Úloha II.3 ... nedočkavé jádro

4 body; průměr 2,96; řešilo 75 studentů

Jádro bismutu ^{209}Bi *sedí nedočkavě v pokoji na místě. V jednom okamžiku to nevydrží a rozpadne se. Zůstane nám z něj jádro thalia* ^{205}Tl *a od něho letí pryč* α *částice. Jakou rychlostí by se pohybovala* α *částice, pokud by se energie uvolněná při rozpadu přeměnila pouze na její kinetickou energii? Jakou rychlostí se bude* α *částice pohybovat ve skutečnosti? Výsledky porovnejte. Klidové hmotnosti atomů jsou* $M = m_{^{209}\mathrm{Bi}} = 208{,}980\,399\,\mathrm{u}$, $M' = m_{^{205}\mathrm{Tl}} = 204{,}974\,428\,\mathrm{u}$, $m = m_{^{4}\mathrm{He}} = 4{,}002\,602\,\mathrm{u}$. *Nezapomeňte ověřit, jestli není potřeba používat relativistické vztahy.*

Jakubovi bylo líto, že bismut musí čekat eóny na rozpad.

Při rozpadu jádra bismutu dojde v systému k úbytku hmotnosti[1]

$$\Delta m = m_{^{209}\mathrm{Bi}} - (m_{^{205}\mathrm{Tl}} + m_{^{4}\mathrm{He}}) = 0{,}003\,369\,\mathrm{u}\,.$$

Podle známého vztahu $E = mc^2$ se tento úbytek projeví nárůstem kinetické energie produktů jaderné reakce. Dle zadání máme nejprve předpokládat, že se veškerá uvolněná energie přemění na kinetickou energii alfa částice E_k. Na základě vztahu pro kinetickou energii v klasické mechanice můžeme psát

$$E_\mathrm{k} = \Delta m c^2 = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2\,, \tag{1}$$

kde jsme v_α označili rychlost alfa částice a její hmotnost jsme přeznačili na m_α. Ze vztahu (1) snadno vyjádříme rychlost

$$v_\alpha = c\sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha}} \doteq 1{,}230 \cdot 10^7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Úlohu není třeba řešit relativisticky, neboť

$$m_\alpha c^2 \gg \Delta m c^2\,, \tag{2}$$

tj. klidová energie alfa částice je mnohem vyšší než její kinetická energie. Můžeme ověřit, že za této podmínky se relativistický výpočet redukuje na klasický. Kinetickou energii vyjádříme jako rozdíl celkové energie a klidové energie

$$E_\mathrm{k} = \Delta m c^2 = m_\alpha c^2 \gamma - m_\alpha c^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\Delta m + m_\alpha}{m_\alpha}\,,$$

kde γ označuje Lorentzův faktor. Rozepsáním Lorentzova faktoru dostaneme pro rychlost alfa částice rovnici

$$1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2} = \left(\frac{m_\alpha}{\Delta m + m_\alpha}\right)^2\,,$$

ze které vyjádříme

$$v_\alpha = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_\alpha}{\Delta m + m_\alpha}\right)^2} \doteq 1{,}229 \cdot 10^7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,. \tag{3}$$

Tento výsledek dále přepíšeme jako

$$v_\alpha = c\sqrt{1 - \left(1 + \frac{\Delta m}{m_\alpha}\right)^{-2}} \tag{4}$$

[1] Jak jste jistě v zadání postřehli, vyjadřujeme hmotnosti v násobcích atomové hmotnostní jednotky $\mathrm{u} = 1{,}660\,538\,921(73) \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, která je definována jako 1/12 klidové hmotnosti uhlíku ^{12}C.

a využijeme nerovnosti (2) ve tvaru $\Delta m/m_\alpha \ll 1$, díky níž můžeme s dostatečnou přesností nahradit závorku v (4) rozvojem do prvního řádu[2]

$$\left(1+\frac{\Delta m}{m_\alpha}\right)^{-2} = 1 - 2\frac{\Delta m}{m_\alpha}\,.$$

Po dosazení zpět do (4) dostaneme výsledek

$$v_\alpha = c\sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha}}\,, \tag{5}$$

který je shodný s výrazem (1).

