

$$\sin(\vartheta + d\vartheta) = \sin \vartheta \cos d\vartheta + \sin d\vartheta \cos \vartheta = \sin \vartheta + \cos \vartheta d\vartheta$$

a rovno vidíme

$$d(\sin \vartheta) = \cos \vartheta d\vartheta.$$

- Tu použijeme sčítavaciu vlastnosť logaritmu  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$  na

$$\ln(x + dx) = \ln\left[x\left(1 + \frac{dx}{x}\right)\right] = \ln x + \ln\left(1 + \frac{dx}{x}\right) = \ln x + \frac{dx}{x}.$$

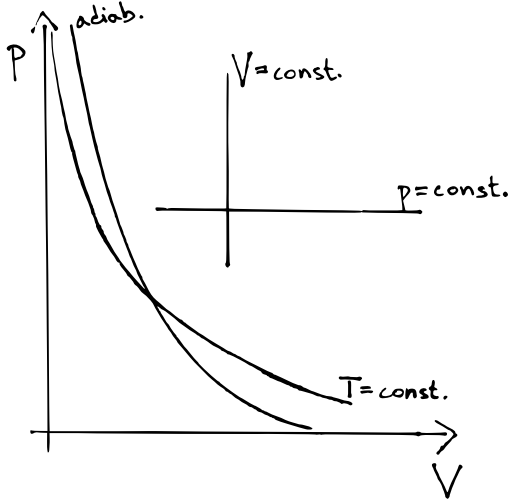
- d) Ak porovnáme proces pri konštantnom tlaku a objeme, tak pri rovnakom zvýšení teploty narastú v oboch prípadoch rovnako aj vnútorné energie. Pri konštantnom tlaku sa ale trochu zväčší objem plynu, pri čom plyn vykoná prácu. Zo zákona zachovania energie vieme, že teplo dodané pri izobarickom deji teda musí obsahovať navyše aj energiu použitú na konanie práce, a teda izobarická tepelná kapacita je väčšia.

### Úloha III.S ... entropická

- a) Všetchny stavy ideálneho plynu umíme nakresliť do rôznych diagramů:  $pV$  diagram,  $pT$  diagram a tak ďalej. Na svislou osu sa vynáša prvá veličina, na vodorovnú osu sa vynáša druhá veličina. Každý bod tedy určuje dva parametry.

*Náčrtněte do  $pV$  diagramu čtyři děje s ideálním plynem, které znáte. Udělejte to samé pro  $Tp$  diagram. Jak by vypadal  $UT$  diagram? Vysvětlete, jak se nevhodnost těchto dvou proměnných projeví na tomto obrázku.*

- b) Jaké jednotky má entropie? Jaké jiné veličiny s těmito jednotkami znáte?  
 c) V seriálu jsme rozebrali případ nárůstu entropie, když plyn přijímal teplo. Proveďte obdobnou úvahu pro plyn odevzdávající teplo.  
 d) Víte, že při adiabatickém ději se entropie nemění. Proto entropie jako funkce objemu a tlaku  $S(p, V)$  může obsahovat jen takovou kombinaci objemu a tlaku, která se též nemění při adiabatickém procesu. Jaký je to výraz? Nakreslete do  $pV$  diagramu (svislá osa je  $p$ , vodorovná  $V$ ) křivky, na nichž je entropie konstantní. Souhlasí výsledek této úvahy se vzorcem, který jsme pro entropii odvodili?


 Obr. 42:  $pV$  diagram a načrtnuté procesy

e) Vyjádřete entropii ideálního plynu jako funkci  $S(p, V)$ ,  $S(T, V)$ , a  $S(U, V)$ .

- a)  $pV$  diagram je dobře známý. Pre izotermický proces je konštantné  $pV$ , kreslíme teda hyperbolu. Pri adiabate je  $p \propto 1/V^\kappa$ ,  $\kappa > 1$ , teda<sup>2</sup> v porovnaní s izotermou rýchlejšie klesá do nuly pre väčšie  $V$ , no pre malé objemy je tlak ešte väčší. Celkovo je teda adiabata *strmšia* ako izoterma. V  $TP$  diagrame sú izotermický a izobarický proces veľmi jednoduché, sú to vodorovná a zvislá čiara. Izochorický proces spĺňa  $T = Vp/(nR)$ , alebo  $T \propto p$ . Ide teda o priamku prechádzajúcu nulou tlaku a objemu. Adiabatický proces vyžaduje trochu počítania. Po dosadení do  $pV^\kappa$  za objem dostaneme, až na konštanty,  $p^{1-\kappa}T^\kappa$ , čo po umocnení na  $1/\kappa$  dá

$$p^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} T.$$

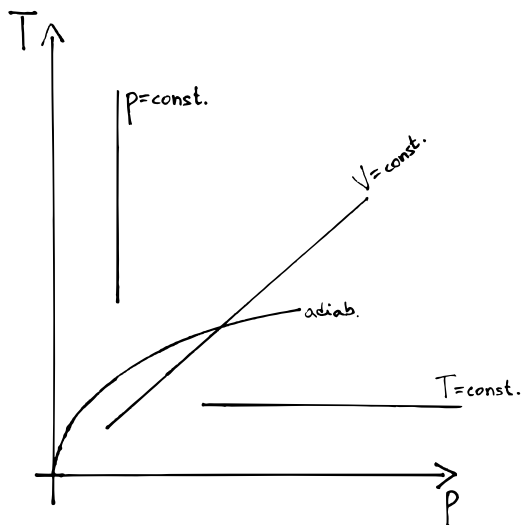
Toto sa počas adiabatického procesu nemení, teda platí  $T \propto p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$ , alebo

$$T \propto p^{\frac{2}{s+2}}.$$

Pre jednoatómový plyn je  $s = 3$  a  $2/(s+2) = 0,4$ , pre dvojatómový plyn máme  $s = 5$  a  $2/(s+2) \doteq 0,29$ .

Na  $UT$  diagrame vieme znázorniť všetky stavy, no nie jednoznačne! Kvôli zvláštnosti ideálneho plynu totiž pri konštantnej teplote nezávisí vnútorná energia na

<sup>2</sup>Symbol  $\propto$  sa číta *úmerný*.  $p \propto 1/V$  znamená, že existuje taká konštantna  $A$ , že  $p = A/V$ .


 Obr. 43:  $Tp$  diagram a načrnuté procesy

tlaku či objemu. Všetky stavy ideálneho plynu sa teda scvrknú na priamku  $U = snRT/2$ , deje budú podmnožinami tejto priamky. Špeciálne izotermický dej bude len jeden bod.

- b) Jednotky entropie ľahko vidíme zo vzťahu

$$dS = \frac{\delta Q}{T},$$

je to  $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ , alebo v SI  $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ . Rovnakú jednotku má aj (nie merná) tepelná kapacita a tiež Boltzmannova konštanta  $k_B$ .

- c) Pozrieme sa na nevratný izobarický, či izochorický proces. Pri izotermickom a adiabatickom (ak sú realizované vratne) sa entropia nemení. Máme preskúmať prípad, keď plyn odovzdáva teplo, teda  $\delta Q < 0$ . Teplota plynu musí byť vyššia ako teplota rezervoáru,  $T_{\text{plyn}} > T_{\text{rez}}$ . Zmena entropie je, rovnako ako pri prijímaní tepla

$$dS_{\text{celk}} = dS_{\text{plyn}} + dS_{\text{rez}} = \delta Q/T_{\text{plyn}} - \delta Q/T_{\text{rez}} = (T_{\text{rez}} - T_{\text{plyn}}) \frac{\delta Q}{T_{\text{plyn}} T_{\text{rez}}}.$$

Tu máme súčin dvoch záporných veličín: rozdielu  $T_{\text{rez}} - T_{\text{plyn}}$  a  $\delta Q$ , teda entropia opäť rastie.

- d) Pri adiabatickom procese sa nemení  $pV^\kappa$ , na  $pV$  diagrame miesta s konštantnou entropiou sú práve adiabaty, aké sme kreslili v prvej podúlohe. Stačí sa teda pozrieť, aká kombinácia  $p$  a  $V$  vystupuje v  $S(p, V)$  (toto vezmeme z nasledujúcej podúlohy)

$$S(p, V) = \frac{s}{2} nR \ln \left( \frac{pV^\kappa}{Rn^\kappa} \right) + nR s_0.$$

Skutočne, entropia závisí na tlaku a objeme len cez  $pV^\kappa$  a všetko spolu súhlasí.  
 e) Tvar  $S(T, V)$  máme už zo seriálu

$$S(T, V) = nR \ln \left( \frac{T^{\frac{s}{2}} V}{n} \right) + nRs_0.$$

Eliminovaním teploty pomocou  $nRT = pV$  dostaneme

$$S(p, V) = nR \ln \left( \frac{(pV)^{\frac{s}{2}} V}{n(nR)^{\frac{s}{2}}} \right) + nRs_0.$$

Celý argument logaritmu upravíme ako niečo na  $s/2$ , takže dostaneme

$$S(p, V) = nR \ln \left( \frac{pV^{\frac{s+2}{s}}}{Rn^{\frac{s+2}{s}}} \right)^{\frac{s}{2}} + nRs_0 = \frac{s}{2} nR \ln \left( \frac{pV^\kappa}{Rn^\kappa} \right) + nRs_0,$$

kde sme si spomenuli na definičný vzorec pre  $\kappa$

$$\kappa = \frac{s+2}{s}.$$

Dosadiť za teplotu z kalorickej rovnice je tiež jednoduché

$$S(U, V) = nR \ln \left( \frac{U^{\frac{s}{2}} V}{n(\frac{s}{2}nR)^{\frac{s}{2}}} \right) + nRs_0.$$

Po vyňatí exponentu vieme tento výraz upraviť na

$$S(U, V) = \frac{s}{2} nR \ln \left( \frac{UV^{\frac{2}{s}}}{\frac{s}{2}Rn^{\frac{s+2}{s}}} \right) + nRs_0 = \frac{s}{2} nR \ln \left( \frac{UV^{\kappa-1}}{\frac{s}{2}Rn^\kappa} \right) + nRs_0.$$

## Úloha IV.S ... pracovní

a) Z nerovnosti

$$\Delta S_{\text{tot}} \geq 0$$

ze seriálu vyjádřete  $W$  a odvoďte tak nerovnost pro práci

$$W \leq Q \left( 1 - \frac{T_C}{T_H} \right).$$

b) Vypočítejte účinnost Carnotova cyklu bez použití entropie.

