Úloha V.3 ... matfyzácká honička

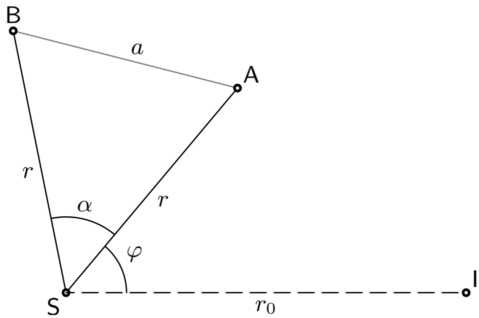
4 body; průměr 1,70; řešilo 37 studentů

N lidí se rozhodne hrát na honěnou, ale ne jen tak ledajakou. Na začátku se rozmístí do vrcholů pravidelného N-úhelníku o straně délky a. Hra poté probíhá tak, že každý honí (to znamená běží přímo za ním) svého souseda po pravé ruce (proti směru hodinových ručiček). Každý se přitom pohybuje rychlostí o konstantní velikosti v. Popište průběh hry (trajektorie, po kterých se hráči pohybují) a zjistěte, za jak dlouho hra skončí v závislosti na parametrech N, a, v.

Kuba Vošmera maturant.

Prvá vec, ktorú treba v riešení využiť, je symetria. Všimnime si, že ak otočíme svet o $360°/N$ okolo stredu S počiatočného N-uholníka, situácia sa nezmení – stále budeme mať na začiatku N ľudí vo vrcholoch rovnakého N-uholníka, ktorí sa naháňajú podľa úplne rovnakých pravidiel. Ale to znamená, že aj v každom čase budú hráči tvoriť pravidelný N-uholník so stredom v bode S a hra skončí, až keď všetci dobehnú do bodu S.

Jediné, čo sa mení, je vzdialenosť ľudí r od bodu S a uhol φ, o ktorý sa N-uholník otočil (všetky pohyby okolo stredu S budeme uvažovať proti smeru pohybu hodinových ručičiek). Stačí nám teda hľadať trajektóriu jedného hráča v polárnych súradniciach (r, φ). Trajektórie ostatných dostaneme jednoducho jej otočením o celočíselné násobky uhla $\alpha = 360°/N$.



Obr. 1: Náčrt situácie s dvomi susednými hráčmi.

Uvažujme človeka A, ktorý naháňa človeka B, počiatočnú polohu človeka A označme I ako na obrázku 1. Rýchlosť $\boldsymbol{v}$ človeka A vieme rozložiť na radiálnu zložku v_r (rovnobežnú s priamkou SA), zodpovedajúcu pohybu ku stredu, a na ňu kolmú tangenciálnu zložku v_t, zodpovedajúcu obehu okolo stredu. Keďže trojuholník SAB je vždy rovnoramenný so základňou AB a $\angle\mathsf{ASB} = \alpha$, bude $\angle\mathsf{SAB} = 90° - \alpha/2$ a dostávame

$$v_\mathrm{r} = v\cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = v\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) ,$$
$$v_\mathrm{t} = v\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = v\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) .$$

Radiálna zložka je vlastne rýchlosť, ktorou klesá r, tangenciálna zložka je spojená s uhlovou rýchlosťou ω obehu hráča okolo stredu vzťahom $\omega r = v_\mathrm{t}$.

Obe zložky rýchlosti sú konštantné. Pre radiálnu zložku to znamená, že pohyb ku stredu sa tvári ako rovnomerne priamočiary (do stredu teda všetci dobehnú v konečnom čase) a vzdialenosť hráča od stredu r vieme v závislosti na čase vyjadriť ako

$$r = r_0 - v_\mathrm{r} t\,.$$

Počiatočnú vzdialenosť r_0 síce explicitne nepoznáme, ale vieme si ju vyjadriť – v rovnoramennom trojuholníku SAB totiž platí pre dĺžku základne $a = 2r_0 \sin(\alpha/2)$, teda

$$r = \frac{a}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - vt\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,.$$

