Úloha IV.E ... někdo to rád vlažné

8 bodů; průměr 4,29; řešilo 48 studentů

Změřte závislost teploty na čase v uvařeném šálku čaje. Proměřte klidný případ i čaj míchaný lžičkou. Dále ověřte, že doba vychladnutí na pitnou teplotu nezávisí na tom, zda se s čajem míchá či nikoli.

Michal upravil xkcd.

Teorie

Budeme předpokládat přenos tepla pouze vedením. Uvažujme, že teplota vody t_v je v celém objemu stejná a je rovna teplotě hrnku (keramika vede teplo oproti vzduchu velmi dobře). Pokojovou teplotu označme t_p. Uvažujme, že teplota vody se mění tak pomalu, že vedení tepla můžeme považovat za ustálené. Pak za dobu $\mathrm{d}\tau$ se vedením přenese teplo

$$\mathrm{d}Q = k\ (t_\mathrm{p} - t_\mathrm{v})\ \mathrm{d}\tau\,, \tag{1}$$

kde k je konstanta. Tepelný tok je záporný, protože jde ven z hrnku. Abychom snížili teplotu vody a hrnku o teplotu $\mathrm{d}t$, musíme odebrat teplo

$$\mathrm{d}Q = C\,\mathrm{d}t\,, \tag{2}$$

kde C je tepelná kapacita hrnku a vody. Rovnice (1) a (2) dohromady dávají

$$k\ (t_\mathrm{p} - t_\mathrm{v})\ \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}Q = C\,\mathrm{d}t\,.$$

Neznáme obecně ani konstantu k, ani C, proto zavedeme jinou konstantu $\lambda = k/C$. Pak po úpravě (separaci proměnných)

$$-\frac{1}{\lambda}\frac{1}{t - t_\mathrm{p}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau\,,$$

což je diferenciální rovnice. Obě strany zintegrujeme a dostaneme

$$-\frac{1}{\lambda}\ln\left(t - t_\mathrm{p}\right) = \tau + D\,,$$

kde D je nějaká integrační konstanta (určíme později z počátečních podmínek), odkud

$$t(\tau) = \mathrm{e}^{-\lambda(\tau + D)} + t_\mathrm{p}\,,$$

po úpravě

$$t(\tau) = E\mathrm{e}^{-\lambda\tau} + t_\mathrm{p}\,, \tag{3}$$

kde E je opět konstanta, kterou je možné vyjádřit pomocí původní D a kterou tedy též můžeme určit z počátečních podmínek. Počáteční podmínka je, že na počátku (v čase 0) je teplota t_0, tedy $t(0) = 0$. Po dosazení do (3) dostaneme

$$t_0 = E + t_\mathrm{p} \quad \Rightarrow \quad E = t_0 - t_\mathrm{p}\,,$$

a tedy závislost teploty na čase je

$$t(\tau) = (t_0 - t_\mathrm{p})\,\mathrm{e}^{-\lambda\tau} + t_\mathrm{p}\,. \tag{4}$$

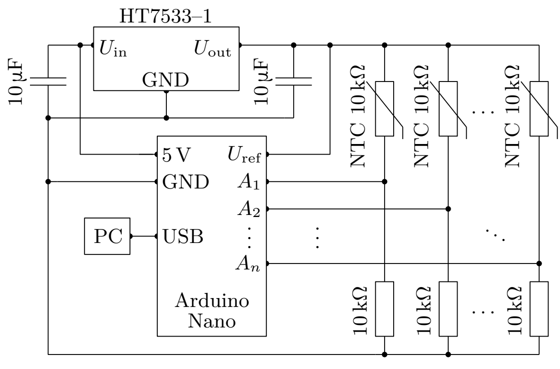
Rozdíl případů, když se s čajem míchá a když nikoliv, nedokážeme snadno kvantitativně popsat, pokusme se alespoň odhadnout několik rozdílů. Výše jsme předpokládali, že teplota vody je v celém objemu v každém čase stejná a je stejná jako teplota hrnku. To však není pravda, nejvyšší teplotu bude mít voda přibližně ve středu hrnku, blíže u stěn bude teplota o málo nižší a teplota hrnku bude též nižší. Jestliže čajem mícháme, pak tuto teplejší vodu ze středu hrnku přemisťujeme k okraji. Z rovnice (1) vidíme, že teplo přenesené za jednotku času je úměrné teplotě vody a hrnku, přesněji teplotě vnější stěny hrnku. Jestliže tuto teplotu mícháním zvýšíme, tepelný tok bude vyšší, a tedy čaj se bude ochlazovat rychleji. Kovová lžíce navíc teplo velmi dobře vede a odvádí z vody pryč. Jestliže mícháme lžičkou, pak nad hladinou rukou přemisťujeme vzduch, nad hladinu se dostává vzduch chladnější a opět dojde k rychlejšímu ochlazování. Ze všech těchto důvodů by doba vychladnutí na pitnou teplotu měla být nižší v případě, že se s čajem míchá.