Pomůcka: Napište čtyři rovnice spojující čtyři vrcholy Carnotova cyklu

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \quad p_2 V_2^\kappa = p_3 V_3^\kappa, \quad p_3 V_3 = p_4 V_4, \quad p_4 V_4^\kappa = p_1 V_1^\kappa$$

a vynásobte je všechny čtyři spolu. Po úpravě dostanete

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Dále stačí použít vzorec pro práci při izotermickém procesu: pokud jde proces z objemu  $V_A$  do  $V_B$ , práce vykonaná na plynu je

$$nRT \ln \frac{V_A}{V_B}.$$

Teď si už jen stačí uvědomit, že práce při izotermickém ději je rovna teplu (se správným znaménkem) a vypočítat získanou práci (vzpomeňte si, že adiabatické procesy nepřispívají) a odevzdané teplo. Jako řešení stačí doplnit detaily tohoto postupu.

- c) Minule jste pracovali s  $pV$  a  $Tp$  diagramem. Proveďte podobné cvičení s  $TS$  diagramem, tedy nakreslete do něj izotermický, izobarický, izochorický a adiabatický proces. Nakreslete do diagramu též cestu plynu v Carnotově cyklu a označte správně směr a vrcholy, aby souhlasily s obrázkem v seriálu.
- d) V seriálu jsme zmínili, že někdy je třeba dávat pozor na přijaté a odevzdané teplo. Někdy se totiž to, zda teplo přijímáme anebo dáváme, mění během procesu. Jedním z příkladů je proces

$$p = p_0 e^{-\frac{V}{V_0}},$$

kde  $p_0$  a  $V_0$  jsou konstanty. Určete, pro jaké hodnoty  $V$  (při rozpínání) proudí teplo do plynu, a kdy z plynu.

- a) Vyjdeme teda zo vzťahu

$$\Delta S_{\text{tot}} = \frac{-Q}{T_H} + \frac{Q - W}{T_C}.$$

Vieme, že  $\Delta S_{\text{tot}} \geq 0$ , teda

$$\frac{-Q}{T_H} + \frac{Q - W}{T_C} \geq 0.$$

Prevedieme člen s  $W$  na druhú stranu

$$Q \left( \frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_H} \right) \geq \frac{W}{T_C}$$

a vynásobíme kladným  $T_C$ , takže dostávame

$$W \leq Q \left( 1 - \frac{T_C}{T_H} \right).$$

b) Ak vynásobíme všetky tieto rovnice zo zadania, dostaneme

$$p_1 p_2 p_3 p_4 V_1 V_2^\kappa V_3 V_4^\kappa = p_1 p_2 p_3 p_4 V_2 V_3^\kappa V_4 V_1^\kappa,$$

čo upravíme na

$$V_2^{\kappa-1} V_4^{\kappa-1} = V_1^{\kappa-1} V_3^{\kappa-1}$$

a ďalej na

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Vieme, že pri oboch adiabatických procesoch sa vôbec neprenáša teplo; keď teda uvážime, že vnútorná energia sa nemení pri izotermických procesoch, zistíme, že práca pri prvom je rovná práci pri druhom, ale s opačným znamienkom. Do účinnosti teda tieto procesy neprispievajú (ale sú dôležitým tým, že menia teplotu). Plyn teda naberie teplo  $Q_H$  pri prvom rozpínaní na teplote  $T_H$ : toto teplo spočítame ako opačnú prácu (pretože zmena vnútornej energie v tomto procese je nula)

$$Q_H = nRT_H \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Znamienko je tu správne, pri rozpínaní plyn prijíma teplo a koná prácu (práca by bola so znamienkom mínus, bola by záporná). Rovnako spočítame aj teplo, ktoré plyn „dostane“ pri izotermickom stlačovaní na teplote  $T_C$ , čo je proces  $3 \rightarrow 4$ :

$$Q_C = nRT_C \ln \frac{V_4}{V_3} = -nRT_C \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Tu nastáva kompresia, teda  $V_4 < V_3$  a dostaneme  $Q_C < 0$ , čo je správne. Zo zákona zachovania energie vieme spočítať získanú prácu ako rozdiel prijatého a odovzdaného tepla, s našimi znamienkami to bude

$$W = Q_H + Q_C.$$

Tu  $W$  je už extrahovaná práca (práca plynu by bola  $-W$ ). Účinnosť vypočítame ako pomer „užitočného a drahého“, teda

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = 1 + \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{nRT_C \ln \frac{V_2}{V_1}}{nRT_H \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_C}{T_H}.$$

c) Izotermický a adiabatický (izoentropický) proces sú opäť veľmi jednoduché. Na izochorický proces budeme potrebovať vyjadrenie entropie z tretieho seriálu

$$S(T, V; n) = nR \ln \left( \frac{T^{s/2} V}{n} \right) + nR s_0.$$

Odtiaľ vyjadríme  $T(S)$ :

$$S = nR \ln \left( \frac{V}{n} \right) + nR s_0 + \frac{s}{2} nR \ln T,$$

osamostatníme  $\ln T$

$$\ln T = \frac{S}{\frac{s}{2}nR} - \frac{2}{s}s_0 - \frac{2}{s} \ln\left(\frac{V}{n}\right)$$

a zrušíme logaritmus

$$T = \left(\frac{V}{n}\right)^{-\frac{2}{s}} e^{-\frac{2}{s}s_0} e^{\frac{2S}{snR}}.$$

Do grafu teda pri konštantnom objeme kreslíme exponenciály, pričom konštanta pred exponenciálou klesá s rastúcim objemom. Izobaru vyjadríme podobne, len najprv dosadíme za  $V$

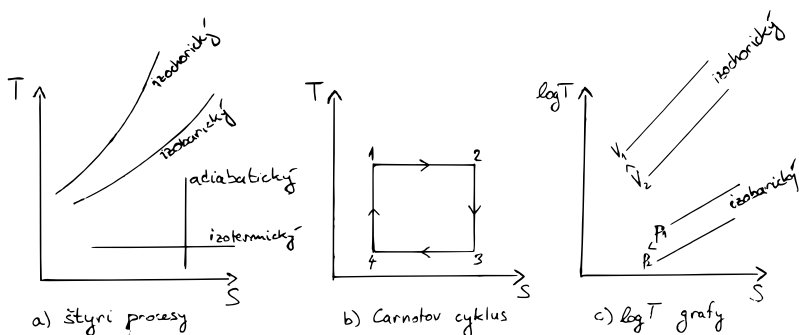
$$S(T, p; n) = nR \ln\left(\frac{T^{s/2}RT}{p}\right) + nRs_0.$$

Podobným postupom ako pre izochorický proces dostaneme

$$T = \left(\frac{p}{R}\right)^{\frac{2}{s+2}} e^{-\frac{2}{s+2}s_0} e^{\frac{2S}{(s+2)nR}}.$$

Ide teda o menej strmú exponenciálnu závislosť, konštanta pred exponenciálou naopak rastie s tlakom. Všetky štyri procesy sú zakreslené do grafu a) na obrázku 44. Aby sme lepšie znázornili rozdiel týchto závislostí, nakreslíme izochorický a izobarický dej aj do  $[\log T]S$  diagramu, kde pôjde o priamky, viz graf c).

Carnotov cyklus začína na vysokej teplote. Odtiaľ izotermicky expanduje a jeho entropia sa zvyšuje. Ďalej adiabaticky expanduje ďalej, čím sa jeho teplota znižuje, po čom sa opäť v dvoch krokoch vráti späť. Spolu teda dostaneme obdĺžnik, ako na grafe b).



Obr. 44:  $TS$  diagram a  $[\log T]S$  diagram



- d) To, či plyn teplo odovzdává nebo přijíma, lahko určíme podľa znamienka  $\delta Q = dU + pdV$ . Ak ešte vyjadríme  $dU = d(\frac{s}{2}pV) = \frac{s}{2}Vdp + \frac{s}{2}pdV$ , môžeme písať

$$\delta Q = \frac{s}{2}Vdp + \left(\frac{s}{2} + 1\right)pdV.$$

My máme zadané, ako sa mení tlak s objemom. Teda malé zmeny tlaku závisia od malých zmien objemu. To spočítame jednoducho pomocou

$$dp = d\left(p_0 e^{-\frac{V}{V_0}}\right) = -p_0 e^{-\frac{V}{V_0}} \frac{dV}{V_0},$$

čo vieme ešte šikovne prepísať na

$$dp = -p \frac{dV}{V_0}.$$

Ak všetko dosadíme do vzťahu pre  $\delta Q$ , dostaneme

$$\delta Q = -\frac{s}{2}Vp \frac{dV}{V_0} + \left(\frac{s}{2} + 1\right)pdV = \left(\frac{s}{2} + 1 - \frac{s}{2} \frac{V}{V_0}\right)pdV$$

Vidíme, že pre malé objemy je  $\delta Q > 0$  a plyn teplo pri expanzii ( $dV > 0$ ) prijíma. To platí až do bodu, kde je  $\delta Q = 0$ , čo je pre

$$V = \frac{s+2}{s}V_0 = \kappa V_0.$$

Do objemu  $\kappa V_0$  bude plyn pri expanzii teplo prijímať, pre väčší objem naopak odovzdávať.

## Úloha V.S ... prirodzeně proměnná

- a) Použijte vztah pro entropii ideálního plynu  $S(U, V, N)$  z řešení třetí seriálové úlohy

$$S(U, V, N) = \frac{s}{2}nR \ln \left( \frac{UV^{\kappa-1}}{\frac{s}{2}Rn^\kappa} \right) + nRs_0.$$

a vztah pro změnu entropie

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN$$

a vypočítejte chemický potenciál jako funkci  $U$ ,  $V$  a  $N$ . Upravte dále na funkci  $T$ ,  $p$  a  $N$ .

Pomůcka: Přčtete si o derivacích a malých změnách v druhém díle seriálu. Nyní by už mělo být zřejmější, že koeficienty jako  $1/T$  před  $dU$  spočítáte jako parciální derivaci  $S(U, V, N)$  podle  $U$ . Nezapomeňte na užitečný vztah  $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$  a že  $n = N/N_A$ .

Bonus: Vyjádřete tímto způsobem i teplotu a tlak jako funkce  $U$ ,  $V$  a  $N$ . Eliminujte závislost tlaku na  $U$ , abyste dostali stavovou rovnici.

b) Je chemický potenciál ideálního plynu kladný, nebo záporný ( $s_0$  považujte za zanedbatelné)?

c) Co se bude dít s plynem v pístu, pokud je plyn napojený na rezervoár s teplotou  $T_r$ ? Píst se může volně pohybovat a z druhé strany na něj nic nepůsobí. Popište, co se bude dít, pokud dovolíme jen kvazistatické procesy. Kolik práce takto dokážeme extrahovat? Platí, že se takto minimalizuje volná energie?