Čas, za ktorý hra skončí, teda všetci dobehnú do stredu, potom nájdeme ľahko ako

$$t_\mathrm{fin} = \frac{a}{2v\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{2v\sin^2\left(\frac{180^\circ}{N}\right)}\,.$$

Na to, aby sme určili trajektórie, už potrebujeme vedieť integrovať. Chceme nájsť závislosť uhla φ od času. Pre uhlovú rýchlosť ω platí

$$\omega = \frac{v_\mathrm{t}}{r} = \frac{v_\mathrm{t}}{r_0 - v_\mathrm{r} t}$$

a keď si uvedomíme, že uhlová rýchlosť je len derivácia uhla φ podľa času, dostaneme závislosť $\varphi(t)$ integrovaním

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{v_\mathrm{t}}{r_0 - v_\mathrm{r} t}\,\mathrm{d}t = \int_{r_0}^{r(t)} -\frac{v_\mathrm{t}}{r v_\mathrm{r}}\,\mathrm{d}r = \left[-\frac{v_\mathrm{t}}{v_\mathrm{r}}\ln r\right]_{r_0}^{r(t)} =$$
$$= \frac{v_\mathrm{t}}{v_\mathrm{r}}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right) = \mathrm{cotg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ln\left(\frac{r_0}{r_0 - v_\mathrm{r} t}\right)\,,$$

kde sme najprv využili, že $\mathrm{d}r = -v_\mathrm{r}\,\mathrm{d}t$, potom sme pre pohodlie položili počiatočnú súradnicu φ rovnú nule (to, čo dostaneme integrovaním, je len zmena uhla φ za daný čas) a nakoniec identitu $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$, pomocou ktorej sme previedli rozdiel logaritmov na ich podiel.

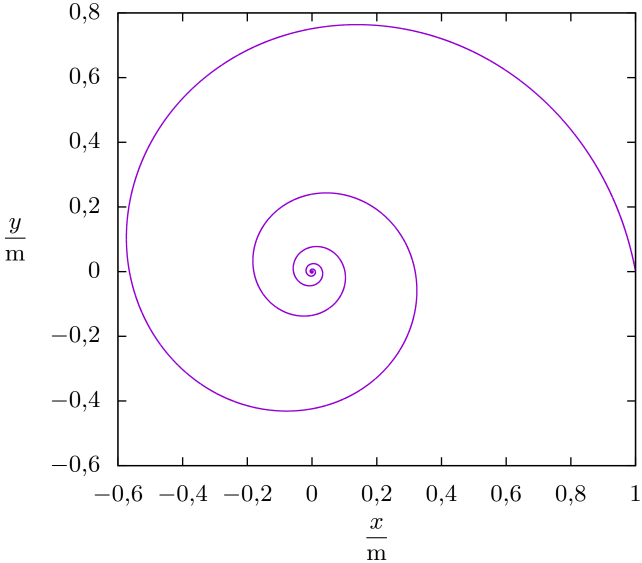
V podstate sme rovno dostali závislosť $\varphi(r)$, ktorá popisuje trajektóriu, tzv. logaritmickú špirálu

$$\varphi(r) = \mathrm{cotg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ln\left(\frac{r_0}{r}\right) = \mathrm{cotg}\left(\frac{180^\circ}{N}\right)\ln\left[\frac{a}{2r\sin\left(\frac{180^\circ}{N}\right)}\right]\,.$$

Všimnime si, že ak r klesá do nuly, rastie logaritmus z nuly do nekonečna. Keďže uhol $\varphi + 360^\circ$ zodpovedá rovnakej polohe ako uhol φ, znamená to, že ako praví matfyzáci obehnú všetci okolo stredu nekonečne veľakrát. Ak je ale hráčov málo, bude pozorovateľných len veľmi málo obehov; príklad trajektórie pre veľké N je na obr. 2.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.



Obr. 2: Trajektória hráča pre $N = 1\,000, r_0 = 1$.