Měření teploty

Teplota byla měřena pomocí NTC termistorů 2322 640[1], který má při teplotě 25 °C odpor 10 kΩ, při vyšších teplotách odpor klesá (termistor je NTC – *negative temperature coefficient*).

Automatizovat měření odporu by bylo možné pomocí multimetru připojeného k počítači, nicméně by v jednom okamžiku bylo možné měřit jen tolik teplot, kolik máme k dispozici multimetrů připojitelných k počítači. Protože chceme provádět více měření paralelně, zvolíme jiný způsob.

Měření odporu můžeme snadno převést na měření napětí pomocí napěťového děliče (viz obrázek 1), který se skládá obecně ze dvou různých odporů, v našem případě z termistoru a odporu $R_{\mathrm{ref}} = 10\,\mathrm{k\Omega}$. Zanedbáme-li proud tekoucí případným voltmetrem, pak oběma součástkami teče stejný proud, proto dle Ohmova zákona poměr napětí na nich je roven poměru jejich odporů. Budeme-li měřit napětí na referenčním odporu R_{ref}, při teplotě 25 °C naměříme $U_{\mathrm{ref}}/2$, jestliže teplota stoupne, odpor termistoru klesne, napětí na něm taktéž a my na referenčním odporu naměříme napětí vyšší.



Obr. 1: Schéma zapojení pro automatizované měření teploty pomocí termistorů a Arduino Nano.

Automatizovat měření napětí je již podstatně snazší. Použili jsme Arduino Nano[2], což je deska obsahující mikrokontrolér Atmel ATmega168 a převodník UART na USB. Obsahuje něko-

[1] `http://www.gme.cz/img/cache/doc/118/042/ntc640-10k-datasheet-1.pdf`
[2] `http://arduino.cc/en/Main/arduinoBoardNano`

lik 10bitových analogových vstupů (na obrázku označených $A_1, \ldots, A_n$), které umožňují měření napětí (přesněji měří poměr měřeného napětí a referenčního napětí U_{ref}). Jako referenční napětí (a též napětí pro napěťový dělič) sloužil 3,3 V stabilizátor HT7533–1. V principu je možné za referenci použít přímo 5 V z USB, nicméně toto je velmi závislé na použitém kabelu, dalších připojených zařízeních apod. a může se v průběhu měření velmi měnit (ačkoliv na jeho hodnotě měření nezávisí, šum na referenčním napětí zvýší šum měřených hodnot), proto je vhodnější použít stabilizátor.

Mikrokontrolér snadno naprogramujeme, aby v nějakých časových intervalech (v našem případě asi 1 s) po sériovém portu posílal aktuální hodnotu napětí na analogových vstupech. Na počítači, ke kterému je Arduino přes USB připojeno, pak tyto hodnoty ze sériového portu čteme a ukládáme do souboru.

Je třeba též převést naměřené napětí na teplotu. To je možné buď s pomocí údajů, které uvádí výrobce termistoru (nejprve je třeba ze znalosti R_{ref} přepočítat napětí na odpor; po krátkém výpočtu zjistíte, že na U_{ref} skutečně nezávisí), nebo provedeme kalibraci jiným měřidlem. My zvolili druhou metodu a provedli kalibraci pomocí dvojice číslicových teploměrů Dallas DS18B20[3], které byly též připojeny na mikrokontrolér. Oba teploměry i všechny termistory byly ponořeny ve vodě, která byla míchána, na počátku měla teplotu asi 95 °C, postupně byla okolním vzduchem ochlazena na pokojovou teplotu a nakonec byla ochlazena ledem na asi 0 °C, přičemž byly zaznamenávány teploty obou teploměrů (nakonec se z nich vzal průměr) a hodnota napětí (přesněji řečeno poměr měřeného a referenčního napětí) naměřená mikrokontrolérem. Pro každý z termistorů byla naměřena kalibrační křivka. Vzhledem k tolerancím jednotlivých součástek se křivky pro každý termistor s daným referenčním odporem mírně lišily, proto po provedení kalibrace nebylo možné termistory mezi sebou navzájem vyměňovat, aniž bychom výrazně zvýšili nejistotu měření.

