Úloha II.4 ... hvězdná velikost Měsíce

4 body; průměr 2,72; řešilo 43 studentů

Je známo, že Měsíc v úplňku má zdánlivou hvězdnou velikost přibližně $-12\,\mathrm{mag}$ *a Slunce na denní obloze zase* $-27\,\mathrm{mag}$. *Pokuste se odhadnout, jakou hvězdnou velikost má Měsíc těsně před zatměním Slunce, pokud víte, že albedo Země činí* 0,36 *a albedo Měsíce* 0,12. *Předpokládejte, že světlo se po odrazu rozptyluje stejným způsobem na povrchu Země i Měsíce.*

Janči byl oslepený.

Prvně si musíme uvědomit, jakým mechanismem je vlastně Měsíc těsně před zatměním Slunce, tedy v novu, osvětlen. Kdo už slyšel o tzv. popelavém svitu, ten ví, že je to způsobeno světlem odraženým od Země.

Světelný tok dopadající na Zemi od Slunce je

$$L_1 = \frac{L_\mathrm{S}\pi R_\mathrm{Z}^2}{4\pi a^2}\,,$$

kde L_S je světelný tok jdoucí od Slunce, a je vzdálenost Země od Slunce a R_Z je poloměr Země.

Teď nastává další zádrhel. Pro určení světelného toku dopadajícího na Měsíc musíme vědět, s jakým albedem máme počítat. V astronomii se používají dvě albeda:

- Bondovo albedo – udává poměr mezi celkovou odraženou a dopadající intenzitou světla
- geometrické albedo – udává poměr mezi jasností tělesa při nulovém fázovém úhlu[1] a jasností disku o stejném průměru, který je natočen kolmo k pozorovateli a světlo rozptyluje Lambertovsky[2].

Bondovo a geometrické albedo se liší pouze o multiplikativní konstantu, která závisí na typu rozptylu. Navíc se o (jinou) multiplikativní konstantu liší i světelný tok dopadající na Lambertovský disk a světelný tok od něj rozptýlený do určitého směru. Protože je v našem případě fázový úhel nulový jak v případě Země, tak i Měsíce, a u obou těles nastává stejný typ rozptylu, můžeme veškeré tyto konstanty shrnout do jedné, která bude stejná pro Zemi i pro Měsíc a bude nám v dalších výpočtech jedno, jestli je zadané albedo geometrické, nebo Bondovo. Tuto konstantu si označme k.

Pak bude světelný tok dopadající na Měsíc

$$L_2 = \frac{A_\mathrm{Z} k L_1 \pi R_\mathrm{M}^2}{2\pi r^2}\,,$$

kde A_Z je albedo Země, R_M poloměr Měsíce a r vzdálenost Měsíce od Země. V čitateli je povrch polokoule, protože „za Zemi" se světlo nerozptýlí, v zásadě jsme tam ale mohli dát klidně povrch koule, nebo čtvrtkoule, ona dvojka by se akorát zahrnula do k. Pak ho ale musíme ve všech výpočtech používat stejně.

Světelný tok dopadající od Měsíce znovu na Zem je

$$L_3 = \frac{A_\mathrm{M} k L_2 \pi R_\mathrm{Z}^2}{2\pi r^2} = L_1 \frac{A_\mathrm{M} A_\mathrm{Z} k^2 R_\mathrm{M}^2 R_\mathrm{Z}^2}{4 r^4}\,.$$

Z Pogsonova vztahu určíme výslednou hvězdnou velikost Měsíce těsně před zatměním

$$m - m_\mathrm{S} = 2{,}5 \log_{10} \frac{L_1}{L_3}\,,$$

$$m = m_\mathrm{S} - 2{,}5 \log_{10} \frac{A_\mathrm{M} A_\mathrm{Z} k^2 R_\mathrm{M}^2 R_\mathrm{Z}^2}{4 r^4}\,, \tag{1}$$

[1] Úhel mezi směrem dopadajícího paprsku a směrem k pozorovateli.

[2] Rozptyl je Lambertovský tehdy, když se světlo odráží izotropně a jeho intenzita je úměrná kosinu fázového úhlu.

kde m_{S} je zdánlivá hvězdná velikost Slunce.

Zbývá určit konstantu k. Musíme najít situaci, kde známe výslednou hvězdnou velikost, kde vystupují odrazy pouze u Země nebo Měsíce a všechny fázové úhly jsou nulové. Nabízí se hvězdná velikost Měsíce v úplňku

$$m_{\mathrm{M}} - m_{\mathrm{S}} = 2{,}5 \log_{10} \left(\frac{L_{\mathrm{S}} \pi R_{\mathrm{Z}}^2}{4\pi a^2} \frac{4\pi \left(a + r\right)^2 2\pi r^2}{L_{\mathrm{S}} k \; A_{\mathrm{M}} \pi R_{\mathrm{Z}}^2 \pi R_{\mathrm{M}}^2} \right) .$$

Oprávněně můžeme položit $(a + r)^2 \approx a^2$, pak máme

$$m_{\mathrm{M}} - m_{\mathrm{S}} = 2{,}5 \log_{10} \frac{2r^2}{k A_{\mathrm{M}} R_{\mathrm{M}}^2} ,$$

$$k = \frac{2r^2}{A_{\mathrm{M}} R_{\mathrm{M}}^2} 10^{0{,}4(m_{\mathrm{S}} - m_{\mathrm{M}})} .$$

Pokud dosadíme zpět do vztahu (1), dostaneme výsledný vzorec

$$m = 2m_{\mathrm{M}} - m_{\mathrm{S}} - 2{,}5 \log_{10} \frac{A_{\mathrm{Z}} R_{\mathrm{Z}}^2}{A_{\mathrm{M}} R_{\mathrm{M}}^2} .$$

Po dosazení vyjde $m = -1{,}0\,\mathrm{mag}$.

Lukáš Timko
`lukast@fykos.cz`