Pomůcka: Na výpočet práce se vám může hodit vztah

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln \frac{b}{a}.$$

d) Entalpii jsme v seriálu definovali jako  $H = U + pV$ , Gibbsovu energii jako  $G = U - TS + pV$ . Jaké jsou přirozené proměnné těchto potenciálů? Jaké termodynamické veličiny dostaneme derivacemi těchto potenciálů podle svých přirozených proměnných?

e) Vypočítejte změnu grandkanonického potenciálu  $d\Omega$  z jeho definičního vztahu  $\Omega = F - \mu N$ .

1. Vypočítáme nejprv bonus, protože je jednodušší! Chceme parciálně derivovat  $S$  podle  $U$ , tak dostaneme  $1/T$ . Využijeme, že  $\ln(\dots)$  zo vztahu pre  $S(U, V, N)$  vieme napísať ako

$$\ln(U) + \text{členy, ktoré na } U \text{ nezávisia.}$$

Pred nimi stojí ešte faktor  $snR/2$ , ktorý na  $U$  tiež nezávisí, teda pri derivovaní všetky tieto ďalšie členy vypadnú. Ostáva teda len

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S(U, V, N)}{\partial U} = \frac{s}{2} nR \frac{\partial}{\partial U} \ln U = \frac{s}{2} nR \frac{1}{U}.$$

To je ale kalorická rovnica  $U = snRT/2$ .

Podobne pre  $V$ ,  $\ln(\dots)$  zo vztahu pre  $S(U, V, N)$  rozpíšeme ako

$$\ln(V^{\kappa-1}) + \text{členy, ktoré na } V \text{ nezávisia.}$$

Znova, po derivovaní ostane len derivácia tohoto člena a ešte si spomenieme na  $\ln(V^{\kappa-1}) = (\kappa - 1) \ln V$  a počítame

$$\frac{p}{T} = \frac{\partial S(U, V, N)}{\partial V} = \frac{s}{2} nR (\kappa - 1) \frac{\partial}{\partial V} \ln V = \frac{s}{2} nR (\kappa - 1) \frac{1}{V}.$$

Pretože  $\kappa = 1 + 2/s$ ,  $\kappa - 1$  sa vykrátí s  $s/2$  a ani nemusíme odstraňovať  $U$  (týmto sa ospravedlňujem za zavádzanie v zadání), dostávame rovno stavovú rovnicu

$$\frac{p}{T} = \frac{nR}{V}.$$

Nakoniec vypočítajme  $\mu$ . Derivovanie podľa  $N$  je trochu náročnejšie, pretože sa vyskytuje aj pred logaritmom. Najprv nahradíme všetky  $n$  za  $N/N_A$  a použijeme aj  $R = N_A k_B$

$$S(U, V, N) = \frac{s}{2} N k_B \ln \left( \frac{UV^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} R N^\kappa N_A^{-\kappa}} \right) + N k_B s_0.$$

Pomocou pravidla o derivovaní súčinu môžeme počítať

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(U, V, N)}{\partial N} &= \frac{s}{2} k_B \ln \left( \frac{UV^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} R N^\kappa N_A^{-\kappa}} \right) + \\ &+ \frac{s}{2} N k_B \frac{\partial}{\partial N} \ln \left( \frac{UV^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} R N^\kappa N_A^{-\kappa}} \right) + k_B s_0, \end{aligned}$$

kde už pri derivácii logaritmu môžeme použiť trik s rozdelením na  $\ln(N^{-\kappa})$  plus členy bez  $N$ . Takto dostávame

$$-\frac{\mu}{T} = \frac{\partial S(U, V, N)}{\partial N} = \frac{s}{2} k_B \ln \left( \frac{UV^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} R N^\kappa N_A^{-\kappa}} \right) - \frac{s}{2} \kappa k_B + k_B s_0,$$

teda

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{s}{2} k_B T \left[ \ln \left( \frac{UV^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} R n^\kappa} \right) - \kappa + \frac{2}{s} s_0 \right] = \\ &= -\frac{U}{N} \left[ \ln \left( \frac{UV^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} R n^\kappa} \right) - \kappa + \frac{2}{s} s_0 \right] \end{aligned}$$

Už len dosadíme za  $U$  a  $V$  do prvého vyjadrenia. Po chvíli upravovania dostaneme

$$\mu = -\frac{s}{2} k_B T \left[ \ln \left( \frac{T^\kappa}{p^{\kappa-1}} \right) + s_1 \right],$$

kde sme do  $s_1$  zahrnuli konštanty  $2s_0/s$ ,  $-\kappa$  a aj konštantné členy z logaritmu. Takýto výraz ešte vieme upraviť

$$\begin{aligned} \mu &= -k_B T \left[ \frac{s}{2} \kappa \ln T - \frac{s}{2} (\kappa - 1) \ln p + s_1 \right] = \\ &= -k_B T \left[ \left( \frac{s}{2} + 1 \right) \ln T - \ln p + s_1 \right]. \end{aligned}$$

2. To, že  $s_0$  je zanedbateľné, nie je úplne presná formulácia. Táto konštanta totiž v sebe musí obsahovať aj jednotky, a to dokonca ich logaritmus.<sup>3</sup> Dobrý spôsob, ako malosť  $s_0$  interpretovať, je jednoducho si povedať, že pre normálne podmienky je vnútorná energia aj tlak veľký a teda logaritmus  $\ln$  vo vzťahu

$$\mu = -\frac{U}{N} \left[ \ln \left( \frac{UV^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} R n^\kappa} \right) - \kappa + \frac{2}{s} s_0 \right]$$

bude dosť veľký na to, aby bola hranatá zátvorka kladná. Keďže je násobená záporným číslom, celkový chemický potenciál je záporný. Ak vám to pripadá podozrivé, máte pravdu, veľkosť  $U$  a  $V$  voči  $nR$  totiž závisí na jednotkách. Vedzte, že chemický potenciál skutočne je záporný a prečítajte si komentár v seriáli.

To, že je chemický potenciál záporný, má fyzikálnu interpretáciu s pomocou štatistickej fyziky. Chemický potenciál je nárast vnútornej energie pri pridaní jednej častice, ak zachováme entropiu a objem. Entropiu v štatistickej fyzike počítame ako logaritmus počtu stavov s rovnakou energiou. Látka s väčším počtom častíc bude mať vo všeobecnosti väčšiu entropiu: Energiu rozdelujeme medzi viac častíc, máme teda viac možností ako ju rozdeliť.

Na druhú stranu, ak znížime energiu, entropia klesne (to vidíte i vo vzťahu  $S(U, V, N)$ ). Ak teda chceme pri pridaní častice zachovať entropiu, musíme znížiť energiu, a to práve pridaním  $\mu < 0$ .

3. Plyn sa bude samozrejme rozpínať do nekonečna. Ak povolíme len kvázistatické procesy, pohyb piestu bude veľmi pomalý, no keďže z vonka nič nepôsobí, plyn sa bude rozpínať stále. Energiu na to potrebnú bude odoberať z rezervoáru. Pri kvázistatickom procese bude teplota plynu konštantná, teda platí

$$p = \frac{nRT_r}{V}.$$

Prácu, ktorú vykoná plyn pri rozpínaní z  $V_0$  na  $V_1$ , ľahko spočítame ako

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p(V) dV = nRT_r \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V} dV = nRT_r \frac{V_1}{V_0}.$$

Pri rozpínaní do nekonečna teda práca rastie nad všetky medze, a to rýchlosťou logaritmu objemu. Čo robí voľná energia? Zaujímá nás iba člen s  $V$ , ktorý vieme izolovať ako

$$F(T_r, V, N) = -nRT_r \ln V + \text{členy bez } V.$$

Zo seriálu vieme, že práca získaná zo systému v kontakte s tepelným rezervoárom je rovná poklesu Helmholtzovej voľnej energie, platí  $dW = -dU_{\text{total}} = -dF$ . To ale súhlasí s našim výpočtom. Zmena pri rozpínaní je

$$\Delta F = F(T_r, V_1, N) - (T_r, V_0, N) = -nRT_r \ln \frac{V_1}{V_0},$$

<sup>3</sup>Ku tomuto problému sa vrátíme v 6. dieli seriálu.

čo je práve  $-W$ . Nakoniec, môžeme povedať, že sa voľná energia minimalizuje: Keďže systém nie je nikdy v rovnováhe, stále klesá do  $-\infty$ , práve kvôli členu  $-nRT_i \ln V$ .

4. Prirodzené premenné ľahko nájdeme z  $dH$ , čo sme počítali už v seriáli

$$dH = TdS + \mu dN + Vdp.$$

Prirodzené premenné sú teda  $S, N, p$  a parciálne derivácie  $H(S, N, p)$  podľa nich nám postupne dajú  $T(S, N, p)$ ,  $V(S, N, p)$  a  $\mu(S, N, p)$ .

Podobne, pre  $G$  je

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN,$$

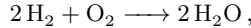
vyjadrením  $G$  v premenných  $T, p, N$ , ktoré sú prirodzené, vieme dopočítať ostatné premenné ako derivácie  $G(T, p, N)$ . Derivácia podľa  $T$  dá  $-S(T, p, N)$ , derivácia podľa  $p$  dá  $V(T, p, N)$  a derivácia podľa  $N$  dá  $\mu(T, p, N)$ .

5. Výpočet je obdobný ako pre  $dG$  či  $dH$

$$d\Omega = dF - d(\mu N) = -SdT - pdV + \mu dN - \mu dN - Nd\mu = -SdT - pdV - Nd\mu.$$

## Úloha VI.S . . . závěrečná

- a) Najdte v tabulkách nebo na internetu, jak se změní entalpie a Gibbsova energie při reakci



kde jde o přeměnu plynů na plyn a odehrává se při standardních podmínkách. Vypočítejte také, jak se změní entropie při takovéto reakci. Výsledky udávejte vztážené na jeden mol.

- b) Pro fotonový plyn platí, že tok energie skrze plochu je dán vztahem

$$j = \frac{3}{4} \frac{k_{\text{B}}^4 \pi^2}{45 \hbar^3 c^3} c T^4.$$

Dosaďte hodnoty konstant a porovnejte výsledek se Stefanovým-Boltzmannovým zákonem.

- c) Vypočítejte vnitřní energii a Gibbsovu energii fotonového plynu. Dále pomocí vnitřní energie vypočítejte závislost teploty fotonového plynu na objemu při adiabatickém rozpínání, tedy při procesu s  $\delta Q = 0$ .

Nápověda: Zákon pro adiabatický děj s ideálním plynem jsme odvodili v druhém dílu seriálu.