Stále však nemůžeme pokládat výsledek (1) za správný, neboť přesunem veškeré rozpadové energie do kinetické energie alfa částice by došlo k narušení zákona zachování hybnosti. Jádro bismutu je na počátku v klidu, proto zůstane nehybné i těžiště soustavy thalium–helium. Obě částice musí vyletět antiparalelními směry se stejnou velikostí hybnosti. Z toho okamžitě plyne (počítáme nerelativisticky)

$$v_{\mathrm{Tl}} = \frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Tl}}}v_\alpha\,, \tag{6}$$

a je tedy zřejmé, že se po zakomponování zákona zachování hybnosti rychlost alfa částice příliš nezmění, neboť $m_\alpha \ll m_{\mathrm{Tl}}$. Dosazením (6) do zákona zachování energie dostaneme

$$\Delta m c^2 = \frac{1}{2}(m_\alpha v_\alpha^2 + m_{\mathrm{Tl}}v_{\mathrm{Tl}}^2) = \frac{1}{2}\left(m_\alpha v_\alpha^2 + \frac{m_\alpha^2}{m_{\mathrm{Tl}}}v_\alpha^2\right)\,.$$

Nyní vyjádříme v_α a provedeme aproximaci

$$v_\alpha = c\sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha\left(1+\frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Tl}}}\right)}} \approx c\sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha}}\,.$$

Opět tak dostáváme zjednodušený vztah (1). Bez aproximace bychom dostali číselný výsledek

$$v_\alpha \doteq 1{,}22\cdot 10^7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Relativistické korekce již provádět nebudeme, neboť vidíme, že rychlost v_α je při přesném výpočtu nižší než v prvním případě.

Výsledek jsme ale právě kvůli relativistickým korekcím museli zaokrouhlit pouze na tři platné cifry. Řádovou velikost relativistických korekcí získáme vyčíslením (4) a jeho porovnáním s výrazem (5).

Komentáře k řešením

Nejčastějším nešvarem, který se vyskytoval v naprosté většině řešení, bylo nesprávné zaokrouhlování. V zadání úlohy byly hmotnosti částic udány na devět platných číslic, proto většina z vás usoudila, že by výsledek měl být uveden se stejným počtem platných číslic. Ve vztahu pro rychlost jádra helia však vystupoval hmotnostní schodek $\Delta m = 0{,}003\,369\,\mathrm{u}$ bez zaokrouhlení.

[2] Využíváme zde přibližné vyjádření $(1+x)^n \approx 1+nx$, $|x| \ll 1$, $n \in \mathbb{Z}$, které plyne z binomické věty.

Maximální přesnost výsledku, které můžeme na základě zadaných hodnot dosáhnout, jsou tedy pouze čtyři platné číslice. V menším počtu případů se vyskytl i opačný problém, kdy jste zaokrouhlili již samotné hmotnosti thalia a bismutu (proč se tahat s tak velkými čísly, že?) a výslednou rychlost jste pak stanovili s chybou v řádu desítek až stovek procent.

Mnozí si také znesnadnili výpočty tím, že po každé úpravě vše číselně vyjádřili a převedli na jednotky SI, zde kilogramy a jouly. Přitom obecný výpočet vedl na vzorec, ve kterém vystupuje pouze rychlost světla a podíl hmotností, takže převádění atomové hmotnostní konstanty bylo zcela zbytečné.

Nezanedbatelný počet řešitelů dále neměl jasno v tom, při jakých rychlostech je potřeba provést relativistické korekce. Někteří správně uváděli, že původ energie uvolňované při jaderných reakcích byl objasněn až se vznikem speciální teorie relativity; to ovšem neznamená, že se produkty reakce musí pohybovat relativistickými rychlostmi. Jako kritérium pro přechod od klasických vztahů k relativistickým můžeme použít poměr $\beta = v/c$ nebo Lorentzův faktor $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Pokud $\beta \ll 1$ nebo $\gamma \approx 1$, můžeme zůstat u klasických výpočtů. Přesná hranice mezi newtonovskou a relativistickou mechanikou samozřejmě neexistuje, záleží pouze na přesnosti, s jakou chceme počítat. Relativistické vztahy jsou platné vždy, neboť klasické vztahy jsou jejich limitou pro nízké rychlosti, ale klasický výpočet je obvykle méně náročný.

Abych nebyl pouze kritický, tak musím většinu řešitelů pochválit, že nezapomněli na zákon zachování hybnosti. Pokud však někdo tento zákon opomněl, často pak tvrdil, že se část energie alfa částice přesune do tepla. Teplo je podle kinetické teorie energie předávaná při srážkách částic. Jedná se o statistickou veličinu, jejíž definice nemá v systémech s malým počtem částic valný smysl.

A nakonec: thalium (Tl) není titan (Ti).

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz