Úloha I.S ... relativistická

6 bodů; průměr 4,10; řešilo 81 studentů

a) *Kvantovou gravitaci potřebujeme jen při studiu velmi malých vzdáleností, kdy jsou gravitační síla a kvantové efekty rovnocenné. Gravitační sílu charakterizuje gravitační konstanta, kvantovou mechaniku Planckova konstanta a speciální teorii relativity rychlost světla. Najděte hodnoty těchto konstant v tabulkách a zkuste z nich vzájemným násobením a umocňováním získat veličinu s jednotkou délky. Tak získáte délkovou škálu, na které je relevantní gravitace a kvantová mechanika současně.*

b) *Ukažte, že provedeme-li speciální Lorentzovu transformaci (tj. přejdeme do systém pohybujícímu se vůči původnímu rychlostí v ve směru osy x^1)*

$$x^0_{nov} = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,, \quad x^1_{nov} = \frac{-\frac{v}{c}x^0 + x^1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,, \quad x^2_{nov} = x^2\,, \quad x^3_{nov} = x^3\,,$$

potom se hodnota čtyřintervalu nezmění.

c) *Vzpomeňte na definici čtyřintervalu a položte $\Delta x^3 = \Delta x^2 = 0$. Máme pak*

$$(\Delta s)^2 = -\left(\Delta x^0\right)^2 + \left(\Delta x^1\right)^2\,.$$

V jaké části roviny $\left(\Delta x^0, \Delta x^1\right)$ je čtyřinterval $(\Delta s)^2$ záporný a kde kladný? Jak vypadá křivka definovaná $(\Delta s)^2 = 0$?

a) Abyste úlohu vyřešili, stačí vědět příslušné rozměry konstant; jejich číselné hodnoty si dohledáte později.[1] Máme gravitační konstantu $[G] = \mathrm{kg^{-1}{\cdot}m^3{\cdot}s^{-2}}$, Planckovu konstantu $[h] = \mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}$ a rychlost světla ve vakuu $[c] = \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (hranaté závorky značí jednotky daných konstant).

Ihned si můžeme všimnout, že kilogramy figurují jenom v G a h. Proto pokud chceme kilogramy vyřadit, musí být nutně výsledek v mocninách $[Gh] = \mathrm{m^5{\cdot}s^{-3}}$. Pro vyřazení sekund je potřeba Gh vydělit rychlostí světla na třetí. Pro rozměr v metrech veličinu Gh/c^3 odmocníme a získáváme

$$\sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 4{,}05 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{m}\,.$$

V teoriích kvantové gravitace se mnohdy více hodí takzvaná Planckova délka ℓ_{P} definovaná analogicky jako naše délka jen pomocí redukované Planckovy konstanty $\hbar = h/2\pi$.

b) Chceme spočítat čtyřinterval mezi nějakými dvěma obecnými prostoročasovými body (událostmi) $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ v inerciálním systému souřadnic. Definujeme-li vektor $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$, jeho čtyřinterval pak vypadá takto:

$$(\Delta s)^2 = -\left(\Delta x^0\right)^2 + \left(\Delta x^1\right)^2 + \left(\Delta x^2\right)^2 + \left(\Delta x^3\right)^2\,.$$

[1] Pokud byste konstanty našli v jiných jednotkách, nezapomeňte, že $\mathrm{J} = \mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}}$ a $\mathrm{N} = \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}$.

Pokud transformujeme polohy událostí $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ podle předpisu v zadání, dostaneme pro jeho složky po transformaci

$$
\begin{aligned}
\Delta x^0_{\mathrm{nov}} &= \frac{\Delta x^0 - \frac{v}{c}\Delta x^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,,\\
\Delta x^1_{\mathrm{nov}} &= \frac{\Delta x^1 - \frac{v}{c}\Delta x^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,,\\
\Delta x^2_{\mathrm{nov}} &= \Delta x^2\,,\\
\Delta x^3_{\mathrm{nov}} &= \Delta x^3\,.
\end{aligned}
$$

Je tedy vidět, že rozdíl polohových vektorů se transformuje stejně jako vektory samotné. Transformační vztahy dosadíme do nového čtyřintervalu a upravujeme:

$$
\begin{aligned}
\left(\Delta s_{\mathrm{nov}}\right)^2 &= -\left(\Delta x^0_{\mathrm{nov}}\right)^2 + \left(\Delta x^1_{\mathrm{nov}}\right)^2 + \left(\Delta x^2_{\mathrm{nov}}\right)^2 + \left(\Delta x^3_{\mathrm{nov}}\right)^2 =\\
&= \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left[-\left(\Delta x^0 - \frac{v}{c}\Delta x^1\right)^2 + \left(\Delta x^1 - \frac{v}{c}\Delta x^0\right)^2\right] + \left(\Delta x^2\right)^2 + \left(\Delta x^3\right)^2 =\\
&= \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left[-\left(\Delta x^0\right)^2 + \frac{v^2}{c^2}\left(\Delta x^0\right)^2 + \left(\Delta x^1\right)^2 - \frac{v^2}{c^2}\left(\Delta x^1\right)^2\right] + \left(\Delta x^2_{\mathrm{nov}}\right)^2 + \left(\Delta x^3_{\mathrm{nov}}\right)^2 =\\
&= -\left(\Delta x^0\right)^2 + \left(\Delta x^1\right)^2 + \left(\Delta x^2\right)^2 + \left(\Delta x^3\right)^2
\end{aligned}
$$

kde jsme po dosazení rozepsali mocniny v hranatých závorkách, odečetli odpovídající členy a vytkli a pokrátili $1 - v^2/c^2$. Získali jsme tedy požadovanou invarianci čtyřintervalu při speciální Lorentzově transformaci

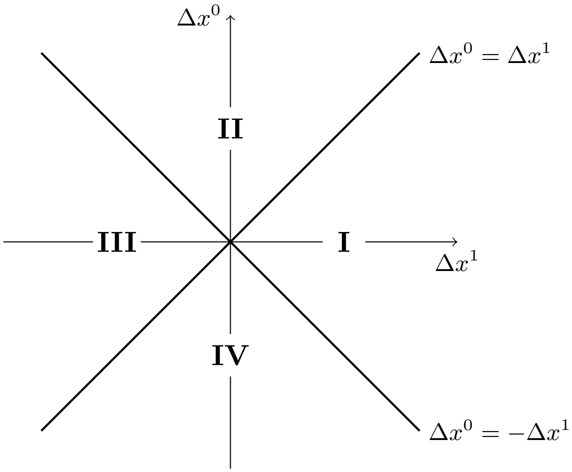
$$\left(\Delta s_{\mathrm{nov}}\right)^2 = \left(\Delta s\right)^2\,.$$

c) Začněme nejdřív položením $\left(\Delta s\right)^2 = 0$. Pak můžeme zkoumat znaménko na různých stranách křivky

$$0 = -\left(\Delta x^0\right)^2 + \left(\Delta x^1\right)^2 \quad\Rightarrow\quad \Delta x^0 = \pm\Delta x^1\,,$$

což definuje jednu přímku se směrnicí 1 a druhou -1 v rovině $(\Delta x^1, \Delta x^0)$, jako je vidět na obrázku 1. Tyto dvě přímky značí události propojené s počátkem částicemi cestujícími rychlostí světla.
Zpátky k příkladu, na obrázku 1 jsou vyznačené oblasti I, II, III a IV. Je jasné, že v nich bude znaménko $\left(\Delta s\right)^2$ konstantní, protože neprochází nulou (to prochází jenom na nakreslených přímkách). V daných oblastech snadno zjistíme, že platí

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}:&\ \left(\Delta x^1\right)^2 > \left(\Delta x^0\right)^2\,,\\
\mathrm{II}:&\ \left(\Delta x^1\right)^2 < \left(\Delta x^0\right)^2\,,\\
\mathrm{III}:&\ \left(\Delta x^1\right)^2 > \left(\Delta x^0\right)^2\,,\\
\mathrm{IV}:&\ \left(\Delta x^1\right)^2 < \left(\Delta x^0\right)^2\,.
\end{aligned}
$$



Obr. 1: Graf roviny $(\Delta x^1, \Delta x^0)$ s vyznačeným řešením $(\Delta s)^2 = 0$.

Vzhledem k definici čtyřintervalu je jasné, že v oblastech I a III ($|\Delta x^0| < |\Delta x^1|$) bude čtyřinterval kladný. Vektorům posunutí mezi událostmi, pro které je čtyřinterval kladný, se říká *prostorupodobné*, protože se mezi danými událostmi nelze dostat menší než světelnou rychlostí, a tudíž pro nikoho nepředstavují dvě události na jeho vlastní časové ose.
Naopak v oblastech II a IV ($|\Delta x^0| < |\Delta x^1|$) je čtyřinterval určitě záporný. Těmto vektorům mezi událostmi se říká *časupodobné*, protože dané události lze v principu spojit cestováním podsvětelnou rychlostí, a tudíž to mohou být události pozorované jedním pozorovatelem na jeho časové ose.

Vojtěch Witzany
`witzanyv@fykos.cz`

Miroslav Rapčák
`miro@fykos.cz`