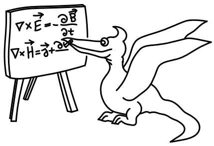


Seriál: Dynamické vaření

V minulém díle jsme se naučili psát programy na simulaci fyzikálních problémů a v tomto díle se dozvíme, k čemu nám to bude dobré. Začneme krátce o tom, co můžeme čekat od dynamického systému, zmíníme nějaké kulečníky, kurzy vaření, a nesmíme vynechat ani věrného průvodce fyzikovým životem, pružinu. Nezapomeneme také na Jindru, který se letos účastnil Fyziklání online – tedy, chtěl jsem říct na Henriho, který se před více než sto lety účastnil takového offline Fyziklání o cenu švédského krále Oskara II. Ale pěkně popořadě.

Stůj nebo kruž!

Ještě v polovině dvacátého století si většina vědců myslela, že pro vázaný systém existují po ustálení jen dva možné druhy vývoje – stacionární nebo statický. Ale co to znamená vázaný systém? To znamená systém, který „neuteče" pryč z nějakých mezí. Třeba jako kulička na pružině, v klidu si poskakuje, ale pokud by měla ambice vydat se do světa, síla pružiny by ji vždy přitáhla zpět. Dokážeme si představit kuličku, která ve světě bez tření pravidelně stacionárně kmitá donekonečna. Stejně tak ve světě s třením vidíme pružinku, která se ustaluje do statického stavu. Existuje nějaká třetí možnost?

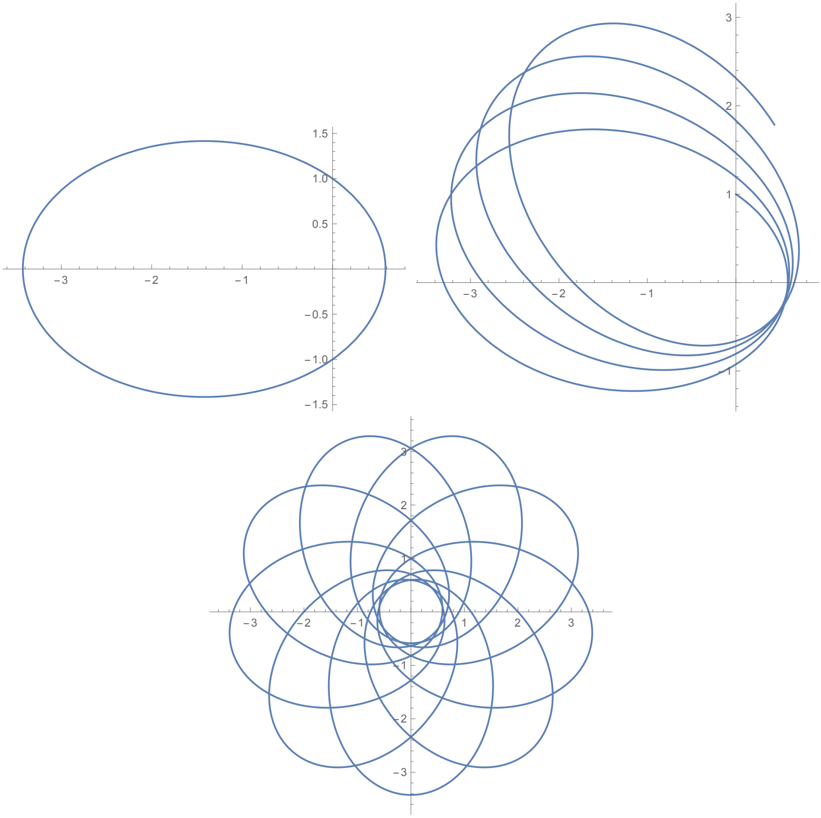
Příkladů, které se ustalují v klidu, známe velmi mnoho. Třeba náš kop fotbalákem nebo hod kriketákem po jisté době vyústí v úplně zastavený míč někde opodál na zemi. Ale když může třením vycházet energie ven, může proudit i dovnitř. Uvažte například hrnec s vodou, který dáte ohřívat tak jemným plamenem, že se nikdy nezačne vařit, a přiklopíte jej pokličkou, aby se vám to všechno nevypařilo. Voda si pak na dně hrnce ustanoví cyklickou strukturu stoupajících a klesajících sloupců vody, která se souhrnně nazývá Bénardovy buňky (viz obrázek 3).

Do té míry, do jaké můžeme náš pokus na plotně takto idealizovat, jsou jednou ustanovené Bénardovy buňky navždy dané a neměnné – proudění ve vodě je stacionární. Nemusíme však vůbec být tak přízemní a můžeme hledět k nebesům. Také pohyby planet jsou ideálně (tj. v přiblížení platném pro tisíce minulých i následujících let) stacionární, tj. periodické nebo alespoň kvaziperiodické.

