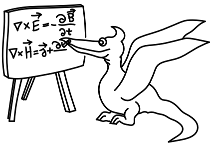


Seriál: Rotor a jeho kopačky

V minulých dílech jsme se podívali na to, jak numericky integrovat diferenciální rovnice a definovali si chaos. Tento díl bude o něčem trochu jiném; naučíme se, jak *vyrobit* chaos. Nandejte si šéfkuchařské čepice, vezměte si jako ingredience různé pružinky, táhla, kuličky, kyvadla a podívejte se na to, co je na chaos potřeba:

1. Zajistěte si, aby vám různé části dynamického systému neulétly donekonečna, pamatujte, že chaos je definovaný pro vázaný systém.
2. Pokud v systému hodně dochází ke tření a k disipaci, musíte systému poskytnout nějaký systém pošťuchování nebo buzení, aby se nepřestal pohybovat. Zase ale nesmí pošťuchování způsobit, že se části systému pohybují nekonečně rychle, to by bylo také svým způsobem porušení podmínky na vázanost systému, protože by unikal někam do pryč v „prostoru rychlostí“.
3. Uvolněte dostatečné množství stupňů volnosti systému. Pokud se nemůže trajektorie pohybovat v dostatku rozměrů, k chaosu z principu nemůže docházet.
4. Přidejte nelinearitu, tj. přidejte do systému síly, které nejsou jen konstantní nebo lineárně závislé na souřadnicích. Žádné nudné síly lineárně závisející na výchylce x jako u pružinky $F = -kx$! Chceme alespoň něco jako $F = -kx^2$!

Garantuji vám, že když všechny tyto ingredience použijete, v drtivé většině případů dostanete chaotický systém. Dost možná z tohoto receptu ještě nejste úplně moudří, ale to nevadí. Od toho, abyste to pochopili, je tu tento díl seriálu. Postupně si v něm každý ze zmíněných kroků vysvětlíme, a nakonec dokonce uvaříme velmi delikátní chaotickou *mapu*.

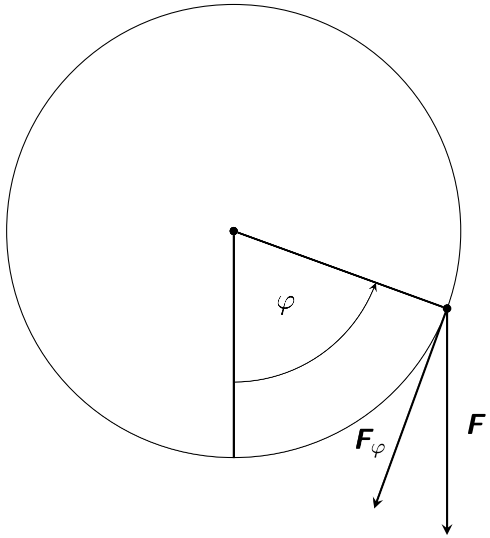
Terminátor? Kdepak, rotor

Začneme hodně jednoduše první ingrediencí, vázaností systému, a uvidíme, kam se to vyvine. Nejjednodušší způsob, jak mít systém vázaný, je jej přivázat nebo dokonce zafixovat tak, aby se sice mohl pohybovat, ale pouze v konečné oblasti prostoru. Představme si, že na tenkou osu připevníme nehmotnou tyčku, na jejímž druhém konci je hmotný bod. Tyčka se může zcela volně otáčet kolem osy, nemůže se však po ní posouvat. K určení polohy bodu v daném okamžiku nám pak stačí jenom jedno číslo, jako vhodný se jeví úhel otočení okolo osy od zvolené referenční polohy. Tomuto úhlu budeme říkat φ. Máme tedy něco, čemu se říká *rotor*, věcičku, co se může otáčet jen kolem dokola v nějakém směru a má *jen jeden stupeň volnosti*, který je navíc automaticky vázaný. Když totiž protočíte úhel φ (v radiánech) o 2π, jste zase na tom samém místě, takže existuje jen konečný interval hodnot φ, ve kterém se náš rotor může z principu pohybovat.