Na závěr kapitoly ještě poznamenejme, že popsaný postup je možné použít pro měření i dalších veličin, které dokážeme převést na napětí.

Měření

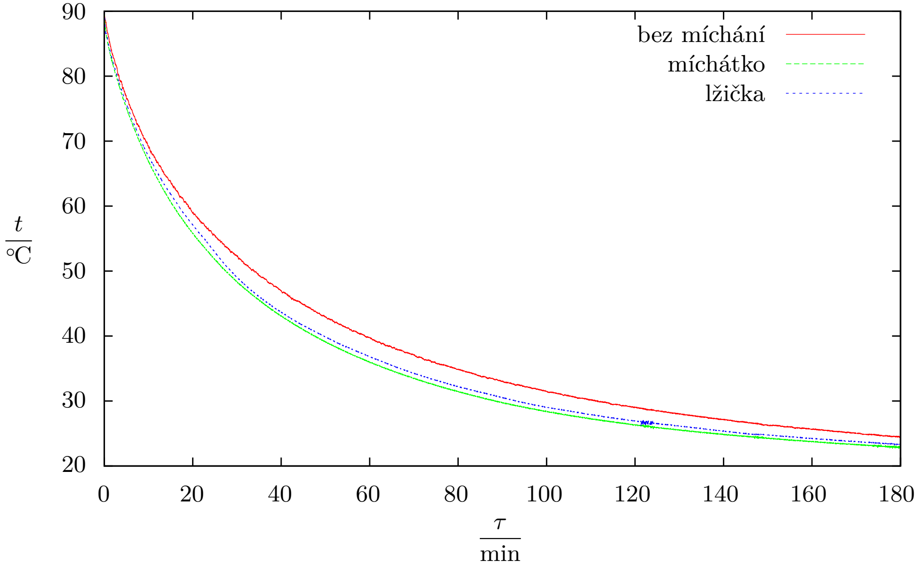
Křivka chladnutí byla vždy zároveň měřena pro tři případy – voda v hrknu se nemíchala, voda byla míchána definovaně pomocí rotující kancelářské sponky na dně hrnku (pod hrnkem rotoval magnet stálou úhlovou rychlostí) a voda byla míchána lžičkou. Měření všech tří případů vždy probíhala zároveň, aby se odstranil vliv rozdílné pokojové teploty, která se pohybovala mezi 20,0 °C a 21,5 °C. Objem vody v hrnku byl vždy asi 0,5 l.

Ve všech případech byly použity pro měření tři termistory, jeden připevněný na dně hrnku u okraje, druhý na vnitřní straně stěny hrnku těsně pod hladinou a třetí přibližně na ose hrnku v polovině výšky hladiny. Zaznamenány byly vždy všechny tři teploty, přičemž při zpracování bylo zjištěno, že jejich rozdíl je srovnatelný s nejistotou měření teploty, proto z nich byl vypočítán průměr, který byl dále považován za průměrnou teplotu vody v hrnku.

U prvních dvou případů předpokládáme, že rozptyl naměřených hodnot bude malý, protože buď nemícháme, nebo mícháme vždy stejně, nicméně míchání lžičkou mohlo být v každém případě jiné, proto rozptyl předpokládáme vyšší.

Křivka chladnutí pro všechny tři případy byla vzhledem k časové náročnosti až do pokojové teploty měřena jednou, viz obrázek 2. Další měření byla ukončena při 50 °C, což je přibližně teplota, při které dva organizátoři již označili teplotu čaje za pitnou.

[3] `http://www.gme.cz/img/cache/doc/530/067/ds18b20-datasheet-1.pdf`



Obr. 2: Naměřené křivky chladnutí.

Měřené křivky vždy začínaly těsně nad 90 °C (to proto, že voda se lila do hrnku, který měl pokojovou teplotu, a tedy její teplota poklesla dříve, než senzory teploty zaregistrovaly změnu teploty). Za dobu vychladnutí na pitnou teplotu, kterou máme měřit, tedy budeme dále považovat dobu, za kterou se teplota vody snížila z 90 °C na 50 °C. Naměřené časy uvádíme v tabulce 1.