- d) Vezměme si fotonový plyn. Ukažte pro  $\delta Q/T$ , že pokud ho vyjádříme jako

$$\delta Q/T = f_{,T} dT + f_{,V} dV,$$

tak funkce  $f_{,T}$  a  $f_{,V}$  splňují nutnou podmínku na existenci entropie, tedy že

$$\frac{\partial f_{,T}(T, V)}{\partial V} = \frac{\partial f_{,V}(T, V)}{\partial T}.$$

1. Pozrieme sa napríklad do tabuľky 1 z termodynamických tabuliek na Chem-Wiki<sup>4</sup> Hodnoty potenciálov pre plynny H<sub>2</sub> a O<sub>2</sub> sú nula, lebo sa berú ako štandard. Pre vodnú paru máme reakčnú entalpiu a Gibbsovu voľnú energiu.

$$\Delta H_{\text{H}_2\text{O}} = -241,8 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1},$$

$$\Delta G_{\text{H}_2\text{O}} = -228,6 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}.$$

Pri reakcii sa ale vytvoria dve molekuly H<sub>2</sub>O, takže sa pri nej zmení Gibbsova energia o  $2\Delta G_{\text{H}_2\text{O}}$  a entalpia o  $2\Delta H_{\text{H}_2\text{O}}$ .

Zmenu entropie pri reakcii vieme vypočítať zo vzťahu

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$$

V našom prípade to bude (všetky hodnoty sú pri štandardných podmienkach s 25 °C)

$$\Delta S = \frac{2\Delta H_{\text{H}_2\text{O}} - 2\Delta G_{\text{H}_2\text{O}}}{T} \doteq -88,5 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}.$$

V tabuľke, odkiaľ sme prevzali hodnoty, sú dané aj hodnoty entropie:

$$S_{\text{O}_2} = 205,2 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1},$$

$$S_{\text{H}_2} = 130,7 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1},$$

$$S_{\text{H}_2\text{O}} = 188,8 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}.$$

Zmena entropie pri našej reakcii je rovná

$$\Delta S = 2S_{\text{H}_2\text{O}} - (S_{\text{O}_2} + 2S_{\text{H}_2}) \doteq -89,0 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1},$$

čo pekne súhlasí s predchádzajúcim výsledkom.

2. Stefanov-Boltzmannov zákon hovorí, že plošný tok tepla z čierneho telesa vypočítame ako

$$j = \sigma T^4,$$

kde  $\sigma \doteq 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$  je Stefanova-Boltzmannova konštanta. My by sme ju radi porovnali s konštantou zo seriálu, ktorá je rovná

$$\frac{3}{4} \frac{k_{\text{B}}^4 \pi^2}{45 \hbar^3 c^3} c.$$

Po dosadení základných konštánt skutočne dostaneme to isté číslo

$$\frac{3}{4} \frac{k_{\text{B}}^4 \pi^2}{45 \hbar^3 c^3} c = \frac{k_{\text{B}}^4 \pi^2}{60 \hbar^3 c^2} \doteq 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}.$$

Tu treba konštantny dosadzovať na štyri platné cifry, aby sme si mohli byť istí tromi ciframi vo výsledku. Taktiež takýto výpočet nemusí fungovať na

<sup>4</sup> [http://chemwiki.ucdavis.edu/Reference/Reference\\_Tables/Thermodynamics\\_Tables](http://chemwiki.ucdavis.edu/Reference/Reference_Tables/Thermodynamics_Tables)

kalkulačce, kde pretečie medzivýsledok. Preto je výhodné pozbierať mocniny 10 z  $k_B$ ,  $\hbar$  a  $c$  v jednotkách SI na papieri, dostaneme

$$\frac{(10^{-23})^4}{(10^{-34})^3 \cdot (10^8)^2} = 10^{-23 \cdot 4 + 34 \cdot 3 - 8 \cdot 2} = 10^{-6}.$$

So zvyškom si už kalkulačka ľahko poradí.

3. Poznáme voľnú energiu

$$F = -\alpha VT^4$$

a teda aj tlak  $p = \alpha T^4$  a entropiu  $S = 4\alpha VT^3$ . Pretože platí  $F = U - TS$ , vnútornú energiu vypočítame ako

$$U = F + TS = -\alpha VT^4 + 4\alpha VT^4 = 3\alpha VT^4.$$

Pre Gibbsovu voľnú energiu platí

$$G = F + pV = -\alpha VT^4 + \alpha VT^4 = 0.$$

V tomto prípade teda Gibbsova energia nie je termodynamický potenciál. To súvisí s tým, že fotónový plyn má nulový chemický potenciál a jeho stavové veličiny nezávisia na počte častíc.

Pri adiabatickom deji platí

$$0 = \delta Q = dU - \delta W = dU + pdV.$$

Ak vyjadríme  $U$  ako funkciu  $V$  a  $T$ , dostaneme

$$0 = d(3\alpha VT^4) + pdV = 3\alpha T^4 dV + 12\alpha T^3 V dT + \alpha T^4 dV.$$

Upravíme pomocou  $d \ln(x) = 1/x$  na

$$0 = 4\alpha(T^4 dV + 3T^3 V dT) = 4\alpha VT^4 \left( \frac{dV}{V} + 3 \frac{dT}{T} \right) = 4\alpha VT^4 d(\ln V + 3 \ln T)$$

Okrem nefyzikálnych stavov s nulovým objemom alebo teplotou teda musí pri adiabatickom deji platiť

$$d(\ln V + 3 \ln T) = 0.$$

Ak je zmena funkcie nulová, táto funkcia je konštantná, pri adiabatickom deji sa teda zachováva

$$\ln V + 3 \ln T = 3 \ln \left( V^{\frac{1}{3}} T \right) = \text{konst},$$

čo je ekvivalentné tomu, že teplota klesá s treťou odmocninou objemu

$$T \propto \frac{1}{\sqrt[3]{V}}.$$

Takto sa napríklad správa fotónový plyn pri rozpínaní vesmíru.

4. V predchádzajúcom bode sme vypočítali

$$\delta Q = dU - \delta W = 4\alpha T^4 dV + 12\alpha T^3 V dT.$$

Funkcie  $f_{,T}$  a  $f_{,V}$  zo zadania dostaneme vydelením  $T$

$$f_{,T} = 12\alpha T^2 V,$$

$$f_{,V} = 4\alpha T^3.$$

Vypočítame parciálne derivácie (vždy podľa tej druhej premennej)

$$\frac{\partial f_{,T}}{\partial V} = 12\alpha T^2,$$

$$\frac{\partial f_{,V}}{\partial T} = 12\alpha T^2,$$

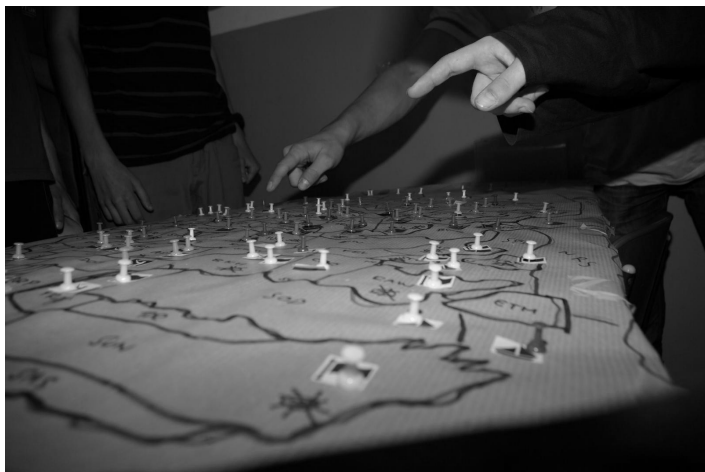
ktoré sa rovnajú. Práve vďaka tomu potom existuje entropia  $S$ . Ak chcete, skúste si overiť, že jej parciálne derivácie podľa teploty a objemu sú rovné  $f_{,T}$  a  $f_{,V}$ .





## Akce FYKOSu

### Podzimní soustředění v Hřibčím, Dolní Cerekvi



Obr. 45: Strategická hra

Podzimní soustředění proběhlo v Hřibčím, Dolní Cerekvi ve dnech 26. 9. – 4. 10. 2015.

#### *Organizátoři*

Filip Ayazi, Michal Červeňák, Veronika Dočkalová, Lubomír Grund – hlavní organizátor soustředění, Miroslav Hanzelka – pokladník, Erik Hendrych, Dominika Kalasová, Karel Kolář, Tomáš Kremel, Lukáš Ledvina, Kristína Nešporová, Michal Nožička, Petr Pecha, Aleš Podolník – hlavní organizátor soustředění, Jakub Sláma, Jakub Šafin, Lukáš Timko.

#### *Účastníci*

Alžběta Andrýsková, Jáchym Bártík, Kateřina Bartošová, Vít Beran, Martin Crhán, Filip Čermák, Jindřich Dušek, Denisa Chytilová, Ondřej Knopp, Šimon Knoška, Peter Kubaščík, Lucie Kundratová, Matěj Mezera, Václav Mikeska, Ladislav Nagy, David Němec, Matej Parada, Daniela Pittnerová, Kateřina Rosická, Viktor

Rosman, Paulína Smolárová, Štěpán Stenclák, Kateřina Stodolová, Klára Ševčíková, Přemysl Štastný, Petra Štefaníková, Ladislav Trnka, Jiří Tuháček, Veronika Ůlovcová.

### *Legenda*

V roce 281 po Aegonově příchodu byl svolán sirem Walterem Whentem do Harrenova veliký rytířský turnaj, jehož se zúčastnila veškerá honorace Západozemí. Události ale nabraly nečekaný spád, když vítěz turnaje princ Rhaegar Targaryen jmenoval královnou lásky a krásy Lyannu Starkovou místo své ženy Ellie. Následně Lyanna s Rhaegarem zmizeli neznámo kam a to vyprovokovalo jejího snoubence Roberta Baratheona k tomu, aby povstal proti královské rodině. Během následujících měsíců až let se formovala různá spolenectví, pakty se uzavíraly a rozpadaly a podoba království se měnila, až se nakonec všechny spory urovnaly a rody Baratheonů, Arrynů a Targaryenů uzavřely spolenectví, ve kterém porazili greyjoysko-tyrellskou koalici. Mír v království byl obnoven pod vládou prince Rhaegara poté, co jeho otec zemřel a Rhaegar i Robert zjistili, že je Lyanna pěkná fúrie a ve skutečnosti o ni ani jeden nestojí.

