

Úloha VI.1 ... antijádru

2 body; průměr 1,79; řešilo 57 studentů

Máme dvě homogenní nerotující planety tvaru dokonalých koulí s vnějšími poloměry R_Z . První z nich je dokonalá koule o hustotě ρ a na jejím povrchu je gravitační zrychlení a_g . Druhá je dutá do poloviny jejího poloměru a až pak je plná.

- a) Pokud by obě planety byly ze stejného homogenního materiálu, na povrchu které planety bude větší gravitační zrychlení a jaký bude poměr mezi hodnotami gravitačního zrychlení na obou planetách?
- b) Pokud by i na povrchu druhé planety bylo gravitační zrychlení a_g , jaká by musela být hustota druhé planety?

Karel zase vymyslel něco trochu astro s dutou zemí.

Intenzita gravitačního pole, a tedy i zrychlení na volný objekt jím vytvářené, je stejná, ať už jsme vzdáleni od hmotného bodu s nějakou hmotností či jsme na povrchu tělesa, které je kulové, má sféricky symetricky rozloženou hustotu (tj. závisí pouze na vzdálenosti od jeho hmotného středu) a jeho poloměr je roven vzdálenosti od hmotného bodu v předchozím případě. Gravitační zrychlení na povrchu homogenní koule tedy můžeme vypočítat ze známého vztahu $a_g = Gm_i/R_Z^2$, kde m_i je hmotnost dané koule. Hmotnost plné koule ze zadání, kterou si označíme M_1 je tedy pevně dána jako $M_1 = a_g R_Z^2/G$.

- a) Hmotnosti koulí můžeme počítat z objemů, tedy $M_1 = \rho V_Z$ a $M_2 = \rho(V_Z - V_{in})$, kde ρ je hustota koulí, V_Z je objem plné koule a V_{in} je objem dutiny. Objem koule je obecně $V_i = (4/3)\pi r_i^3$, kde r_i je poloměr dané koule. Vyjádříme si nyní hmotnost duté koule M_2 v závislosti na hmotnosti M_1

$$M_2 = \rho(V_Z - V_{in}) = \rho \frac{4}{3}\pi \left(R_Z^3 - \frac{R_Z^3}{8} \right) = \frac{7}{8}M_1.$$

Gravitační zrychlení na povrchu první, plné, planety by bylo

$$a_{g1} = \frac{GM_1}{R_Z^2}.$$

Gravitační zrychlení na povrchu druhé, duté, planety by bylo

$$a_{g2} = \frac{GM_2}{R_Z^2} = \frac{7GM_1}{8R_Z^2} = \frac{7}{8}a_{g1}.$$

Odpovědí tedy je, že gravitační zrychlení na povrchu první planety by bylo větší, a to 8/7krát víc než na druhé planetě.

- b) Ponechme označení hustoty plné koule jako ρ a hustotu duté koule označíme jako ρ_2 . Hmotnost obou planet má být stejná, takže hustota duté planety musí být o něco vyšší. Zapišme si vztahy pro gravitační zrychlení na povrchu obou planet v závislosti na hustotě:

$$\tilde{a}_{g1} = G \frac{\rho V_Z}{R_Z^2}, \quad \tilde{a}_{g2} = G \frac{\rho_2 (V_Z - V_{in})}{R_Z^2} = G \frac{7\rho V_Z}{8R_Z^2}.$$

Pokud má platit, že $\tilde{a}_{g1} = \tilde{a}_{g2}$, pak dostáváme výsledek

$$\rho_2 = \frac{8}{7}\rho.$$

Pokud dutá planeta bude mít hustotu 8/7krát tak velkou, co plná, pak budou mít obě planety na svém povrchu stejné gravitační zrychlení.

Poznámky k došlým řešením

Poznamenejme, že úloha byla pouze o určení gravitačního zrychlení. Na povrchu Země můžeme měřit spíše rozdíl tíhového zrychlení, ve kterém je i odstředivé zrychlení, a zrychlení způsobeného vztlakovou silou vzduchu. Úloha byla zadána jako jednoduchá a proto jsme ani diskuzi těchto vlivů neočekávali, nicméně bychom za ně dali bonusové body, pokud by byla diskuze správná.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.