Zopakujme pro pořádek, že pokud popisujeme polohu těžiště rotoru pomocí úhlu φ, je rychlost v_φ ve směru rostoucího[1] φ dána jako

$$v_\varphi = R\dot{\varphi}\,,$$

[1] Tj. φ roste proti směru nebo po směru hodinových ručiček na rotoru. Záleží jen na nás, kterou ze dvou možností *orientace úhlu* si vybereme. Pokud ale zvolíme rostoucí φ třeba po směru hodinových ručiček, kladné v_φ znamená, že se rotor pohybuje právě po směru hodinových ručiček.



Obr. 1: Náčrt gravitační nebo elektrostatické síly působící na rotor a jejího průmětu do směru otáčení. Směr, ve kterém úhel φ roste je schválně načrtnutý tak, aby bylo jasné znaménko u $F_\varphi = -F\sin(\varphi)$. Síla totiž působí *proti* směru růstu φ, a proto musí mít záporné znaménko.

kde $\dot{\varphi}$ je časová derivace φ a R je vzdálenost těžiště rotoru od osy. Pokud chceme zjistit, jaké je zrychlení a_φ ve směru rostoucího φ, předchozí rovnici prostě zderivujeme podle času a dostaneme

$$a_\varphi = \dot{v}_\varphi = R\ddot{\varphi}\,,$$

kde jsme užili toho, že R je konstantní.

Pokud pak použijeme Newtonův zákon $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, kde m je hmotnost rotoru, a uvážíme, že veškeré síly mimo směr otáčení se vyruší díky uchycení na ose, dostáváme jenom jednu rovnici pro pohyb rotoru

$$F_\varphi = ma_\varphi = mR\ddot{\varphi}\,.$$

Pokud byste rotorem otočili tak, aby rotor při $\varphi = 0$ visel dolů ve směru tíhové síly, na rotor by v libovolné poloze působila (jako vždy) konstantní tíhová síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{g} = -mg\boldsymbol{e}_\mathrm{d}$, kde $\boldsymbol{e}_\mathrm{d}$ je vektor mířící dolů. Zprvu se tedy zdá, že na chaos je tíhová síla příliš nudná, ale nesmíme zapomenout, že rotor je vázaný a při každém natočení φ se část tíhové síly vyruší a zbude z ní jen část $\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}\varphi}$ ve směru možného otáčení rotoru (viz obrázek 1). Když si nakreslíme všechny náležité trojúhelníky a použijeme základní goniometrii, dostaneme, že z tíhové síly přežije jen

$$F_{\mathrm{g}\varphi} = -mg\sin\varphi\,, \tag{1}$$

což už je taková zábavnější *nelineární* síla (nezávisí jenom tak na φ, ale i na něčem složitějším). Způsobí ale chaos? Jistě si pamatujete z hodin fyziky, že ne. Svislý rotor je totiž realizací *fyzikálního kyvadla*, které buď osciluje, pěkně periodicky sem a tam okolo svislé polohy, nebo se při dostatečné rychlosti protáčí kolem dokola – také periodicky.

Jak to, že tedy ale nevyrobíme chaos? Zapomněli jsme snad na nějakou z ingrediencí? Nebo jsme jen měli smůlu? První ingredienci máme, systém je vázaný. Tření neuvažujeme, takže druhá ingredience je také v zásadě splněna. A čtvrtou také, síla je přeci nelineární. A třetí? Je jeden stupeň volnosti dost na chaos? Skoro.

Kolik dimenzí na chaos?