Tabulka 1: Naměřené doby zchladnutí vody v hrnku z 90 °C na 50 °C v závislosti na způsobu míchání.

$\frac{T_{\text{bez míchání}}}{\text{s}}$	$\frac{T_{\text{míchátko}}}{\text{s}}$	$\frac{T_{\text{lžička}}}{\text{s}}$
2 035	1 648	1 723
1 967	1 666	1 693
2 018	1 697	1 737
2 061	1 731	1 653
1 996	1 701	1 683
1 983	1 682	1 705
2 034	1 699	1 716
2 035	1 709	1 671
$2\,020 \pm 40$	$1\,690 \pm 20$	$1\,700 \pm 20$

Hypotéza o rovnosti středních hodnot

Z průměrných hodnot a nejistot uvedených v tabulce 1 by se již dalo usuzovat, že doba vychladnutí na pitnou teplotu závisí na tom, zda s čajem mícháme, protože intervaly spolehlivosti se nepřekrývají. Podívejme se však na problém, který máme řešit, z pohledu statistiky.

Testujme hypotézu, že doba vychladnutí na pitnou teplotu nezávisí na tom, zda se s čajem míchá lžičkou či nikoli. Znovu připomeňme, že měření probíhalo vždy po trojicích, tedy v tabulce 1 měření, která jsou na jednom řádku, proběhla současně a za stejných podmínek, měření na různých řádcích mohla proběhnout za různé teploty, tlaku, vlhkosti… Pro testování využijeme Studentův test pro dvojice. Testujeme, že střední hodnota doby vychladnutí na pitnou teplotu v případě, že s čajem mícháme, je stejná jako střední hodnota doby vychladnutí na pitnou teplotu v případě, že s čajem nemícháme.

Hypotézu budeme testovat na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05 = 5\,\%$, která udává pravděpodobnost toho, že hypotézu zamítneme, ačkoliv platí (tzv. chyba 1. druhu). To nicméně nic neříká o pravděpodobnosti toho, že hypotézu nezamítáme, ačkoliv neplatí (tzv. chyba 2. druhu).

Označme n pozorované dvojice (x_i, y_i), kde $i = 1, 2, \ldots, n$, a jejich rozdíly $d_i = x_i - y_i$. Vypočítáme aritmetický průměr jejich rozdílů

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_i$$

a výběrovou směrodatnou odchylku jejich rozdílů

$$s(d) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(d_i - \bar{d}\right)^2}\,.$$

Pozorovaná hodnota testovacího kritéria je

$$t = \frac{\bar{d}}{s(d)} \sqrt{n-1}$$

a porovnáváme ji s doplňkem kritického oboru

$$\overline{W}_\alpha = \left\langle -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1); t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\rangle\,,$$

kde $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ je $(1-\alpha/2)$-kvantil Studentova rozdělení s $n-1$ stupni volnosti. Jestliže $t \in \overline{W}_\alpha$, hypotézu nezamítáme, v opačném případě hypotézu na hladině spolehlivosti $1-\alpha$ zamítáme.

Aplikujme popsaný postup na naše měření, tedy x_i jsou hodnoty v prvním sloupci tabulky 1 a y_i hodnoty ve třetím sloupci, přičemž $n = 8$ je počet řádků. Vypočítáme jejich rozdíly a následně aritmetický průměr $\bar{d} = 319\,\mathrm{s}$ a výběrovou směrodatnou odchylku $s(d) = 47\,\mathrm{s}$. Odtud $t = 18{,}0$. Kvantil $t_{0{,}975}(7) = 2{,}365$ zjistíme ze statistických tabulek. Protože $18{,}0 \notin \langle -2{,}365; 2{,}365 \rangle$, hypotézu, že doba vychladnutí na pitnou teplotu nezávisí na tom, zda s čajem mícháme, na hladině významnosti 5 % zamítáme. Hodnota testovacího kriteria je dokonce vyšší než $t_{0{,}999\,5}(7) = 5{,}408$, takže hypotézu bychom zamítli i na hladině významnosti 0,1 %. Dle naměřených hodnot je tedy menší než 0,1 % pravděpodobnost, že rychlost vychladnutí na pitnou teplotu nezávisí na tom, zda se s čajem míchá.

