Úloha II.2 ... létavé dřevo

2 body; průměr 1,68; řešilo 93 studentů

Máme dřevěnou kuličku ve výšce $h = 1\,\mathrm{m}$ nad Zemí o poloměru $R_Z = 6\,378\,\mathrm{km}$ a hmotnosti $M_Z = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$. Kulička má poloměr $r = 1\,\mathrm{cm}$ a je ze dřeva o hustotě $\varrho = 550\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Předpokládejte, že Země má náboj $Q = 5\,\mathrm{C}$. Jaký náboj q by musela mít kulička, aby se mohla vznášet nad Zemí? Jak tento výsledek závisí na výšce h?

Karel přemýšlel, co zadat jednoduchého.

Aby se kulička mohla volně vznášet, musí platit podmínka, že výslednice působících sil je nulová. Působící síly jsou v našem případě dvě – gravitační a elektrostatická. To, že Země rotuje, nás v tomto případě nijak neomezuje – předpokládáme-li, že Země je homogenní koule, kuličku nic nenutí setrvávat nad jedním místem na Zemi, nemusíme se tedy zamýšlet nad přítomností odstředivé síly. Dále je vhodné předpokládat, že náboj je na Zemi rozložen symetricky kolem středu.

Potom můžeme velikosti gravitační a elektrostatické síly položit sobě rovné

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{d^2} = G\frac{M_Z m}{d^2}\,,$$

kde ε_0 je permitivita vakua, G je gravitační konstanta, Q resp. q je náboj Země resp. kuličky, M_Z resp. m je hmotnost Země resp. kuličky a d je obecně vzdálenost dvou těles, které na sebe silově působí.

Že na obou stranách rovnice opravdu vyjadřuje d stejnou veličinu, zjistíme ze slupkového teorému. Ten tvrdí, že gravitační pole vně tenké kulové slupky je stejné, jako kdyby veškerá její hmota byla soustředěna v jejím středu. Kouli si pak můžeme představit jako součet mnoha takových slupek. Podobný slupkový teorém platí i pro elektrostatické silové působení (přímo vyplývá z Gaussova zákona), což je velice výhodné – nemusíme řešit, jestli je náboj na Zemi rozložen rovnoměrně po povrchu nebo v celém objemu (a tedy zamýšlet se nad tím, jak dobrý je Země vodič), stačí nám předpokládat, že náboj je rozložen symetricky kolem středu. Vidíme, že obě strany rovnice jsou nepřímo úměrné d^2. Výsledná hodnota q tedy jistě nebude závislá na d.

Z výše uvedené rovnice pak jednoduše vyjádříme

$$q = \frac{4\pi\varepsilon_0 G M_Z m}{Q}\,.$$

Zbývá dosadit za m

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho\,,$$

kde r je poloměr kuličky a ϱ je její hustota. Pak dostaneme výsledný výraz

$$q = \frac{16\pi^2\varepsilon_0 G M_Z r^3 \varrho}{3Q}\,,$$

do kterého dosadíme $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F{\cdot}m^{-1}}$ a $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$.

Správný výsledek je potom $q = 20{,}4\,\mathrm{C}$.

Zdeněk Jakub
zdenekjakub@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.