

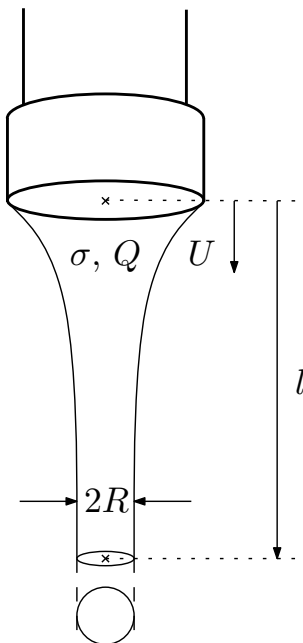
Úloha II.E ... vodní rozpad

8 bodů; průměr 4,44; řešilo 41 studentů

V jaké hloubce pod vodovodním kohoutkem se rozpadá pramínek vody na kapičky? Jak to závisí na průtoku vody?
Lukášovi hráblo (opět).

Jednoduchý model

Zkoumaný jev rozpadání proudu na kapičky se v literatuře označuje jako *Plateauova-Rayleighova nestabilita*, kdy je „přeštípnutí“ proudu způsobeno zesilováním amplitudy radiálních kapilárních vln na povrchu proudu.¹ Výstupem tohoto modelu pak může být například hloubka pod kohoutkem, kde se pramínek začíná rozpadat, kterou máme za úkol měřit. Nebudeme zabíhat do (poměrně technických) podrobností standardního odvození Plateauovy-Rayleighovy nestability a spokojíme se s jednoduchým argumentem založeným na rozměrové analýze. Rovněž zanedbáme vliv viskozity a zrychlování v tíhovém poli (což limituje platnost našeho modelu na takové hloubky pod kohoutkem, pro které se nebude výrazně zužovat šířka pramínku).



Obr. 1: Schématické znázornění situace rozpadajícího se pramínku pod kohoutkem.

Budeme hledat časovou škálu T , na které dojde k dostatečnému zesílení amplitudy kapilárních vln, aby se proud rozpadl na kapičky. Tvrdíme, že T bude funkcí hustoty kapaliny ρ ,

¹Podrobnosti naleznete například na http://en.wikipedia.org/wiki/Plateau-Rayleigh_instability.

jejího povrchového napětí σ a poloměru pramínku R , nikoli však velikosti rychlosti pramínku,² kterou značíme U . Rozměrová analýza potom říká, že

$$T \propto \sqrt{\frac{\rho R^3}{\sigma}}.$$

Uvědomíme-li si navíc, že pro průtok Q platí $Q \propto UR^2$, pak pro vzdálenost l od kohoutku, kde dojde k rozpadu pramínku, máme

$$l = UT = CU^{1/4}Q^{3/4}\sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}, \quad (1)$$

kde C je bezrozměrný koeficient. Za předpokladu, že se nám podaří v průběhu měření držet U konstantní (viz níže), máme pro hloubku rozpadu pod kohoutkem úměru $l \propto Q^{3/4}$. Připomeňme, že zanedbáváme zužování pramínku v důsledku zrychlování v tíhovém poli, které zřejmě produkuje v závislosti $l(Q)$ klesající trend.³

Experiment

Nastavili jsme průtok kohoutkem na hodnotu, při které k rozpadu pramínku docházelo v hloubce l_i pod kohoutkem. Tuto hloubku jsme měřili opakovaně odečítáním z pořízené fotografie (obr. 2). Odčítali jsme vždy dvě hodnoty: jednak hloubku, ve které došlo k první výrazné oscilaci pramínku, a jednak hloubku, ve které byla pozorovatelná první kapka. Průtok jsme měřili stopováním času, za který proteče daný objem. Ten se pohyboval mezi 200 ml a 300 ml. Nejistotu určení hodnoty průtoku jsme stanovili jako směrodatnou odchylku $SE = \sqrt{s_y^2/n}$ souboru průtoků, které byly naměřeny při vyšším průtoku, aby mohl být tento experiment opakován vícekrát. Data z tohoto měření jsou v tab. 1.