Legenda soustředění byla postavena na světě z knižní série *A Song of Ice and Fire* (známější pod názvem televizního seriálu *Game of Thrones*), ale jak ze shrnutí soustředění vyplývá, odehrávala se před jejím hlavním dějem a dopadla poněkud odlišně od předlohy. Účastníci hráli za velké rody Západozemí a svými rozhodnutími mohli ovlivňovat příběh pomocí akcí v upravené variantě hry *Diplomacie*. Během týdne jsme tak prošli od povstání ke konečné mírové dohodě. Pravidelně se konaly i odborné a populární přednášky z fyziky a navazujících oblastí informatiky a matematiky. Jeden den byl tradičně věnován experimentům, přičemž letos byla prezentace provedena podobně jako na Turnaji mladých fyziků.

### *Jarní soustředění v Lomech u Konstantinových lázní*

Jarní soustředění proběhlo v Lomech (Kokašicích) u Konstantinových lázní v okrese Tachov ve dnech 2. 4. – 10. 4. 2016. Legendou soustředění bylo *Stargate Universe*. Přinášíme vám článek o soustředění, který byl publikován v Československém časopise pro fyziku v čísle 3/2016 a který napsal Igor Bajo, účastník soustředění.

### *Organizátoři*

Filip Ayazi, Markéta Calábková, Jakub Dolejší, Petr Doležal, Lubomír Grund – hlavní organizátor soustředění, Miroslav Hanzelka, Oldřich Holcner, Dominika Kalasová, Karel Kolář, Michal Koutný, Lukáš Ledvina, Kristína Nešporová, Michal Nožička, Viktor Skoupý, Lukáš Timko.

### *Účastníci*

Alžběta Andrýsková, Igor Bajo, Jáchym Bártík, Vít Beran, Tomáš Dulava, Jindřich Dušek, Ivan Hudák, Anna Jandová, Šimon Knoška, Matůš Kopunec, Lucie



Obr. 46: Účastníci při venkovní hře

Kundratová, Jan Lindauer, Matěj Mezera, Josef Minařík, Ladislav Nagy, David Němec, Tereza Pavlišová, Daniela Pittnerová, Zuzana Richterová, Kateřina Rosická, Viktor Rosman, Jakub Smolka, Dominik Starý, Štěpán Stenclák, Kateřina Stodolová, Petr Šimůnek, Petra Štefaníková.

### Článek od Igora Baja v ČS časopise pro F

Z akčního rádia 900 km od této vesničky neoplývající ani 40 obyvateli, zasazené do malebného kraje jehličnatých lesů a pastvin, se sem sjelo na tři desítky těch nejlepších mladých fyziků, řešitelů FYKOSu. Studenti vyšších ročníků středních škol přijali pozvání na toto netradiční soustředění plné vědy, pohybu a přátelských lidí, které jim přichystali organizátoři Matfyzu a jiných, přírodním vědám nakloněných, škol. Letošní téma: „Stargate Universe“.

Ocitli jsme se v neznámém prostředí hvězdné lodě Destiny, plující pustým vesmírem nadsvětelnou rychlostí, s omezenými zásobami potravin, vody, toaletního papíru, navíc s neustále se porouchávajícími systémy a ještě k tomu na kolizní dráze s černou dírou!

To však neznamená, že si to nemůžeme i přes smrtící hrozbu užít. A také jsme si to užili! Ihned po příjezdu jsme byli rozděleni do čtyř ras: byly zde takřka nezranitelní Tokrové, přizpůsobiví a vynalézaví lidé, bojovní Jaffové a Enkarané, kteří i přes absenci jakýchkoli speciálních dovedností dokázali britkostí svých myslí a tvrdostí svých svalů svádět lité boje s ostatními frakcemi v nikdy nekončících potyčkách. . .

O jakých bojích že zde mluvíme? O takových, jež procvičí všechny aspekty vaší osobnosti! Co třeba pamatovací hra, kde na vás číhají pětaticetici-ciferná čísla, dlouhé verše klasických básní a antičtinou (abeceda mimozemské rasy, kterou bylo

psáno téměř vše a bez jejíž znalosti jste byli odsouzeni k mentální záhubě) psaná latinská přísloví? A noční orientačně-vědomostní závod, na kterém se projdete i 30 km? Nebo raději prezentujete vlastní taktiku, jak uniknout z černé díry? To vše a mnohem více jsme zažili, program byl opravdu nabitý.

Zapomeňte na budíček alarmem či křikem, Destiny vám přímo do pokoje přehraje to, co má právě ve svém playlistu, epickou symfonií počínaje křikem Křemílka konče. Hned po slastném probuzení nás čekala mentální rozcvička (samozřejmě v antičtině) plná fyziky i všedních otázek. Poté rozhýbání fyzické rozvičky, pak snídaně a hlavně – přednášky našich ochotných organizátorů. Dle našeho výběru, 3 hodiny denně, mechanikou a ledem počínaje, speciální relativitou a kvantovkou konče. Na programu nechyběly ani již zmíněné hry netradičního charakteru, a ani experimentální den, kde jsme si okusili pokusy těm školním dosti vzdálené. Jako je měření tloušťky vlasu laserem nebo stanovení hodnot Ludolfova čísla rozhazováním dřevěných špejlí. A naše výsledky jsme nakonec prezentovali před přísnou (leč spravedlivou) porotou.

Samozřejmě, že nechybělo ani sociální vyžití a navazování mezirasových kontaktů. A to v podobě tanečního večera, úvodního seznamování, závěrečného volného večera plného jídla a dojemného loučení... Dojemného loučení se mezi sebou a také se životem, neboť naše nejmilejší loď, jež nás držela celý týden při životě, se dalšího poledne chystala octnout v chřtánu černé díry a ukončit tím naši a také svou existenci.

Jediní dva členové naší posádky byli dostatečně života a reprodukce, schopní na to, aby mohli odletět do bezpečí v jediné těsné záchranné raketě, kterou Destiny disponovala. Zbytek zůstal odsouzen k děsivému konci, avšak přesto všechno jsme si uchovali optimismus a poslední večer jsme rozhodně nepromarnili! Všechny nás navíc těší, že díky extrémní gravitaci, z pohledu pozorovatelů do černé díry nikdy nespádneme a zůstaneme na věky staticky viset v prostoru, s myšlenkami na světlejší zítřky, nová dobrodružství a opětovné setkání. . .

## FYKOSí Fyziklání

Jubilejní 10. ročník FYKOSího Fyziklání se konal 12. února 2016. Byl to první ročník, kdy se nesoutěžilo jen v prostorách budov MFF UK Ke Karlovu 3 a 5, ale i v infromatické sekci na Malé Straně. Díky rozšíření prostor se mohl soutěže zúčastnit opět větší počet týmů – tento rok to bylo rekordních 105 týmů. Soutěž probíhala, jako obvykle, ve třech kategoriích. V nejvyšší kategorii A vyhrál slovenský tým *Parenica tím* složený ze žáků Gymnázia Jura Hronca a Školy pre mimoriadne nadané deti a gymnázia z Bratislavy. Je to už čtvrtý rok po sobě, co slovenský tým vyhrál celou soutěž. Druhý skončil český tým *Pupen* z Gymnázia Brno, tř. Kpt. Jaroše a na třetím místě se umístili *Transcendentní nabra* ze stejného gymnázia. V kategorii B vyhráli *Kepleráci* z Gymnázia Jana Keplera v Praze. Jen o 2 body horší byl tým *GVOZA* z Gymnázia, Velká okružná v Žiline. Oba tyto týmy předběhly 2. tým v kategorii A a umístily se tak na stupních vítězů v celkovém hodnocení. Vítězem kategorie C se stal tým *MARGAITS* z Gymnázia Grösslingova v Bratislave.



Obr. 47: Průběh soutěže

### Pravidla

Soutěže se účastní družstva s nejvýše pěti členy. Na začátku soutěže dostane každé družstvo sedm příkladů. Za úspěšně vyřešený příklad si družstvo připíše počet bodů, který závisí na počtu pokusů potřebných k jeho vyřešení. Dále si od organizátorů vyzvedne nový příklad. Samotná soutěž probíhá 3 hodiny a jejím cílem je samozřejmě získat co největší počet bodů. Přesná pravidla jsou k dispozici na webových stránkách semináře.

### Výsledky

#### Středoškoláci A

- |                         |                                     |        |
|-------------------------|-------------------------------------|--------|
| 1. Parenica tím         | G Jura Hronca + ŠpMNDaG, Bratislava | 170 b. |
| 2. Pupen                | Gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše     | 143 b. |
| 3. Transcendentní nabra | Gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše     | 133 b. |

#### Středoškoláci B

- |              |                                       |        |
|--------------|---------------------------------------|--------|
| 1. Kepleráci | Gymnázium Jana Keplera, Praha         | 146 b. |
| 2. GVOZA     | Gymnázium, Velká okružná, Žilina      | 144 b. |
| 3. ComeToWin | G Havlíčkův Brod + Masarykovo G Plzeň | 138 b. |

#### Středoškoláci C

- |                |                                    |        |
|----------------|------------------------------------|--------|
| 1. MRGAITS     | Gymnázium Grösslingova, Bratislava | 119 b. |
| 2. JD VP JD VL | Gymnázium a SOŠZE, Vyškov          | 99 b.  |
| 3. GJH C       | Gymnázium Jura Hronca, Bratislava  | 98 b.  |

*Ve výsledkové listině jsou pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je na našich webových stránkách.*



Obr. 48: Vyhlásování

## Fyziklání online

Již pátý ročník internetové soutěže Fyziklání online se konal ve středu 2. 12. 2015. Z rekordního počtu přihlášených se soutěže aktivně zúčastnilo 155 českých a slovenských týmů středoškoláků. S nimi pak dále 31 týmů zahraničních středoškoláků a 43 týmů kategorie open. Dohromady se tedy zúčastnilo 229 týmů, ve kterých soutěžilo 981 účastníků. Soutěži se tak podařilo oslovit opět o něco větší počet fyzikálních nadšenců.

Prvenství v soutěži obhájil tým *Smoluchowski's team* z kategorie open, který získal 247 bodů. I na celkově druhém místě skončil tým s podobným složením jako předchozí rok, tentokrát s názvem *FtáKopySk* a ziskem 224 bodů. Třetí místo obsadil tým *Fizzy Wizzies*, který získal 221 bodů. I tyto dva týmy soutěžily v kategorii open.

Tým *GJH17* zvítězil ve své kategorii A se ziskem 127 bodů. Zároveň se stal vítězem mezi týmy českých a slovenských středoškoláků i vítězným středoškolským týmem vůbec. Celkově se umístil na místě 16. Nejlepším týmem kategorie B, na celkovém 21. místě byl se 108 body tým *299 792 459m/s*. Kategorii C ovládl tým *MRGAITS* se ziskem 84 bodů, které stačily na celkové 34. místo. Ze středoškolských týmů ze zahraničí byl nejlepší tým *The Atomic Fireballs*, na celkové 19. místo ho vynesl zisk 111 bodů.

