Úloha IV.1 ... zase jedna neořezaná

2 body; průměr 1,52; řešilo 60 studentů

Čerstvě ořezaná tužka 6B má hrot tvaru kužele s poloměrem podstavy $r = 1\,\mathrm{mm}$ a výškou $h = 5\,\mathrm{mm}$. Jak dlouhou čáru s ní dokážeme udělat, jestliže vzdálenost dvou grafitových vrstev je $d = 3{,}4\,\mathrm{Å}$ a stopa tuhy obsahuje takovýchto vrstev v průměru $n = 100$?

Mirek počítal, za jak dlouho si bude muset sehnat ořezávátko.

Než začneme úlohu řešit, zavedeme dva předpoklady. První se týká držení tužky. Pokud bychom během psaní stále měnili sklon a rotaci tužky, mohli bychom využívat hran plošek, které na tuze vznikají, čímž bychom její stopu nedefinovaně prodloužili. Předpokládejme proto, že tužku držíme stále pod stejným úhlem, a sice kolmo k papíru. Kdyby byl sklon menší, nevyužili bychom při psaní celý objem čnící tuhy a opět bychom se dostali do problémů při popisování otěru zbylého objemu. Zadruhé budeme předpokládat, že se jedná o tuhu z čistého grafitu a jeho jednotlivé vrstvy jsou neporušené a rovnoběžné s rovinou papíru.[1]

S těmito předpoklady dokážeme využít informace o vzdálenosti jednotlivých grafitových vrstev a jejich průměrném počtu ve stopě tuhy. Průměrný počet chápeme tak, že kolmý řez skutečnou stopou má stejný obsah jako řez stopou tloušťky nd. Je zřejmé, že délka stopy l je nepřímo úměrná tloušťce nd. Dále je určitě přímo úměrná výšce hrotu h a přímá úměrnost mezi r a l již plyne z rozměrové analýzy. Délka čáry je tedy dána vztahem

$$l = c\frac{rh}{nd}\,, \tag{1}$$

kde c je zatím neznámá kladná konstanta, kterou musíme určit. Zkusme nejprve naivně předpokládat, že zkrácení hrotu je přímo úměrné aktuální šířce stopy. Potom má stopa půdorys rovnoramenného trojúhelníku a její objem je

$$V_1 = ndrl_1\,.$$

Porovnáním s objemem hrotu[2] dostaneme

$$l_1 = \frac{\pi rh}{3nd} \doteq 154\,\mathrm{m}\,,$$

což můžeme považovat za horní odhad délky čáry.

Nyní použijme model znázorněný na obrázku 1, v němž se hrot tužky skládá z disků o poloměru r_i a tloušťce $n'd$. Kužel takto aproximovat můžeme, neboť $n'd \ll h$. Nová veličina n' označuje počet vrstev v jednom disku, zřejmě $n' > n$, protože ve stopě se vrstvy z disků musí „rozprostřít do mezer". Délku čáry můžeme zapsat pomocí sumy jako

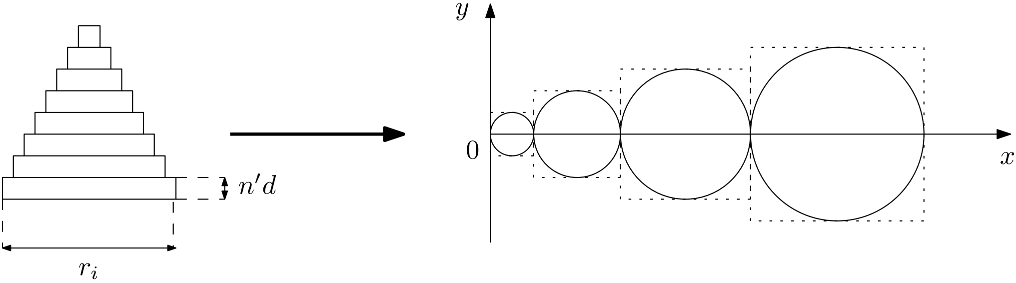
$$l_2 = 2\sum_{i=1}^{N} r_i\,, \tag{2}$$

kde N je počet disků. Ten je dán vztahem

$$N = \frac{h}{n'd}\,. \tag{3}$$

[1] Ve skutečnosti se pro výrobu tužek používá směs rozemletých jílů a grafitu, protože čistý grafit je příliš měkký.

[2] Pro zajímavost – při dané tloušťce stopy čáry pokryjeme tímto objemem asi 2,5 stran formátu A4.



Obr. 1: Model otírání tuhy.

Dále můžeme vyjádřit

$$r_i = \frac{i}{N} r \tag{4}$$

a dosazením (3) a (4) do (2) získáme

$$l_2 = \frac{rh}{n'd} \,. \tag{5}$$

Při pohledu na (5) a (1) vidíme, že jsme na dobré cestě. Zbývá určit $c = n/n'$. Platí

$$\frac{n}{n'} = \frac{S'}{S} \,,$$

kde S' je obsah disku a S obsah čtverce, kterému je disk vepsaný – viz tečkované čtverce v 1. Potom

$$\frac{n}{n'} = \frac{S'}{S} = \frac{\pi r_i^2}{4 r_i^2} = \frac{\pi}{4} \,. \tag{6}$$

Čtverce jsou aproximací lichoběžníků vzniklých při kreslení společných tečen disků, neboť pro $i \gg 1$ platí

$$\frac{S'}{S_{\mathrm{lich}}} \approx \frac{\frac{\pi}{2}\left(r_i^2 + r_{i+1}^2\right)}{\left(r_i + r_{i+1}\right)\dfrac{2r_i + 2r_{i+1}}{2}} = \frac{\pi}{2}\frac{r_i^2 + r_{i+1}^2}{\left(r_i + r_{i+1}\right)^2} \approx \frac{\pi}{4} \,.$$

Dosazením za n' z (6) do (5) dostaneme

$$l_2 = \frac{\pi r h}{4nd} \doteq 115\,\mathrm{m} \,.$$

Podle očekávání vychází $l_2 < l_1$, jelikož se stopa ze začátku rozšiřuje rychleji, než jsme předpokládali v prvním případě.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.