Hloubku, ve které se pramínek rozpadá, jsme měřili s přesností ± 2 cm, přičemž zde zahrnujeme i nejistotu při určování konkrétního bodu rozpadu. Pro každé nastavení průtoku jsme pak spočetli průměrnou hloubku rozpadu a rozptyl této hloubky v rámci daného průtoku

$$s_l^2 = \frac{\sum (l_i - \bar{l})^2}{n - 1}.$$

Měření i vypočtené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 2.

Zpracování a diskuse výsledků

V grafu na obr. 3 jsou průměrné hodnoty hloubek vyneseny v závislosti na průtoku. Interval kolem bodů ve směru vodorovné osy je směrodatná odchylka dat z tab. 1 $SE = \pm 0,25$ cm. Ve směru svislé osy to jsou směrodatné odchylky jednotlivých setů hloubek.

Podle rovnice (1) bychom měli v našich datech hledat závislost $l = aQ^{3/4} + b$, kde a a b jsou reálné parametry, a kladné.⁴ Na obr. 3 skutečně pozorujeme stoupající trend, nicméně jakýkoli

²Zde se bohužel musíme odvolat na samotné odvození Plateauovy-Rayleighovy nestability, které nám pro konstantní poloměr pramínku fixuje míru zesílení nejrychleji rostoucích kapilárních vln (tj. těch, které způsobí rozpad pramínku). Čas, za který amplituda vln dostatečně naroste, tedy nezávisí na rychlosti pramínku.

³Máme pak $l \propto T^2 \propto R^3$, takže l bude citlivé na zužování pramínku.

⁴Oproti (1) uvažujeme nenulový absolutní člen b , který sice neplyne přímo z teorie, ale pro účely fitu je obecně lepší ho zařadit. Můžeme tak jednak odhalit systematickou chybu, kdy jsou námi měřené hodnoty posunuté, a jednak tak zohledníme fakt, že pro malé průtoky voda pouze odkapává přímo z kohoutku.



Obr. 2: Fotografie.

pokus o fit v celém rozsahu průtoků selhává, protože funkce $Q^{3/4}$ zkrátka roste příliš rychle. Vysvětlením by mohlo být pozorované výrazné zužování pramínku pro velká Q , viz také obr. 2. Do závislosti $l(Q)$ pak vstoupí klesající trend, který zmírní její růst tak, jak pozorujeme.

Dalším předpokladem, který jsme v teoretickém úvodu zavedli, je, že rychlost proudění v pramínku byla v rámci přesnosti měření konstantní v intervalu průtoků, které jsme použili. Myšlenkově to lze obhájit následovně: tlak v potrubí je přibližně 6krát až 8krát větší než atmosferický. Malé změny průtokového otvoru, kterým regulujeme průtok, a jimi vyvolané změny tlaku budou vůči tomuto rozdílu několika atmosfér zanedbatelné, a tedy i změna rychlosti se změnou průtoku bude jen drobná.

Na závěr by se slušelo pohovořit, co dále námi pozorovaný jev ovlivňuje a přitom není popsáno modelem. Prakticky cokoli, co souvisí s kapkami, se točí kolem povrchového napětí, a to je velmi citlivé na změny koncentrace minerálů ve vodě, teplotu vody, čistotu ústí kohoutku a vůbec materiál kohoutku samotný (obecně na povrchovou energii). Dále bývají ve vodovodním kohoutku umístěna jemná sítká, která upravují tvar proudu a „přidávají do něj bublinky“. To bude pravděpodobně hrát významnou roli v modelu Plateauovy-Rayleighovy nestability, kde počáteční fluktuační rozhodují prakticky o všem.

Samotné měření pak mohlo být mimo již uvažované efekty ovlivněno například expoziční dobou fotoaparátu. Nejproblematictější částí nicméně zůstává subjektivita určení bodu, kde k rozpadu dochází. Z těchto důvodů bychom si mohli dovolit udělat svislé chybové úsečky

Tabulka 1: Stanovení nejistoty určování průtoku.