## Pravidla

Na začátku soutěže každý, maximálně pětičlenný, tým obdržel sedm úloh, jejichž výsledkem bylo číslo. Po zadání správného výsledku do internetového systému tým získal zadání nové úlohy. Soutěž trvala tři hodiny, přičemž v průběhu soutěže pro-

běhla také půlhodinová hurry-up část, v níž byly úlohy rozděleny do tří fyzikálních témat a vyřešení jedné úlohy od všech témat bylo hodnoceno bonusovými body. Protože se tato soutěž koná přes internet, nebyly povolené pomůcky nijak omezeny.

### Výsledky

#### Středoškoláci A

1. GJH17	127 b.
2. Kek	111 b.
3. Vířazi v Okamihu	104 b.
4. Hatalom	98 b.
5. ACHILLOVA ŽELVA	97 b.

#### Středoškoláci B

1. 299792459m/s	108 b.
2. Kepleráci	105 b.
3. The name already exists.	90 b.
4. Cornuova spirála	82 b.
5. CO JÁ VÍM	79 b.

#### Středoškoláci C

1. MRGAITS	84 b.
2. Župan	77 b.
3. GJH C 3	71 b.
4. Ichbinich	70 b.
5. Wigym1	65 b.

#### Zahraníční středoškoláci

1. The Atomic Fireballs	111 b.
2. Radley College 6.2	80 b.
3. Razbit dobitak	79 b.
4. GIHPMMG33	74 b.
5. Winglo and Co.	73 b.

#### Open

1. Smoluchowski's team	247 b.
2. FtáKopySk	224 b.
3. Fizzy Wizzies	221 b.
4. Matfyz/ETHZ PRO TEAM 1337	210 b.
5. Deccan Chargers	207 b.

*Ve výsledkové listině jsou pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je na našich webových stránkách.*

### Týden s aplikovanou fyzikou

Díky podpoře Nadace The Bakala Foundation se opět podařilo uspořádat Týden s aplikovanou fyzikou (TSAF) do zahraničí s hlavním cílem CERN a ESRF. TSAF



Obr. 49: Účastníci na úvodní přednášce v ESRF.

navazoval na Den s experimentální fyzikou, který se konal 9. listopadu 2015 a skončila příjezdem do Prahy 16. listopadu 2015. Akce proběhla formou autobusového poznávacího zájezdu a navštíveno bylo mnoho fyzikálně a technicky zajímavých cílů v Německu, Francii a Švýcarsku. TSAFu se účastnilo 40 středoškoláků a 6 vysokoškoláků. Podrobnější představu o akci si můžete vytvořit z reportu, který o ní napsala organizátorka Lýdia Janitorová<sup>1</sup>.

### *Organizátoři*

Miroslav Hanzelka, Erik Hendrych, Lýdia Janitorová, Karel Kolář, Tomáš Kremel a Marek Martaus.

### *Účastníci*

Alžběta Andrýsková, Jáchym Bártík, Kateřina Bartošová, Vít Beran, Martin Crhán, Petr Dočekal, Jindřich Dušek, Vít Horáček, Tomáš Hrbek, Petr Hrubý, Jakub Jambrich, Jiří Jarošík, Dominika Jurdová, Ondřej Knopp, Pavlína Kružíková, Václav Kubíček, Jan Lindauer, Matej Martaus, Matěj Mezera, Václav Mikeska, Ladislav Nagy, Daniel Pitoňák, Daniela Pittnerová, Jan Preiss, Zuzana Rezková, Kateřina Rosická, Viktor Rosman, Matěj Rzehulka, Dominik Starý, Kateřina Stodolová, Sára Strakošová, Denisa Svobodová, Katarína Šimková, Petr Šimůnek, Přemysl Šťastný, Martin Štyks, Jiří Tuháček, Veronika Úlovcová, Veronika Venclová a Kateřina Volková.

<sup>1</sup>Další reporty, materiály k akci a odkazy naleznete na <http://fykos.cz/rocnik29/tsaf/start>.





Obr. 50: Studentka MFF UK, Ina Chalupková (uprostřed), vysvětluje účastníkům TSAFu skladbu a princip fungování detektorů.

### *Report z TSAFu*

I tento rok se konala už tradiční akce FYKOSu–Týden s aplikovanou fyzikou. Zúčastnilo se jej 40 účastníků a 6 organizátorů. Hlavním cílem naší cesty byl CERN, Evropská organizace pro jaderný výzkum v Ženevě.

TSAFu předcházela Den sexperimentální fyzikou. V pondělních večerních hodinách začala registrace, následovala úvodní přednáška o CERNu, a potom neformální seznamování a hry.

Okolo půlnoci jsme si všichni plní očekávání sedli do autobusu a vydali se na naší cestu. První zastávkou byl Dingolfing, ve kterém se vyrábí známá značka aut, BMW. Po ní následovala exkurze po letišti v Mnichově. V tomto městě jsme přespali a strávili v něm i celý následující den, protože jsme tam navštívili jedno z největších muzeí vědy a techniky, Deutches Museum. Večer jsme si užili krásnou prohlídku města, odkad jsme se přesunuli do Olympijského areálu, kde se nacházel showroom BMW.

V noci jsme opět cestovali, abychom mohli strávit následující dopoledne ve francouzském Grenobli ve kterém sídlí synchrotron ESRF. Čtvrteční odpoledne a celý pátek jsme byli v CERNu. Měli jsme tam velmi zajímavé přednášky a exkurze po pracovištích, jako je např. Atlas, SM-18, řídicí centrum CCC, datové centrum, Mikrokosmos...

V sobotu jsme od fyzikálního programu trochu upustili, ale i přesto byl zajímavý. Nejdřív jsme navštívili sýrárnu Gruyére, kde jsme se dozvěděli, jak se vyrábí sýr a samozřejmě jsme ho i ochutnali. S ochutnávkami jsme pokračovali i ve známé čokoládovně Cailler. Večer jsme se procházeli po městě Bern.

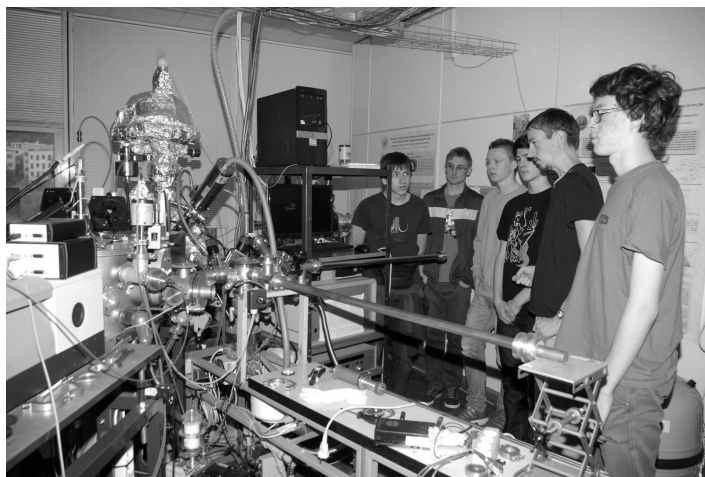
Poslední den jsme si užili v interaktivním fyzikálním centru Technorama. Pro-



Obr. 51: Den s experimentální fyzikou a Týden s aplikovanou fyzikou podpořila Nadace The Bakala Foundation.

hlédli jsme si i poslední město, Bregenz. Následoval noční přejezd až do Prahy, čímž celý TSAF skončil. Tuto akci považujeme za velmi vydařenou a doufám, že na ní všichni budou vzpomínat v dobrém.

### *Den s experimentální fyzikou*



Obr. 52: Účastníci na Dnu s experimentální fyzikou.

Den s experimentální fyzikou (DSEF) je tradiční akcí FYKOSu, která se od roku 1996 koná alespoň jednou ročně. V průběhu školního roku 2015/16 se DSEF konal jeden a to v pondělí 9. listopadu 2015 a předcházel Týdnu s aplikovanou fyzikou. Akce se tentokrát zúčastnilo 49 středoškoláků, kteří byli rozdělení do 8 skupin, které měly individuální program.

DSEF je akcí, která umožňuje středoškolákům setkat se s vědci přímo na jejich experimentálních pracovištích a zjistit, jaká špičková věda se dělá v Praze v oblasti fyziky. Akce tak může být jak motivací pro další studium fyziky, tak přímo může účastníky inspirovat k tomu věnovat se nějaké konkrétní oblasti fyziky.

DSEF tentokrát probíhal dopoledne v prostorách MFF UK v Praze v Troji (V Holešovičkách 2). Ráno se zde sešli účastníci k registraci a po krátkém úvodu se základními informacemi následovala přednáška. Účastníci si mohli vybrat jednu ze dvou přednášek a to *Data a jejich interpretace v seismologii* dr. Františka Galloviče, či *Vlny v atmosféře a GPS satelity – gravitační a planetární vlny, rozpad polárního víru a využití satelitního pozorování* doc. Petra Pišofta. Dopolední program pak pokračoval exkurzemi. Každý účastník navštívil čtyři z devíti následující pracovišť

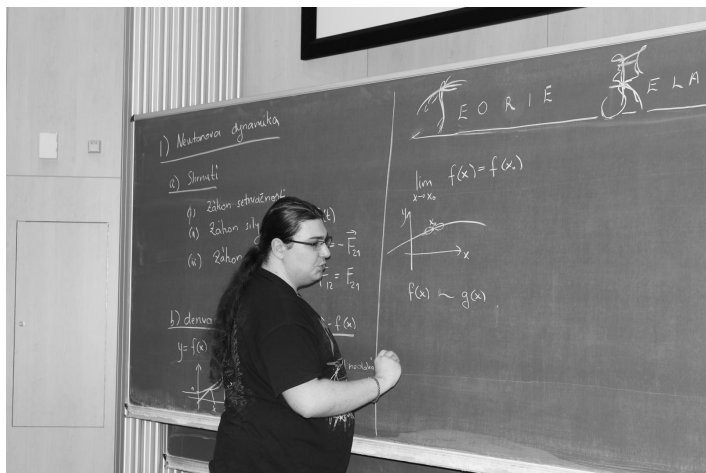
- NMR – Nukleární magnetická rezonance v magnetikách,
- NMRH – Nukleární magnetická rezonance vysokého rozlišení,
- MS – Mössbaurova spektroskopie,
- IFL – Interaktivní fyzikální laboratoř,
- Det – Křemíkové detektory částic pro CERN i jinam (praktická ukázka),
- JP – Radioaktivita kolem nás (jaderné praktikum),
- XPS – Röntgenová fotoelektronová spektroskopie (studuje složení povrchů). Praktické využití v automobilovém a chemickém průmyslu (katalyzátory),
- MATV – Metody analýzy tenkých vrstev,
- VP – Vodivé polymery.

