Úloha V.3 ... ta jemná nádoba
3 body; průměr 2,65; řešilo 34 studentů

Mějme válcovou nádobu, jež zaujímá objem $V = 1\,\mathrm{l}$. Nádoba je uzavřena vzduchotěsným pohyblivým pístem, který má nezanedbatelnou hmotnost M. Dále víme, že nádoba je vodorovnými přepážkami rozdělena na n komor a v i-té komoře (číslováno odshora) je $2^i a$ částic, kde a je blíže neurčená konstanta. Přepážky nejsou k nádobě připevněny, přesto nedovolují, aby si komory, v nichž je ideální plyn, vyměňovaly teplo nebo částice. Celý systém je v rovnováze. Poté zdvojnásobíme hmotnost pístu a počkáme, až se náš systém opět ustaví v rovnováze. Jak se změní objem, který plyn v nádobě zaujímá? Atmosferický tlak neuvažujte.

Náry pod tlakem vymyslel úlohu o tlaku.

Hned ze začátku musíme podotknout, že v zadání není specifikován jistý „detail", který významně ovlivňuje správné řešení. Tímto prvkem je rychlost procesu přechodu mezi ustálenými stavy v nádobě. Jinými slovy, záleží na tom, jestli na píst ten druhý jen tak laxním způsobem upustíme, nebo naopak „šetrně" položíme. V řeči zvyšování hmotnosti pístu pak mluvíme opět o rychlosti nárůstu jeho hmotnosti. První z případů lépe odráží praxi, avšak jeho kvantitativní rozbor nespadá do rámce středoškolské ani FYKOSí termodynamiky. Jde totiž o čistě dynamický problém, na nějž nejsou kladeny požadavky kvazistaticity, které nám třeba umožní definovat pojem teplota. Problematikou „rychlých" procesů se zabývá nerovnovážná termodynamika, která by nám také odpověděla, že za těchto okolností k žádné rovnováze nedojde, píst bude okolo své rovnovážné polohy oscilovat. Intuitivně lze tuto skutečnost nahlédnout, když si rozmyslíme, že při vyrovnání tlaků bude mít píst nenulovou pohybovou energii, kterou ztratí až po opuštění tohoto rovnovážného stavu. Těm z vás, kteří si zadání upřesnili podle svého, a dle svého upřesnění úlohu i správně vyřešili, jsme udělovali plný počet bodů.

V dalším se již budeme zaobírat jen kvazistatickou variantou, kdy se pístu „dostatečně pomalu" zvyšuje hmotnost. Tím „dostatečně pomalu" myslíme tak rychle, aby tlak pístem vyvíjený byl vždy roven tlaku plynu v horní komoře. Jedině tímto pomalým přechodem zajistíme, že vždy budeme přecházet mezi rovnovážnými stavy, bude nám po celý děj platit klasická stavová rovnice a podobně.

Takto formulovaná úloha tedy spadá do kategorie vyšetřování rovnovážných stavů v termodynamice. V tomto případě se jedná o rovnováhu mechanickou, kterou známe nejlépe z mechaniky. Pod mechanickou rovnováhou v termodynamice rozumíme silové vyrovnání působící na každou fyzickou, ale i imaginární plošku uvnitř našeho systému. To jinými slovy vynucuje vyrovnání tlaků. Přirozené je se ptáti, na jaké rovnovážné hodnotě se náš tlak v různých komorách ustálí. Můžeme to nějak určit rovnou? Není těžké si rozmyslet, že argument rovnováhy bude platit mezi každými dvěma sousedními komorami, což nás vede k závěru, že při dosažení rovnováhy bude nastolena rovnost tlaků napříč celou nádobou a hodnota tohoto tlaku bude rovna tlaku, který určují vnější podmínky – okamžitá hmotnost pístu. Při vyšetřování změny objemu se tak můžeme omezit na zkoumání změny objemu v jedné komoře, protože, jak jsme si rozmysleli výše, podmínky jsou v případě každé komory stejné. Pro výchozí a koncový stav tlaku v každé z komor tak můžeme s využitím stavové rovnice ideálního plynu psát

$$\frac{gM}{S} = p_0 = \frac{NkT_0}{V_0} = \frac{NkT_0}{Sd_0}\,, \tag{1}$$

kde 0 označuje počáteční, 1 koncový stav, p tlak v komoře, g tíhové zrychlení, M počáteční hmotnost pístu, S plochu pístu, N počet částic v komoře, k Boltzmannovu konstantu, T teplotu plynu, d výšku pístu. Podobně pro koncový rovnovážný stav platí

$$\frac{2gM}{S} = 2p_0 = \frac{NkT_1}{V_1} = \frac{NkT_1}{Sd_1}\,. \tag{2}$$

Jak ale souvisí změna teploty se změnou výšky komory? Lze to určit? Vraťme se zpět k otázce podstaty procesu, který se realizuje. Už víme, že děj probíhá za neustálé vyrovnanosti tlaku pístu s tlakem v komoře, navíc při ději do komory nepřichází žádné teplo. Takový děj je znám jako děj adiabatický. Přemostění mezi těmito dvěma rovnovážnými stavy nám podá energetická bilance procesu. K tomu potřebujeme kalorimetrickou rovnici pro ideální plyn a vztah pro práci při adiabatickém ději

$$\Delta U \;= \frac{f}{2}Nk(T_1 - T_0) = -\int_{V_0}^{V_1} \frac{p_0 V_0^{1+2/f}}{V^{1+2/f}}\,\mathrm{d}V = p_0 V_0^{1+2/f}\left[\frac{f}{2}V^{-2/f}\right]_{Sd_0}^{Sd_1}\,,$$

kde jsme pro obecnost předpokládali f stupňů volnosti plynových částic a rovnou dosadili za Poissonovu konstantu $\kappa = (f+2)/f$. Drobné úpravy s dosazením za p_0 a V_0 ze stavové rovnice vedou na vedou na

$$\frac{f}{2}(T_1 - T_0) = \frac{f}{2}T_0\left[\left(\frac{d_1}{d_0}\right)^{-2/f} - 1\right]. \tag{3}$$

Abychom mohli ze vztahu vyloučit teploty, využijeme sadu rovnic (1) a (2), z níž přímočaře plyne

$$2\frac{d_1}{d_0} = \frac{T_1}{T_0}$$

a po dosazení do (3) máme

$$\frac{f}{2}\left(2\frac{d_1}{d_0} - 1\right) = \frac{f}{2}\left[\left(\frac{d_1}{d_0}\right)^{-2/f} - 1\right].$$

Řešení této rovnice pro neznámou d_1/d_0 dává

$$\frac{d_1}{d_0} = 2^{-f/(f+2)} = 2^{-1/\kappa}\,.$$

Tím jsme získali poměr výšek komor na konci ku na začátku děje. K dobrání se konečné odpovědi na otázku zadání již vedou dvě jednoduché úvahy. Uvědomíme si, že byl spočten kompresní poměr pro libovolnou komoru, takže rovnou známe kompresní poměr pro celou nádobu, a navíc, protože se jedná o válcovou nádobu, je poměr výšek pístu nade dnem přímo roven poměru objemů plynu, který je pístem do nádoby uzavřen. Řešení naší slovní úlohy už postrádá pouze slovní odpověď. Po opatrném zdvojnásobení hmotnosti pístu bude plyn v nádobě zaujímat objem $2^{-1/\kappa}$ litrů.

Jiří Nárožný
nahry@fykos.cz