Co ale znamená kvaziperiodická orbita? Příklad můžete vidět na obrázku 1. Jedná se typ pohybu, který může nastat pouze pro systémy s více než jedním stupněm volnosti. V těchto odlišných stupních volnosti se pak mohou systémy pohybovat s jinými periodami. Například na obrázku 1 mění částice periodicky svojí vzdálenost od centra, ale zároveň i okolo centra obíhá. Pokud je oscilace vzdálenosti od centra v celočíselném poměru s periodou oběhu okolo, trajektorie se po nějaké době „strefí" do svého začátku a dál pokračuje zase stejně. Pokud jsou ale periody nesouměrné, orbita má sice vysoce předvídatelný a jednoduše popsatelný tvar, ale nikdy se neuzavře a vždy o kousek uhýbá svému počátku.

Zrod chaosu

Zmíněné systémy jsem vyjmenoval zcela úmyslně, protože všechny z nich jsou příklady dynamických situací, kde stačí málo a vzniká v nich ten zmiňovaný třetí druh pohybu. Třeba pokud máme kuličku na pružince a periodicky do ní šťoucháme (ať už se třením nebo bez něj),

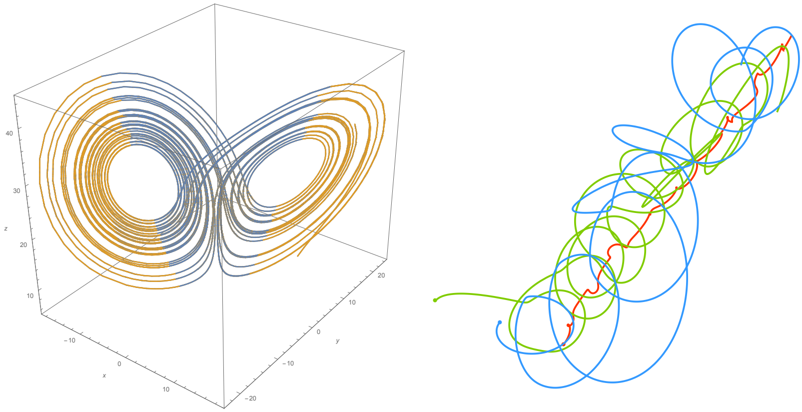


Obr. 1: V horní polovině obrázku vidíte příklad periodické trajektorie, která se uzavře po jednom oběhu okolo centra, a další, která se po každém oběhu kousek stočí. Některé orbity se mohou po několika obězích uzavřít, jako je vidět pro devět oběhů v dolní polovině obrázku. V drtivé většině případů ale stáčení pericentra orbity znamená, že už se nikdy neuzavře.

s vysokou pravděpodobností můžeme nastavit počáteční podmínky tak, aby se kulička chovala *chaoticky*.

To stejné platí pro ohřev vody, jedná se dokonce zhruba o systém, který studoval v šedesátých letech Edward Lorenz jakožto model počasí a narazil v něm pro určitou volbu parametrů na chaotické chování vykreslené na obrázku 2. S Lorenzovým objevem a numerickými simulacemi teprve chaos prorazil jako široce přijímaný vědecký fakt, ale jeho existence již byla známa nebo tušena mnohem déle.

Například James Clerk Maxwell, objevitel slavných rovnic elektromagnetismu, se zabýval také kinetickou teorií plynů. V té se informace a znalost počátečních podmínek rozpouští se srážkami atomů podobně jako ve hře kulečníku spolu se srážkami kulečníkových koulí. Ve svém eseji o svobodné vůli z roku 1873 argumentoval, že s determinismem to nebude tak žhavé, protože naše existence je protkána nesmírným množství takovýchto neurčitých okamžiků, které



Obr. 2: Příklady slavných systémů s chaotickým chováním – Lorenzův atraktor (vlevo) a příklad chaotických trajektorií tří těles (vpravo).

nelze vědecky rozšifrovat. Nakonec ale došel k závěru, že musí existovat nějaký rámec a mez této nepředvídatelnosti, protože jak už zmíněno – *žádný levhart nemůže měnit svoje skvrny*.

Dvanáct let na to vyhlásil švédský král Oskar II. při příležitosti svých šedesátých narozenin cenu pro kohokoliv, kdo matematicky vyřeší problém pohybu N těles přitahujících se newtonovskou gravitační silou. Již tou dobou proslulý francouzský matematik Henri Poincaré tušil, že se jedná o poněkud velké sousto a snažil se řešit alespoň speciální případ pohybu tří takových těles.

Ke svému zděšení zjistil, že existují počáteční podmínky, pro které je pohyb nesmírně komplikovaný a nepředvídatelný. I když problém vlastně nevyřešil, cenu stejně vyhrál, protože se všichni shodli na tom, že si to Henri docela podal.

Byli i další vědci a matematici, kteří kráčeli ve stopách Maxwella a Poincarého, ale doopravdy vznikl pojem chaosu v šedesátých letech minulého století s nalezením Lorenzova modelu atmosférické konvekce.