### Cyklus přednášek pro středoškoláky



Obr. 53: Účastníci přednášky v posluchárně T1

Deset přednášek 29. ročníku semináře probíhalo od října až do května. Společně s podporou pražského výboru Fyzikální olympiády jsme se scházeli v přednáškové místnosti T1 na půdě MFF UK v Praze. Tento ročník nebyl tematicky zaměřený a pokrýval široké spektrum fyzikálních problémů.



Obr. 54: Přednáška o světle

V zimním semestru byla probírána radioaktivita (Lukáš Ledvina), harmonický pohyb (Ivo Vinklárek), světlo (Václav Bára), krystaly (Dorota Pulmannová) a elektrostatika (Viktor Skoupý).

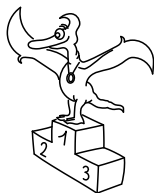
Ve druhé polovině školního roku jsme se jako v minulém roce zaměřili na podrobnější látku. Na populární přednášku o teorii relativity (Václav Bára) navázaly vrhy v gravitačním poli (Peter Ondáč), jaderné reaktory (Nicola Burianová), Hydrodynamika (Ivo Vinklárek). Poslední přednáška byla kvůli nemoci přeložena a setrvačnický (Jiří Nárožný) byly odpřednášeny až v květnu.

Všechny proběhlé přednášky je možné najít na našem YouTube<sup>2</sup> kanálu nebo v archivu FYKOSích přednášek<sup>3</sup>.

Poprvé byl letos realizován přípravný FYKOSí kurz středoškolské fyziky, který probíhal každý týden, probírala se většina středoškolské látky, navíc byla obohacena o infinitezimální počet a některé složitější kapitoly obvykle probírané až na vysoké škole.

<sup>2</sup><https://www.youtube.com/user/fykosak>

<sup>3</sup>[http://fykos.cz/akce/prednasky\\_archiv](http://fykos.cz/akce/prednasky_archiv)



## Pořadí řešitelů

### Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 235
1. <i>Kateřina Rosická</i>	G J. Ortena, Kutná Hora	191
2. <i>Ladislav Trnka</i>	G, Havlíčkův Brod	154
3. <i>Josef Mínařík</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	151
4. <i>Lucie Kundratová</i>	G, nám. TGM, Zlín	133
5. <i>Jindřich Dušek</i>	G Jana Keplera, Praha	127
6. <i>Jiří Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	109
7. <i>Vojtěch Laitl</i>	G, Ostrov	91
8. <i>Jakub Smolka</i>	Slezské G, Opava	89
9. <i>Tereza Pavlišová</i>	G, Olomouc-Hejčín	86
10. <i>Ivan Hudák</i>	ESŠ, Lip. Mikuláš	80
11. <i>Jakub Růžička</i>	G, Nymburk	55
12. <i>Martin Vavřík</i>	G, Šumperk	54
13. <i>Kristian Matušík</i>	G, Benešov	43
14. <i>Ondřej Bursa</i>	G, Brno-Řečkovice	36
15. <i>Anna Jandová</i>	G Legionářů, Příbram	29
16.–17. <i>Vratislav Blažek</i>	G, Benešov	26
16.–17. <i>David Otta</i>	G Christiana Dopplera, Praha	26
18. <i>Jakub Zemek</i>	G, Uherské Hradiště	25
19. <i>Klára Grohmannová</i>	G, Olomouc-Hejčín	23
20. <i>Domínik Stejskal</i>	G, Krnov	21
21. <i>Pavína Kružíková</i>	Biskupské G, České Budějovice	18
22.–23. <i>Pavel Junker</i>	G F. Živného, Bohumín	17
22.–23. <i>Kateřina Neubergerová</i>	G Jana Nerudy, Praha	17
24. <i>Kateřina Bartošová</i>	SPŠ Ostrov n. Ohří	16
25.–26. <i>Michal Jůza</i>	G, Benešov	15
25.–26. <i>Adam Karas</i>	G Legionářů, Příbram	15
27.–28. <i>Matej Martaus</i>	G Velká okružná, Žilina	14
27.–28. <i>Štěpán Stryja</i>	G, Třinec	14
29.–30. <i>Vojtěch Drška</i>	G, Nymburk	13
29.–30. <i>Tereza Knížková</i>	G Lučka Pika, Plzeň	13
31.–32. <i>Marek Božoň</i>	G, Karviná	12
31.–32. <i>Tomáš Pískovský</i>	Reálné G a ZŠ, Prostějov	12
33.–34. <i>Andrea Bínová</i>	G, Česká Lípa	11
33.–34. <i>Filip Korf</i>	G Nad Štolou, Praha	11
35. <i>Vádim Kablukov</i>	G B. Němcové, HK	9
36. <i>Kateřina Charvátová</i>	G B. Němcové, HK	8
37. <i>Filip Chocholatý</i>	G, Brno-Řečkovice	7
38. <i>Michal Džubera</i>	Matiční G, Ostrava	6
39.–40. <i>Ondřej Brůha</i>	Gymnázium Oty Pavla, Praha	5
39.–40. <i>Vojtech Filipi</i>	G Dašická, Pardubice	5

<b>jméno</b> <i>Student Pilný</i>	<b>škola</b> MFF UK	$\Sigma$ <b>235</b>
41. <i>Natálie Václavíková</i>	ZŠ a MŠ Velká Polom	<b>3</b>
42.–43. <i>Tomáš Drobil</i>	G Dačice	<b>2</b>
42.–43. <i>Ivana Vlachová</i>	G, Olomouc-Hejčín	<b>2</b>

**Kategorie druhých ročníků**

<b>jméno</b> <i>Student Pilný</i>	<b>škola</b> MFF UK	$\Sigma$ <b>235</b>
1. <i>Vít Beran</i>	Masarykovo G, Plzeň	<b>210</b>
2. <i>Viktor Rosman</i>	G, Pelhřimov	<b>171</b>
3. <i>Alexandr Jankov</i>	Matiční G, Ostrava	<b>165</b>
4. <i>Ondřej Knopp</i>	G, Třeboň	<b>164</b>
5. <i>Jan Lindauer</i>	První české G, Karlovy Vary	<b>150</b>
6. <i>Tomáš Dulava</i>	Matiční G, Ostrava	<b>143</b>
7. <i>Zuzana Řichterová</i>	G, Pelhřimov	<b>135</b>
8. <i>Jan Šenk</i>	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	<b>125</b>
9. <i>Ladislav Nagy</i>	G a SOŠZE, Vyškov	<b>123</b>
10. <i>David Němec</i>	G, Tanvald	<b>105</b>
11. <i>Domínik Starý</i>	G, Benešov	<b>96</b>
12. <i>Martin Crhán</i>	G, Studentská, Havířov	<b>76</b>
13. <i>Mikuláš Mikula</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	<b>68</b>
14. <i>Matúš Kopunec</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	<b>64</b>
15. <i>Martina Kopecká</i>	G J. Barranda, Beroun	<b>63</b>
16. <i>Šimon Karch</i>	G Komenského, Havířov	<b>58</b>
17. <i>Pavla Trembulaková</i>	G Jírovcova, České Budějovice	<b>52</b>
18. <i>Marek Kadlecík</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	<b>44</b>
19. <i>Tomáš Faikl</i>	G Dašická, Pardubice	<b>41</b>
20.–21. <i>Ondřej Hajnýš</i>	G, Dvůr Králové n. L.	<b>37</b>
20.–21. <i>Václav Kubíček</i>	Arcibisk. G, Kroměříž	<b>37</b>
22.–23. <i>Denisa Chytilová</i>	G J. Škody, Přerov	<b>32</b>
22.–23. <i>Štěpán Kohl</i>	Klasické a španělské G, Brno	<b>32</b>
24. <i>Matej Parada</i>	G Grösslingova, Bratislava	<b>29</b>
25.–26. <i>Filip Nácovský</i>	G, Dvůr Králové n. L.	<b>25</b>
25.–26. <i>Veronika Sedláková</i>	G Masarykovo nám., Kroměříž	<b>25</b>
27.–29. <i>Ondřej Bůlek</i>	SPŠ, Vlašim	<b>22</b>
27.–29. <i>Hao Luan</i>	SAIE, Shenzhen, China	<b>22</b>
27.–29. <i>John Richard Ritter</i>	G Masarykovo nám., Třebíč	<b>22</b>
30.–32. <i>Tomáš Čelko</i>	G, Považská Bystrica	<b>16</b>
30.–32. <i>Martin Hejl</i>	SPŠ a VOŠ, Písek	<b>16</b>
30.–32. <i>Tomáš Janeta</i>	G A. Bernoláka, Námestovo	<b>16</b>
33.–34. <i>Zuzana Urbanová</i>	G, U Balvanu, Jablonec n. N.	<b>15</b>
33.–34. <i>Tomáš Vakoš</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	<b>15</b>
35. <i>Martin Komínek</i>	G, Slaný	<b>14</b>
36.–37. <i>Jan Preiss</i>	G Jana Keplera, Praha	<b>13</b>
36.–37. <i>Hurum Maksora Tohfa</i>	RUMC, Dhaka, Bangladesh	<b>13</b>
38. <i>Jan Pospíšil</i>	G Masarykovo nám., Kroměříž	<b>11</b>
39.–40. <i>Jaroslav Paidar</i>	SPŠ Masarykova, Liberec	<b>10</b>
39.–40. <i>Martin Repčík</i>	G, Olomouc-Hejčín	<b>10</b>
41.–42. <i>Paulína Smolárová</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	<b>9</b>
41.–42. <i>Vladimír Talla</i>	Biskupské G, Ostrava	<b>9</b>
43.–45. <i>Vlastimil Horálek</i>	G Dašická, Pardubice	<b>8</b>