Pojďme nejdřív přemýšlet nad tím, kolik dimenzí má stav našeho rotoru. Určitě má nejméně jednu, a to úhel φ. Ale vystihuje pouze φ úplný stav našeho dynamického systému? Představte si následující: rotor je na $\varphi = 0$ a úplně v klidu. Teď si ale představte, že je na $\varphi = 0$, ale řítí se nějakým směrem, $\dot{\varphi}$ je nenulové. Jsou to ty samé stavy systému? Jistě ne. K vystižení stavu rotoru tedy potřebujeme dvě čísla, φ a $\dot{\varphi}$. Říkáme tedy, že se jedná od dvojrozměrný dynamický systém.

Tak ale co ten chaos. Existuje matematická věta, takzvaný *Poincarého-Bendixsonův teorém*, jejímž důsledkem je, že chaos nemůže nastat pro dynamický systém[2] o méně než třech rozměrech. Ouha, to náš rotor ale ještě zatím nesplňuje. Představte si ale teď, že se rotor pohybuje pod časově proměnnou silou $\boldsymbol{F}(t)$. K vystižení úplného stavu systému by pak nestačilo jen říct φ, $\dot{\varphi}$, ale museli bychom také určit čas t, ve kterém se nacházíme a ze kterého se situace může vyvíjet docela jinak než v jiném čase t'.

Pokud tedy umístíme rotor do nějakého pole nelineární časově proměnné síly $\boldsymbol{F}_\varphi(t)$, máme třídimenzionální dynamický systém a už bychom měli najít chaotické chování.

Dávám ti kopačky, rotore!

Pokoušet se řešit pohyb v poli proměnné síly může ale být docela fuška. Budeme tedy předpokládat, že rotor si po většinu času vesele rotuje a po nějakém čase T se náhle zapne síla, která mu během krátkého okamžiku předá impuls a pak se zase vypne. Můžete si ověřit, že pokud působíme po nějaký čas Δt konstantní silou ve směru otáčení, působíme na rotor konstantním zrychlením a dostáváme změnu úhlové rychlosti

$$\Delta\dot{\varphi} = \frac{F_\varphi \Delta t}{mR} \,.$$

Bude se nám hodit rovnici vyjádřit pomocí *impulsu*, který je definován jako

$$I = \int_{\Delta t} F_\varphi \,\mathrm{d}t \,,$$

což speciálně v případě konstantní síly dává $I = F_\varphi \Delta t$. Pro změnu úhlové rychlosti pak dostáváme

$$\Delta\dot{\varphi} = \frac{I}{mR} \,. \tag{2}$$

Pokud ale chceme dostat nějaký chaos, musí síla záviset třeba na úhlu, $F_\varphi = F_\varphi(\varphi)$. Na druhou stranu, pokud je síla takto závislá, nemáme takový hezký vztah pro změnu rychlosti jako (2), protože φ se samozřejmě během Δt změní a tím nebude konstantní působící síla.

[2] Bavíme se o fyzikálních systémech se spojitým časem. Pokud například vezmeme funkci $f(x)$, pak posloupnost postupných iterací této funkce daná vztahem $x_{n+1} = f(x_n)$ může být v jistém slova smyslu chaotická, i když je x jednorozměrné.

Jediný způsob, jak toto jednoduše vyřešit, je předpokládat, že síla působí po tak krátkou dobu Δt, že její efekt předá impuls v jediném bodě φ. Ve výsledku tedy budeme mít, že rotor dostane jednou za časovou periodu T kopanec (impuls) $I = I(\varphi)$ závislý jen na okamžité poloze rotoru. Tento kopanec pak způsobí okamžitou změnu úhlové rychlosti

$$\Delta\dot{\varphi} = \frac{I(\varphi)}{mR}\,, \tag{3}$$

a jinak se bude rotor volně protáčet po svém. Tj. mimo kopance bude $\dot{\varphi}$ konstantní a φ bude rovnoměrně růst s touto rychlosti $\dot{\varphi}$.

