

## Úloha III.5 ... sféricky symetrické kuře ve vakuu

5 bodů; průměr 1,88;

řešilo 40 studentů

Do nádoby o objemu  $V = 1 \text{ m}^3$ , ve které je velmi nízký tlak (prakticky dokonalé vakuum), umístíme  $V_0 = 11$  vody o pokojové teplotě  $t_0$ . Jaký bude konečný stav, ve kterém se bude nacházet nádoba a voda v ní? Pro účely výpočtu předpokládejte, že nádoba je dokonale tepelně izolovaná od okolního prostředí a má zanedbatelnou tepelnou kapacitu.

*Karel se nechal inspirovat problémem, o kterém spekoval jeden spolužák na Didaktice II.*

Fyzikálne princípy sú jasné: po vložení do vákuu začne voda v takomto nízkom tlaku prudko vriet a vyparovať sa. Tak sa bude postupne zvyšovať tlak vodných pár a znižovať teplota vody, vyparovanie je totiž veľmi energeticky náročné. Ak bude vyparovanie pokračovať dosť dlho, môže dokonca voda začať mrznúť.

Vo finálnom stave teda bude väčšina nádoby vyplnená vodnou parou, niekde dole bude trochu vody a/alebo ľadu. Takto na konci musí byť všetko v rovnováhe – vyparovanie vody a sublimácia ľadu sa musí vyrovnáť s kondenzáciou a desublimáciou vodnej pary. Ako vyzerá takáto rovnováha?

Pozrime sa najprv na prípad len voda – vodná para. So zvyšujúcou sa teplotou vody sa zvyšuje vyparovanie, so zvyšujúcim sa tlakom pary rastie miera kondenzácie. Pre daný tlak existuje práve jedna teplota, pri ktorej sa tieto dva deje vyrovnajú.<sup>1</sup> Zistiť túto teplotu môžeme rôznymi spôsobmi. Na fázovom diagrame, ktorý sa kreslí práve do  $pT$  grafu,<sup>2</sup> je to čiara oddeľujúca vodu a vodnú paru (nazýva sa krivka koexistencie). Tvar tejto čiary sa riadi Clausiusovou-Clapeyronovou rovnicou, a dokonca existujú aj empirické zákony popisujúcu túto závislosť  $p(T)$  (napr. Antoinova rovnica).

Rovnováha iných dvoch fáz je o tom istom – ľad a vodná para môžu takisto koexistovať, avšak pri nižších teplotách a tlakoch. Rovnováha ľadu, vody a vodnej pary je ale špeciálna. Existovať môže len pri istom tlaku a teplote a nazýva sa trojný bod. Konkrétne je tento tlak  $p_t \approx 612 \text{ Pa}$  a teplota  $T_t \approx 273,16 \text{ K}$ .

Späť ku príkladu. Voda sa vyparuje a chladne: ak sa podarí vypariť dostatok vodnej pary pred tým, ako teplota vody klesne na teplotu tuhnutia, nastane rovnováha vody a vodnej pary. Ak však voda vychladne a stále je v okolí nízky tlak, teplo potrebné na vyparovanie bude brať z toho, že začne mrznúť. Tak sa môže ustáliť rovnováha v trojnom bode. Ak však zmrzne všetka voda a tlak je stále nízky, bude ďalej sublimovať (už je to samozrejme ľad) a nakoniec nastane rovnováha vodnej pary a ľadu.

Ako to bude v našom prípade, zistíme, až keď dosadíme nejaké čísla.<sup>3</sup> Najprv len orientačne: ochladením litra vody z izbovej teploty, napr.  $20^\circ\text{C}$ , na teplotu tuhnutia získame asi  $20 \text{ K} \cdot 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} = 84 \text{ kJ}$ . Týmto teplom vieme vypariť  $84/2500 \text{ kg} \doteq 34 \text{ g}$  vody. To je asi  $(34 \text{ g})/(18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}) \doteq 1,9 \text{ mol}$  v látkovom množstve. Stavová rovnica ideálneho plynu hovorí

$$p = \frac{nRT}{V}.$$

<sup>1</sup>Prečo sa teda vyparuje napr. voda z oblečenia aj pri atmosférickom tlaku? Rovnovážny tlak vodnej pary je totiž len časťou tlaku atmosféry, ktorá je zložená prevažne z iných plynov. Tlak samotnej vodnej pary je teda pokojne menší ako kilopascal. To isté platí aj pre sublimáciu ľadu.