<b>jméno</b> <i>Student Pilný</i>	<b>škola</b> MFF UK	<b>Σ</b> <b>235</b>
43.–45. <i>Lukáš Hrubčík</i>	G, Nymburk	8
43.–45. <i>Jana Viktória Kováčiková</i>	G, Dubnica n. Váhom	8
46.–47. <i>Samuel Baran</i>	G J. A. Raymana, Prešov	7
46.–47. <i>Ondřej Buček</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	7
48.–51. <i>Ondřej Chloupek</i>	G, Mostecká, Chomutov	5
48.–51. <i>Filip Keller</i>	G P. de Coubertina, Tábor	5
48.–51. <i>Jakub Novotný</i>	G, Brno-Řečkovice	5
48.–51. <i>Vojtěch Vávra</i>	VOŠ, SOŠ a G Evropská, Praha	5
52.–54. <i>Antonín Krmíček</i>	G, Uherské Hradiště	3
52.–54. <i>Roman Ondráček</i>	G, Boskovice	3
52.–54. <i>Ondřej Sikora</i>	G, Třinec	3
55.–56. <i>Pavel Gregor</i>	G nám. E. Beneše, Kladno	2
55.–56. <i>Domínik Vrba</i>	G, Lovosice	2

## Kategorie třetích ročníků

<b>jméno</b> <i>Student Pilný</i>	<b>škola</b> MFF UK	<b>Σ</b> <b>211</b>
1. <i>Matěj Mezera</i>	G, Havlíčkův Brod	210
2. <i>Jáchym Bártík</i>	G, Havlíčkův Brod	205
3.–4. <i>Daniela Pittnerová</i>	G L. Svobodu, Humenné	168
3.–4. <i>Pavol Šimko</i>	G V. Nedožerského, SR	168
5. <i>Jozef Lipták</i>	G Tajovského, B. Bystrica	167
6. <i>Štěpán Stenclák</i>	G, Třinec	166
7. <i>Petr Šimůnek</i>	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	154
8. <i>Andrej Kancko</i>	G B. S. Timravy, Lučenec	119
9. <i>Kateřina Štodolová</i>	G Dašická, Pardubice	115
10. <i>Veronika Úlovcová</i>	Církevní G, Plzeň	114
11. <i>Matěj Rzehulka</i>	Wichterlovo G, Ostrava	105
12. <i>Klára Ševčíková</i>	G, Uherské Hradiště	102
13. <i>Lucie Hronová</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	100
14.–15. <i>Alžběta Andrášková</i>	G, Olomouc-Hejčín	83
14.–15. <i>Přemysl Šťastný</i>	G, Žamberk	83
16. <i>Jakub Kožušník</i>	Wichterlovo G, Ostrava	79
17. <i>Jonáš Fuksa</i>	PORG, Praha	77
18. <i>Veronika Rajňáková</i>	G, Nové Zámky	73
19. <i>Branislav Belko</i>	G Milana Ráfusa	71
20. <i>David Vokrouhlický</i>	G Jana Keplera, Praha	70
21. <i>Václav Mikeska</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	63
22. <i>Marek Raja</i>	G, Nymburk	59
23. <i>Matěj Vitouch</i>	G, Křenová, Brno	56
24. <i>Petra Štefaníková</i>	G O. Havlové, Ostrava	53
25. <i>Jan Střeleček</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	51
26. <i>Igor Bajor</i>	G, Hodonín	50
27. <i>Vít Horáček</i>	G L. Jaroše, Holešov	48
28. <i>Martin Štyks</i>	G Jana Keplera, Praha	38
29. <i>František Zach</i>	G, Litomyšl	34
30. <i>Martin Hanák</i>	G nám. E. Beneše, Kladno	30
31. <i>Martin Horáček</i>	G, Šumperk	26
32.–33. <i>Pavol Hepner</i>	G V. Nedožerského, SR	24
32.–33. <i>Adam Poloček</i>	G J. Slowackiego, Český Těšín	24

<b>jméno</b> <i>Student Pilný</i>	<b>škola</b> MFF UK	$\Sigma$ <b>211</b>
34. <i>Aleš Krčil</i>	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	20
35. <i>Veronika Gintnerová</i>	G Sv. Františka, Žilina	19
36. <i>Adam Hagara</i>	G V. Nedožerského, SR	18
37. <i>Antonín Baďura</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	16
38.–39. <i>Vojtech Bečvár</i>	SŠTE Brno	15
38.–39. <i>Jan Douša</i>	PORG, Praha	15
40. <i>Tomáš Březina</i>	G, SpgŠ, OA a JŠ Znojmo	13
41.–42. <i>Jan Buriánek</i>	G P. de Coubertina, Tábor	11
41.–42. <i>Petra Mikolasova</i>	PORG, Praha	11
43. <i>Jakub Hejhal</i>	G, Roudnice nad Labem	9
44. <i>Kateřina Volková</i>	Masarykovo G, Vsetín	7
45.–46. <i>Tomáš Hampl</i>	G, Dukelská, Bruntál	6
45.–46. <i>Tomáš Vrbata</i>	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	6
47. <i>Erik Borňás</i>	G, Roudnice nad Labem	3
48.–49. <i>Zuzana Rezková</i>	G B. Němcové, HK	1
48.–49. <i>Denisa Svobodová</i>	G, Jateční, Ústí nad Labem	1

### Kategorie čtvrtých ročníků

<b>jméno</b> <i>Student Pilný</i>	<b>škola</b> MFF UK	$\Sigma$ <b>211</b>
1. <i>Peter Kubaščík</i>	G, Kysucké Nové Mesto	146
2. <i>Šimon Knoška</i>	G A. Kmeťa, B. Štiavnica	142
3. <i>Petr Hrubý</i>	G, Polička	96
4. <i>Lukáš Supík</i>	G, Třinec	93
5. <i>Tomáš Hrbek</i>	G J. Resslera, Chrudim	82
6. <i>Andrej Uhlíarik</i>	G A. Bernoláka, Námestovo	73
7. <i>Klára Stefanová</i>	G B. Němcové, HK	57
8. <i>Andrea Tóthova</i>	G Jura Hronca, Bratislava	55
9. <i>Patrik Procházka</i>	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	53
10. <i>Jakub Pilař</i>	G J. Resslera, Chrudim	46
11. <i>Jakub Marták</i>	G Golianova, Nitra	43
12. <i>Štěpán Malec</i>	SPŠ a VOŠ Kladno	39
13. <i>Jozef Mišt</i>	G A. H. Škultétyho, V. Krtfš	32
14. <i>Pavel Souček</i>	G, Nymburk	31
15. <i>Jakub Jambrič</i>	G J. A. Raymana, Prešov	25
16. <i>Martin Gažo</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	16
17. <i>Tomáš Drozdík</i>	G Andreja Vrábľa, Levice	15
18. <i>Anna Linhartová</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	10
19.–21. <i>Daniel Adamkovič</i>	G Šrobárova, Košice	8
19.–21. <i>Juraj Májek</i>	G Grösslingova, Bratislava	8
19.–21. <i>Júlia Matulová</i>	G K. Sladkovského, Praha	8
22. <i>Kristína Mrázová</i>	G, Český Krumlov	7
23. <i>Marek Otýpka</i>	G, Židlochovice	6
24. <i>Kryštof Kolář</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	5
25. <i>Muhammad Rahman</i>	<i>Arifur</i> Bogra Cant. Pub. S. and C., BD	4
26. <i>Jiří Tuháček</i>	Masarykovo G, Plzeň	2



MIROSLAV HANZELKA A KOLEKTIV  
**Fyzikální korespondenční seminář**  
**XXIX. ročník – 2015/16**

*Předmluva:* Miroslav Hanzelka, Kristína Nešporová

*Náměty úloh:*

Miroslav Hanzelka (I.4, II.2, II.5, III.5, V.1, V.2, V.3, VI.1, VI.5), Karel Kolář (I.1, II.3, II.4, III.2, III.E, IV.4, IV.E, V.4, VI.E), Ján Pulmann (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S), Lukáš Ledvina (III.P, V.P, VI.3), Kristína Nešporová (I.5, II.P, IV.3), Jakub Dolejší (IV.5, V.5), Michal Koutný (III.4, IV.P), Michal Nožička (I.P, III.3), Aleš Podolník (II.E, VI.4), Filip Ayazi (IV.1), Aleš Flandera (I.3), Lukáš Fusek (V.E), Radomír Gajdošoci (I.2), Marek Nečada (IV.2), Tomáš Pikálek (VI.2), Jakub Šafin (II.1), Viktor Skoupý (I.E), Jakub Sláma (III.1), Tereza Steinhartová (VI.P),

*Autoři řešení úloh:*

Miroslav Hanzelka (I.4, II.4, II.5, IV.E, V.P, VI.5), Ján Pulmann (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S), Jakub Dolejší (II.1, III.4, IV.5, V.5), Mikuláš Matoušek (IV.3, V.1, V.4, VI.3), Michal Nožička (I.P, III.3, III.E, V.E), Filip Ayazi (I.5, II.3), Markéta Calábková (IV.1, V.2), Michal Červeňák (I.2, IV.P), Dominika Kalasová (II.P, V.E), Tomáš Pikálek (I.E, VI.2), Kateřina Smítalová (V.3, VI.1), Veronika Dočkalová (I.1), Lubomír Grund (VI.E), Lýdia Janitorová (II.2), Samuel Kočiščák (IV.2), Karel Kolář (III.2), Michal Koutný (VI.P), Lukáš Ledvina (III.P), Kristína Nešporová (II.E), Aleš Podolník (VI.4), Jakub Šafin (III.5), Viktor Skoupý (I.3), Jakub Sláma (III.1), Kateřina Stodolová (IV.E), Lukáš Timko (IV.4),

*Seriál o termodynamice:* Ján Pulmann

*Legenda podzimního soustředění:* Aleš Podolník

*Legenda jarního soustředění:* Lubomír Grund, Igor Bajo

*Sazba:* Markéta Calábková, Tomáš Pikálek, Miroslav Hanzelka, Lukáš Ledvina, Filip Ayazi

*Obrázky a grafy:* Michal Červeňák, Miroslav Hanzelka, Lukáš Ledvina, Tomáš Pikálek, Jakub Šafin

*Jazykové korektury:* Kristína Nešporová, Miroslav Hanzelka, Jakub Kocák, Markéta Calábková

*Odborné korektury:* Filip Ayazi, Václav Bára, Miroslav Hanzelka, Jakub Dolejší, Lukáš Ledvina, Jakub Šafin



MIROSLAV HANZELKA A KOLEKTIV  
**Fyzikální korespondenční seminář**  
**XXIX. ročník – 2015/16**

Vydal MatfyzPress  
nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty  
Univerzity Karlovy  
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8  
jako svou 531. publikaci

Výtiskl TISK SPRINT

Publikace neprošla recenzním ani lektorským řízením  
Vydáno pro interní potřebu MFF UK  
Nakladatelství neodpovídá za kvalitu a obsah textu  
Neprodejná publikace

204 stran, 54 obrázků  
Sazba písmem Latin Modern v programu X<sub>q</sub>L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  
Vydání první  
Náklad 400 výtisků

Praha 2017

ISBN 978-80-7378-337-2