Nejistoty měření

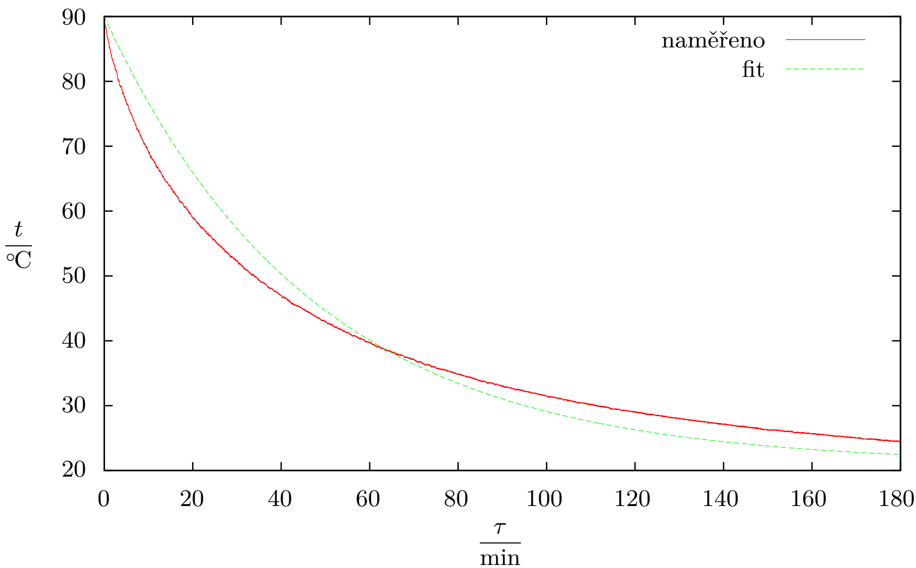
Dallas DS18B20 měří teplotu přesněji než 0,5 °C, po kalibraci byl rozdíl průměrné teploty naměřené dvojicí těchto čidel a pomocí termistorů menší než 0,1 °C. Nejistotu měření teploty tedy odhadneme na asi 0,5 °C.

Čas byl měřen pomocí mikrokontroléru s přesností na nanosekundy. Zaznamenáván byl vždy čas začátku cyklu měření, během kterého se postupně přečetly a vypočítaly hodnoty ze všech snímačů, což dohromady trvalo asi 0,5 s. Doby, za které se teplota vody snížila z 90 °C na 50 °C, byly odečítány z grafu, přičemž vzhledem k šumu odhadneme nejistotu jejich stanovení na 2 s.

Rozptyl výsledků je zřejmě velmi ovlivněn také tím, že objem vody v hrnku byl definovaný pouze na základě rysky v něm před měřením nakreslené, takže nejistotu objemu odhadujeme na 10 ml.

Diskuse výsledků

Zkusme proložit naměřenou závislost teploty na čase (tu, kde se s vodou nemíchalo) teoretickou závislostí (4), viz obrázek 3. Vidíme, že teoretická a naměřená závislost si neodpovídají. To je způsobeno zjednodušeními, které jsme použili. Měření začalo téměř ihned po nalití vody do hrnku, tedy v době, kdy teplota hrnku byla mnohem nižší než teplota vody, a tudíž hrnek vodu ze začátku ochlazoval mnohem rychleji. Další podstatné zjednodušení spočívá v tom, že jsme zanedbali vypařování vody.[4]



Obr. 3: Naměřené křivka chladnutí pro případ, kdy se s čajem nemíchá, proložená teoretickou závislostí (4).

[4]Přesnější modely najdete např. na `http://www-ucjf.troja.mff.cuni.cz/dolejsi/outreach/sedlacek_ajp.pdf`.

Závěr

Byla naměřena závislost teploty na čase v uvařeném šálku čaje (obrázek 2) pro klidný případ, čaj míchaný pomocí míchátka (stálou úhlovou rychlostí rotující kancelářská sponka na dně šálku) a pro čaj míchaný lžičkou. Testovali jsme hypotézu, že doba vychladnutí na pitnou teplotu (50 °C) nezávisí na tom, zda se čajem míchá, a na hladině významnosti 0,1 % jsme ji na základě naměřených hodnot zamítli.

Komentář k došlým řešením

Mnoho řešitelů si zřejmě nepřečetlo celé zadání a neprovedli měření závislosti teploty na čase, pouze uvedli, na jakou teplotu se za jeden čas (jehož volbu nekomentovali) voda ochladila.