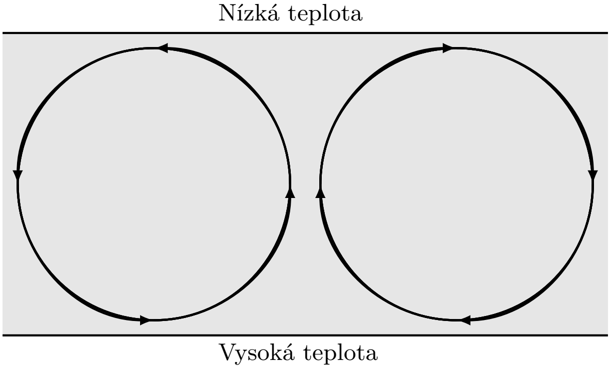
Lorenzův model

Vlastně ještě nevíte, co to ten chaos je, kromě toho, že je to neperiodické a nestatické chování vázaného systému. Jediný další díl do skládanky je *globální nestabilita* takového chování.

Stejně jako propiska postavená na špičku spadne při sebemenší výchylce, tak stačí sebemenší výchylka od chaotické trajektorie a dostanete se úplně jinam. Vtip je nicméně v tom, že u propisky je nestabilita pouze v jednom okamžiku úplného klidu na špičce a uprostřed pádu už ji nic moc nerozhodí. U chaotického pohybu je tomu naopak – stačí libovolně malá výchylka *kdekoliv a kdykoliv* a časem se systém dostane do úplně jiného stavu. Jak přesně tento koncept osedlat se dozvíte v příštím díle.

Pro úplnost ještě zmíním velmi speciální třídu systémů, která byla objevena až před nějakými třiceti lety a od té doby ještě nebyla docela prozkoumána. Tyto systémy totiž vykazují aperiodický velmi komplikovaný vývoj, ale nenastává v nich zmíněná globální nestabilita. Říká se jim nechaotické aperiodické systémy. K jejich vytvoření je ale potřeba dost zvláštních podmínek, a proto když už narazíme na komplikovaný aperiodický pohyb, bývá v drtivé většině případů chaotický.

Pojďme se nyní podívat na první příklad chaotického systému, Lorenzův model. Edward Lorenz nebyl spokojen s paradigmaty předpovídání počasí tak, jak byly nastaveny v šedesátých letech minulého století. Rozhodl se tedy na superjednoduchém modelu ukázat, že nelineární efekty v modelech atmosféry mohou způsobit pěkné divočiny.



Obr. 3: Nákres Bénardových buněk. Buňka točící se po směru musí mít za souseda vždy buňku točící se proti směru a naopak – je proto lepší chápat konvekci spíše jako zdvihající se a rozutíkající sloupce horké a studené tekutiny.

Začal s předpokladem periodicky opakujících se Bénardových buněk ve dvourozměrné kapalině jako na obrázku 3. Tentokrát ale místo dna hrnce byl vespod povrch Země ohřátý sluncem a místo vody proudil atmosférický vzduch, který se nahoře v atmosféře ochladil a pak klesal zase zpět. Předpokládal pak, že konvekce neboli proudění má takovýto pevný charakter, který lze parametrizovat pouze třemi bezrozměrnými proměnnými $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$. $X(t)$ parametrizuje rychlost proudění v buňkách a $Y(t)$ teplotní rozdíl mezi stoupajícími a klesajícími sloupci vzduchu. V případě nulové konvekce by byl průběh teploty odzdola nahoru lineární, vzhledem ke konvekci se ale výškový profil prohne a míru tohoto prohnutí parametrizuje $Z(t)$.

Pro tento model získal Lorenz soustavu třech efektivních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X)\,,\\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y\,,\\ \dot{Z} &= XY - bZ\,,\end{aligned}$$

kde kladné σ charakterizuje disipaci v kapalině, r je parametr závisející na vlastnostech kapaliny a lineárně také na rozdílu teplot mezi vrchní a spodní vrstvou buňky a b je opět kladný faktor, který závisí na konkrétní geometrii buňky.

V rovnicích můžete vidět, že všechny proměnné se sami tlumí, tj. $\dot{X} = -\sigma X + \ldots$, $\dot{Y} = -Y + \ldots$, $\dot{Z} = -bZ + \ldots$, tj. zmenšují se s vlastní velikostí. To je důsledkem toho, že modelují disipativní tekutinu, kde se třením a difúzí ztrácí i teplo i rychlost proudění. V řadě případů to znamená, že se tekutina ustálí na nějakém stacionárním stavu, v tomto případě však se stoupajícím teplotním rozdílem (a tedy se stoupajícím r) parametry začnou chaoticky oscilovat, jako je vykresleno v obrázku 2. Předělové r numericky zjistíte v seriálové úloze.

Edward Lorenz se netvářil, že se jedná o nějaký extra realistický model – naopak, říkal, že je to ten nejjednodušší alespoň trochu uvěřitelný model, který dokázal vymyslet a který zároveň vykazuje takovéto aperiodické chování. Byla tu ale jedna další věc, kterou vůbec nečekal a narazil na ní jen náhodou. Při opětovném puštění simulace totiž zadal přístroji počáteční podmínku na menší počet desetinných míst, protože desetitisícinky se přeci na výsledku vůbec neprojeví. Ale bylo tomu přesně naopak. O tom však až příště.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.