<sup>2</sup>Pekný diagram majú na wikipedii [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Phase\\_diagram\\_of\\_water.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Phase_diagram_of_water.svg).

<sup>3</sup>Použijeme orientačnú tepelnú kapacitu  $c = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}^{-1}$  a merné skupenské teplo vyparovania pri izbovej teplote  $l = 2500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  prevzaté z [http://en.wikipedia.org/wiki/Properties\\_of\\_water#Heat\\_capacity\\_and\\_heats\\_of\\_vaporization\\_and\\_fusion](http://en.wikipedia.org/wiki/Properties_of_water#Heat_capacity_and_heats_of_vaporization_and_fusion).

Objem  $V$  je s dobrou presnosťou práve objem nádoby,  $T$  povedzme tá teplota tuhnutia vody. Tak dostaneme tlak približne 4 300 Pa, čo je bezpečne nad tlakom trojného bodu 612 Pa. Vyzerá to teda, že výsledný stav bude obsahovať len vodu a veľmi riedku vodnú paru. Treba už len zistiť, aká časť vody sa skutočne vyparí.

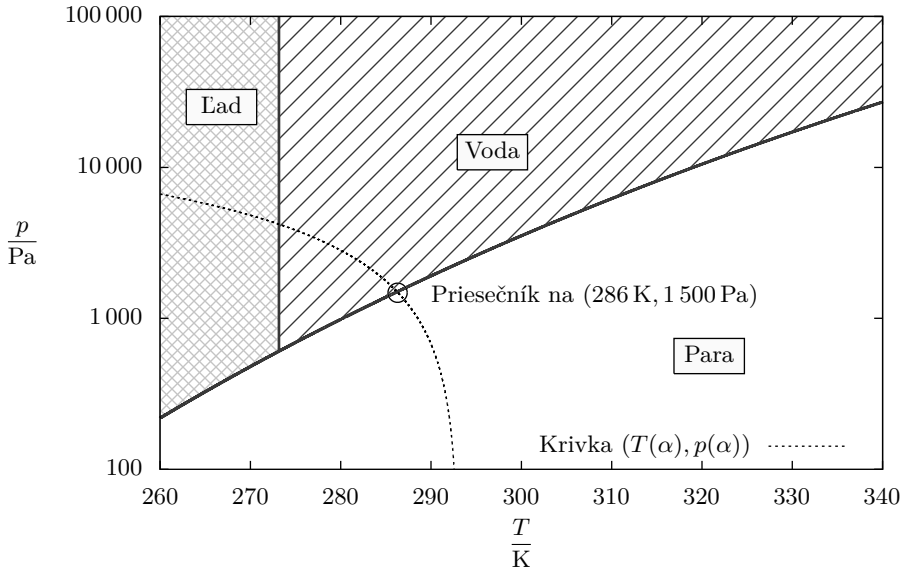
Označme si pomer hmotnosti vyparenej  $m_{\text{vyp}}$  a pôvodnej vody  $m_0 = 1$  kg ako  $\alpha = m_{\text{vyp}}/m_0$ . Už vieme, že  $\alpha$  bude ešte menšie ako 0,034. Na vyparenie tohoto pomeru potrebujeme  $\alpha m_0$  tepla. Ak bude výsledná teplota  $T_1$ , ochladením vody získame  $(T_0 - T_1)m_0$  tepla. Takto vieme vyjadriť, ako bude závisieť výsledná teplota na pomere  $\alpha$