Ptali jsme se na dobu, za kterou se v obou případech ochladí voda na pitelnou teplotu. Z toho je zřejmé, že je nejprve nutné tuto teplotu (subjektivně) zvolit a měla by se v řešení objevit. Zároveň by se v řešení měly objevit naměřené doby, nikoliv pouze graf závislosti teploty na čase.

Neustále opakující se chybou je špatné zaokrouhlování. Zopakujme proto, že v případě všech měření bychom měli určit nejistotu měřené veličiny (nejlépe z parametrů použitých měřidel určit nejistotu typu B a z naměřených hodnot nejistotu typu A a vypočítat kombinovanou nejistotu; často ale postačí alespoň odhad), tu zaokrouhlit na jednu platnou číslici (popř. dvě platné číslice, je-li první platná číslice 1 nebo někdy i 2) a podle nejistoty se pak zaokrouhlí i naměřená střední hodnota měřené veličiny.

Většina řešitelů provedla jen jedno měření pro každý případ (bez míchání a s mícháním lžičkou) a na základě tohoto měření došla k nějakému závěru. Z jednoho měření však nelze na nic usuzovat. Při testování hypotézy o rovnosti středních hodnot používáme kvantil Studentova rozdělení s $n-1$ stupni volnosti, kde n je počet měření. Pro jedno měření, a tedy 0 stupňů volnosti není Studentovo rozdělení vůbec definováno. Hypotézu se snažíme zamítnout, proto potřebujeme doplněk kritického oboru co nejmenší, a tedy potřebujeme provést co nejvíce měření. Provedeme-li dvě měření, pak používáme $t_{0{,}975}(1) = 12{,}71$, což je asi třikrát více než pro tři měření, čtyřikrát více než pro čtyři měření a pětkrát více pro pět měření. Pro více stupňů volnosti již kvantily klesají pomaleji, a tedy provedením více měření již doplněk kritického oboru zmenšíme méně. Proto je vhodné vždy alespoň 5 měření provést, je-li to možné.

Jestliže měříme závislost teploty na čase v diskrétních časech, pak by graf měl obsahovat samostatné body (případně chybové úsečky), které by neměly být spojeny. Samozřejmě, měříme-li v mnoha různých časech (například v grafech výše jde o téměř 12 000 bodů) a hustota bodů v grafu by byla taková, že by vytvořily tlustou čáru, pak je samozřejmě možné použít čáru (nejistotu můžeme pak v grafu znázornit dalšími čarami okolo naměřené závislosti, které budou tvořit pás spolehlivosti). Je také třeba vždy popsat osy grafu a obsahuje-li více různých závislostí, pak je označit tak, aby mezi nimi šlo rozlišit.

Někteří řešitelé použili k měření multimetr s termočlánkem. Zde je třeba dát si pozor, zda multimetr provádí správně kompenzaci studeného konce a zda jej správně používáme. Pomocí termočlánku totiž můžeme měřit pouze rozdíl teplot jeho konců, a tedy potřebujeme znát teplotu toho konce, který je připojen do multimetru. Přesnost této kompenzace (kterou multimetry provádějí) pak velmi ovlivňuje přesnost měření, což nikdo z těch, kteří jej použili, do řešení neuvedli. Tento efekt je možné demonstrovat tak, že konec termočlánku vložíme do rovnovážné směsi vody a ledu, multimetr, který delší dobu pobyl v místnosti, by měl naměřit teplotu 0 °C). A skutečně, multimetr nám ukázal hodnotu 1 °C, což je pro termočlánek typu K (navíc úplně obyčejný bez označení) v rámci nejistot měření. Pak celý experiment přesuneme např. do lednice nebo v zimě za okno. My přesunuli experiment z místnosti o teplotě 20 °C za okno, kde bylo asi 1 °C a po chvíli (když se měřená teplota přestala na první pohled viditelně měnit) odečetli hodnotu 12 °C! Po asi pěti minutách (jak se senzor teploty ukrytý uvnitř multimetru postupně ochlazoval) to bylo 8 °C, po deseti minutách 6 °C, pokud bychom počkali dostatečně dlouho, měla by se naměřené hodnota přiblížit té naměřené před přesunutím. Odtud navíc vidíme, jak velmi daleko od pravdy může být tvrzení, že měříme s nejistotou rovnou polovině nejmenšího dílku (což v případě použitého multimetru je 0,5 °C), které mnoho z vás uvedlo.

Tomáš Pikálek
`pikos@fykos.cz`