Úloha III.4 ... Ani k stáru, ani k stáru... 4 body; průměr 1,89; řešilo 35 studentů

Balón i s košem má hmotnost M. Koš balónu se ponoří do přehrady a nateče do něj voda. Nyní trochu přitopíme a zvýšíme vztlak balónu na $Mg + F$. Koš má tvar hranolu se čtvercovou podstavou o hraně a a je ponořený do hloubky H. Otvory v koši tvoří $p \ll 1$ z celkové plochy koše, o kterém předpokládáme, že je prázdný (kromě vody). Zanedbejme viskozitu vody a vlastní objem koše. Jak rychle se bude koš vynořovat v závislosti na hloubce ponoření?
Bonus *Za jak dlouho se vynoří?*
Nápověda *Střední rychlost výtoku vody z části koše nad hladinou je rovna 2/3 maximální rychlosti výtoku.* *Napadla Lukáše při sledování filmu Vratné lahve.*

Označme si x výšku vynoření koše balonu a y výšku hladiny v koši měřenou od hladiny přehrady. Rychlost vynořování odpovídá časové změně délky x. Množství vody, která vytéká je úměrné časové změně výšky hladiny v koši. Označíme-li H_0 výšku koše, pak výška hladiny v koši je

$$h = H_0 - x + y\,.$$

Dále označíme rychlosti odpovídající po řadě x, y a h jako v_x, v_y, v_h. Je zřejmé, že platí

$$v_h = v_y - v_x \quad \Rightarrow \quad v_x = v_y - v_h\,. \tag{1}$$

Pro průtok vody skrz plášť koše platí

$$Q = a^2 v_h \quad \Rightarrow \quad v_h = Qa^{-2}\,, \tag{2}$$

kde a^2 je plocha podstavy koše, viz zadání.

Nyní se zaměříme na síly působící v systému, abychom mohli vypočítat Q a v_y, což nám stačí pro nalezení výsledku. Na vodu v koši působí jednak tíhová síla, jednak vztlaková síla. Vztlaková síla má velikost $F_{\mathrm{vz}} = a^2(H_0 - x)\varrho g$, kde $a^2(H_0 - x)$ je objem ponořené části balónu. Vidíme, že se přesně vyrovná tíhové síle vody v koši, jenž je pod hladinou přehrady. Proto součet tíhové a vztlakové síly je $a^2 y\varrho g$, a protože uvažujeme systém téměř v rovnováze,[1] tak musí s velkou přesností platit

$$F = a^2 y\varrho g \quad \Rightarrow \quad y = \frac{F}{a^2\varrho g}\,. \tag{3}$$

A protože síla F je konstantní, tak je i $y = \text{konst}$ a proto je $v_y = 0$. Rozdíl výšky hladiny v balónu a hladiny přehrady je po celou dobu konstantní. Rovnice pro rychlost vynořování (1) spolu s rovnicí pro pro výtok z koše (2) dávají

$$v_x = -Qa^{-2}\,,$$

kde průtok Q bude záporný, protože voda vytéká. Nyní tedy stačí jej určit.

Pro určení průtoku Q_1 z části pod hladinou se podíváme na rozdíl tlaků uvnitř a vně koše. Budeme-li totiž znát rozdíl tlaků, tak (z důvodu zanedbání viskozity) můžeme určit rychlost průtoku vody v_{k} skrz koš z Bernoulliho rovnice

$$\frac{1}{2}\varrho v_{\mathrm{k}}^2 = \Delta p \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{k}} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\varrho}}\,.$$

[1] Jelikož $p \ll 1$, bude balón při vynořování klást velký odpor a proto očekáváme, že se systém velmi rychle přiblíží rovnováze.

Rozdíl tlaků na vnitřní a vnější straně koše je $\Delta p = y\varrho g$. Plocha ponořené části koše je $S = a^2 + 4a(H_0 - x)$. První člen odpovídá ploše podstavy. Proto pro celkový výtok z části pod hladinou platí

$$Q_1 = -p\left(a^2 + 4a\left(H_0 - x\right)\right)\sqrt{\frac{2y\varrho g}{\varrho}} = -p\left(a^2 + 4a\left(H_0 - x\right)\right)\sqrt{2yg}\,,$$

kde za y budeme dosazovat z (3).

Zbývá ještě určit průtok Q_2 z vynořené části koše. Z nápovědy víme, že střední rychlost výtoku bude rovna 2/3 maximální výtokové rychlosti. Maximální výtoková rychlost těsně nad hladinou bude $v_{\mathrm{nh}} = \sqrt{2yg}$. Proto pro průtok Q_2 platí

$$Q_2 = -\frac{2}{3}\cdot 4pay\sqrt{2yg}\,.$$

Rychlost zdvihu je tedy

$$v_x(x) = -a^{-2}\left(Q_1 + Q_2\right) = \frac{p\sqrt{2yg}}{a}\left(a + 4H_0 + \frac{8}{3}y - 4x\right)\,,$$

kde y je dáno vztahem (3).

Vidíme, že rychlost vynořování lineárně klesá v závislosti na výšce vynoření. Můžeme tedy rovnici přepsat do tvaru

$$v_x(x) = B - Ax\,,$$

kde A a B jsou konstanty určitelné ze zadání. Jde o diferenciální rovnici. Podívejme se prvně na případ, kdy $B = 0$. Pak nám rovnice přejde do tvaru $v_x(x) = -Ax$, což je rovnice naprosto stejná, jako ta, která popisuje radioaktivní rozpad. V tomto případě víme, že řešením je

$$x(t) = x_0\mathrm{e}^{-At}\,,\quad v_x(t) = -Ax_0\mathrm{e}^{-At}\,,$$

kde x_0 je libovolná konstanta. Když ale k funkci $x(t)$ přičteme libovolnou konstantu, tak se nám rychlost nezmění. Když přičteme B/A, dostaneme

$$x(t) = \frac{B}{A} + x_0\mathrm{e}^{-At} \quad\Rightarrow\quad Ax(t) = B + Ax_0\mathrm{e}^{-At} \quad\Rightarrow\quad B - Ax(t) = -Ax_0\mathrm{e}^{-At}\,.$$

což je přesně výraz pro rychlost, takže máme splněnu naší rovnici. Konstantu x_0 určíme tak, aby platilo $x(t=0) = H_0 - H + y$. Tedy $H_0 - H + y = B/A + x_0 \quad\Rightarrow\quad x_0 = H_0 - H + y - B/A$. A získali jsme závislost výšky vynoření na čase. K úplnému vynoření dojde pro $x(t) = H_0$. Tj.

$$H_0 = \frac{B}{A} + x_0\mathrm{e}^{-AT} \quad\Rightarrow\quad T = -\frac{1}{A}\ln\frac{H_0 - \frac{B}{A}}{x_0}\,,$$

kde jsme označili T čas úplného vynoření.

Komentáře k došlým řešením

Ve značné části řešení se objevovala chyba, kdy jste zapomněli zahrnout vztlakovou sílu vodu obklopující koš. Dále byla velmi často špatně interperována poznámka $p \ll 1$. Její význam byl takový, aby bylo možno počítat posloupnost stacionárních stavů a zanedbat sílu potřebnou pro zrychlování celé soustavy. Tj. rychlost vynořování je rovna rychlosti vytékání kapaliny. Tím pádem též odporové síly nemají žádný vliv. Mrzlo nás, že jste si nenakreslili obrázek, do kterého byste uvedli definici jednotlivých veličin. V nemálo případech absence obrázku vedla k nesprávným používáním zavedených veličin, také bylo někdy jedno písmenko používáno pro více veličn zároveň.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.