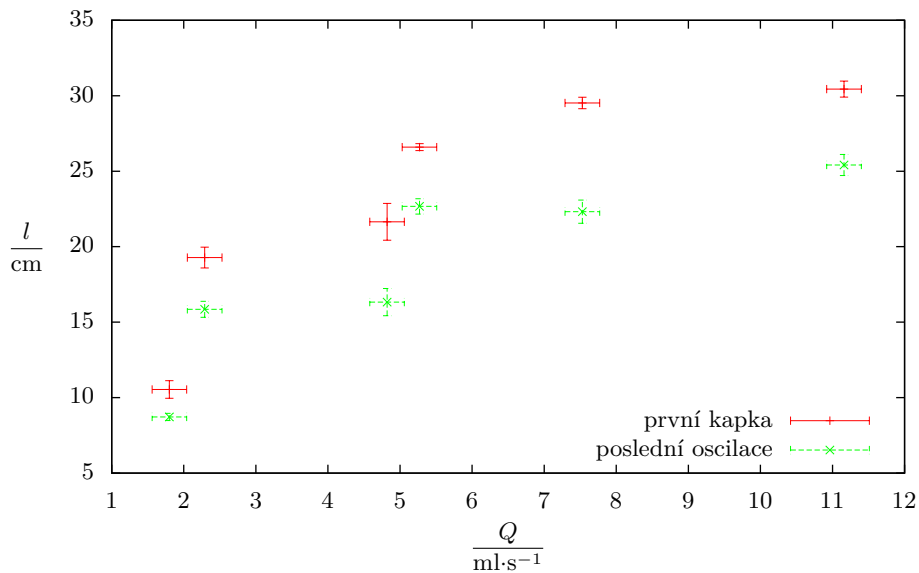
$\frac{V}{\text{ml}}$	$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{Q}{\text{ml}\cdot\text{s}^{-1}}$
200	14,37	13,92
200	14,24	14,04
200	14,12	14,16
200	14,02	14,27
200	12,16	16,45
200	14,19	14,09
200	14,06	14,22
250	19,22	13,01
250	18,63	13,42
250	18,40	13,59
250	19,36	12,91
250	19,69	12,70
250	19,00	13,16
250	18,19	13,74
průměr		13,83
SE		0,245

Tabulka 2: Naměřené hloubky rozpadu pramínku.

$\frac{Q}{\text{ml}\cdot\text{s}^{-1}}$	hloubky první oscilace						$\frac{\bar{l}}{\text{cm}}$	$\frac{s_l^2}{\text{cm}}$	$\frac{SE}{\text{cm}}$
	cm								
2,3	16,3	14,5	17,0	17,0	16,3	14,0	15,9	1,7	0,5
4,8	16,0	17,6	13,9	17,8			16,3	3,3	0,9
7,5	19,3	24,3	21,3	23,0	21,9	24,1	22,3	3,6	0,8
11,2	27,6	26,9	23,4	26,3	25,4	22,5	25,8	3,4	0,7
1,8	9,0	8,0	8,7	8,5	9,4		8,7	0,3	0,2
5,3	23,5	23,9	21,6	23,3	23,0	20,7	22,7	1,5	0,5

$\frac{Q}{\text{ml}\cdot\text{s}^{-1}}$	hloubka vzniku první kapičky						$\frac{\bar{l}}{\text{cm}}$	$\frac{s_l^2}{\text{cm}}$	$\frac{SE}{\text{cm}}$	
	cm									
2,3	17,9	17,3	21,1	21,0	20,2	18,2	19,3	2,8	0,7	
4,8	25,0	19,2	20,9	21,5			21,7	5,9	1,2	
7,5	30,8	29,4	29,9	29,0	29,9	28,1	29,5	0,8	0,4	
11,2	30,6	28,8	28,8	32,6	30,7	30,0	31,6	1,9	0,5	
1,8	11,2	12,0	11,1	8,6	10,7	8,7	11,5	10,5	1,7	0,6
5,3	26,7	27,4	26,0	26,5	26,0	27,0	26,6	0,3	0,2	

klidně 3krát větší, neboť nyní zahrnují jen opakovatelnost měření, ale ne systematické chyby



Obr. 3: Graf závislosti hloubek rozpadu a první výrazné oscilace na průtoku.

a další efekty výše popsané.

Tereza Steinhartová
terkas@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.