V daném přiblížení tedy můžeme explicitně sledovat vývoj systému. Nejlepší je sledovat sekvenci bodů po uběhnutí každé „kopací periody“ T. Úhlovou rychlost a úhel po n kopnutích $\dot{\varphi}_n$, φ_n můžeme z hodnot po předchozím kopnutí $\dot{\varphi}_{n-1}$, φ_{n-1} vyvodit následovně: rotor se mezi kopanci prostě volně otáčí s úhlovou rychlostí $\dot{\varphi}_{n-1}$ a kopance si nevšimne, pro úhel φ_n tedy máme

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + T\dot{\varphi}_{n-1}\,.$$

Naopak úhlová rychlost $\dot{\varphi}$ se mezi kopanci nemění vůbec, ale samotný kopanec ho posune podle předpisu (3)

$$\dot{\varphi}_n = \dot{\varphi}_{n-1} + \frac{I(\varphi_n)}{mR}\,.$$

Vypínání a zapínání gravitace

Představte si nyní, že na rotor umístíme náboj e a umístíme jej mezi dvě velké desky kondenzátoru tak, že mezi nimi vzniká nějaké homogenní[3] elektrostatické pole $\boldsymbol{E}$ ve směru tyčky rotoru, když je $\varphi = 0$ (opět jako na obrázku 1). Na rotor tedy působí síla $e\boldsymbol{E}$, ale do směru otáčení se promítne při tomto natočení jen $F_\varphi = -eE\sin(\varphi)$. Pokud zapneme toto elektrostatické pole jen na chviličku, bude předaný impuls zhruba $I(\varphi) = -eE\Delta t\sin(\varphi)$ a po n kopnutích budeme mít

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \varphi_{n-1} + T\dot{\varphi}_{n-1}\,,\\ \dot{\varphi}_n &= \dot{\varphi}_{n-1} - \tilde{K}\sin(\varphi_n)\,,\end{aligned}$$

kde $\tilde{K} = eE\Delta t/(mR)$. Když označíme $x = \varphi$ a $y = \dot{\varphi}$, jsou tyto iterace mapováním roviny xy opět na rovinu xy. Takovýmto iteracím dynamických systémů se tedy říká *mapy*. Tato mapa, kterou jsme si zrovna odvodili, je jedna z nejjednodušších a nejelegantnějších map chaotického dynamického systému, a proto se jí říká *Standardní mapa*. Vývoj v této mapě je pro řadu počátečních podmínek chaotický a lze to i pro některé hodnoty $\tilde{K}$ a T matematicky dokázat.

Přidám ještě krátkou poznámku k počítačovému generování náhodných čísel zmíněnému v předchozím díle. Mnoho generátorů náhodných čísel v počítači jsou takové trochu legrační triky, jak vzít předchozí pseudonáhodné číslo a nové pseudonáhodné číslo získat pomocí nějaké banální operace (*nechaotické mapy*), která jen není na první pohled vidět. Řada náhodných generátorů tedy produkuje kvaziperiodickou posloupnost čísel, jen se špatně vysledovatelnou pravidelností. Pro potřeby kryptografie toto ale nestačí a často se používají chaotické mapy, kde je pseudonáhodnost o hodně kvalitnější.[4]

[3] Tj. stejné ve všech bodech prostoru.

[4] Protože ale máme v počítači čísla na konečný počet desetinných míst, bude nakonec i chaotická trajektorie v této reprezentaci periodická, ale s olbřímí periodou.

Ale zpátky ke Standardní mapě. Když si vzpomenete na rovnici (1), vidíte, že naše kopání elektrickým polem odpovídá zapínání a vypínání gravitačního pole. Pokud tedy hodně snížíme periodu spínání T a spolu s tím budeme adekvátně snižovat $\tilde{K}$, měli bychom efektivně získat něco jako pohyb kyvadla v homogenním gravitačním poli. V příštím díle si numerickými experimenty ověříme, že Standardní mapa má chaotické vlastnosti a že vskutku tyto trajektorie $\dot{\varphi}_n, \varphi_n$ připomínají trajektorie v případě fyzikálního kyvadla. Ale zjistíme ještě něco – někde chaos je a někde není. A kde bude? Na špičce propisky. Cože? Uvidíte.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.