$$T_1(\alpha) = T_0 - \alpha \frac{l}{c}.$$

Vyparenie takéhoto množstva pary nám vyrobí plyn s tlakom

$$p = nRT_1/V = \frac{\alpha m_0 RT_1(\alpha)}{M_{\text{H}_2\text{O}} V}.$$

Ak budeme meniť  $\alpha$ , budeme dostávať dvojice hodnôt teploty a tlaku. Tieto hodnoty popisujú rovnováhu vzhľadom na prenesené teplo a na rovnovážny stav vodnej pary, no nemusia popisovať rovnováhu vyparovania a kondenzácie vody a vodnej pary. Na to musíme nájsť také hodnoty, ktoré túto rovnováhu spĺňajú, čo môžeme spraviť rôznymi spôsobmi: numerické riešenie Antoinovej rovnice alebo grafické riešenie pomocou fázového diagramu vody.



Obr. 1: Fázový diagram a krivka  $(T(\alpha), p(\alpha))$ .

V druhom prípade postupujeme nasledovne: do fázového diagramu nakreslíme množinu možných stavov  $(T(\alpha), p(\alpha))$  v závislosti na parametri  $\alpha$ . Táto čiara pretne hranicu medzi vo-

dou a vodnou parou, no a tento bod je právě náš hľadaný rovnovážny stav – leží na krivke koexistencie vody a vodnej pary.

Osobne som si zvolil cestu grafického riešenia. Krivku koexistencie som vykreslil pomocou Antoinevej rovnice.<sup>4</sup> Pre počiatočnú teplotu  $T_0 = 293\text{ K}$  numericky vychádza priesečník na teplote  $T_1 \approx 286\text{ K} \doteq 13\text{ }^\circ\text{C}$  a tlaku  $p_1 \approx 1500\text{ Pa}$ . Parameter  $\alpha$  zodpovedajúci tejto hodnote je približne 0,011, vyparená hmotnosť vody je asi  $m_{\text{vyp}} = \alpha m_0 \approx 11\text{ g}$ .

Ako to vyzerá, si môžete pozrieť na obrázku 1. Vidíme trojný bod a tri fázové oblasti. Proces vyparovania prebieha od  $\alpha = 1$ , čo je spodok prerušovanej krivky a zastaví sa, keď dosiahneme rovnováhu dvoch fáz – teda krivku oddeľujúcu vodu a vodnú paru. Prerušovaná krivka síce pokračuje ďalej a pretína aj rozhranie vody a ľadu, ale tento bod je nefyzikálny, lebo proces na krivke predpokladal iba premenu vody na paru.

Ešte dva komentáre na záver. Po prvé, určíte ste si všimli, koľko zanedbaní sme urobili. Hlavne v počítaní energetickej bilancie sme neuvažovali vnútornú energiu plynu, či to, že ochladzovať sa nebude celá, ale len nevyparená voda (tieto dve zanedbania sa čiastočne rušia). Taktiež sme neuvažovali zmeny tepelnej kapacity vody na danom intervale. Všetko je to ospravedlnené tým, že ako  $\alpha$ , tak relatívna zmena teploty sú veľmi malé. Počítanie s vyššou presnosťou by nám neprineslo žiadnu novú fyziku, no postup by bol výrazne komplikovanejší.

Po druhé, vieme približne popísať závislosť koncového stavu na počiatočnej teplote  $T_0$ . Pri vyššej teplote by sa vyparilo viac vody, lebo tlak nasýtených vodných pár rastie s teplotou, a to celkom rýchlo. Skúšaním rýchlo zistíme, že na druhú stranu by sa pri pôvodnej teplote vody  $3\text{ }^\circ\text{C}$  rovnováha ustálila v trojnóm bode. Pre ešte nižšiu teplotu by sme začali pozorovať aj tvorbu ľadu.

*Ján Pulmann*  
janci@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

---

<sup>4</sup>Parametre aj tvar rovnice sú na [http://en.wikipedia.org/wiki/Antoine\\_equation](http://en.wikipedia.org/wiki/Antoine_equation).