

Úvodem

Milí FYKOSáci,

určitě jste dost bystří na to, abyste tušili, že po třetí sérii přichází čtvrtá. Potěšit by mohla hlavně milovníky čaje, ale věříme, že si každý mezi úlohami najde svůj šálek kávy. Rozhodně to stojí za to, neboť začíná období, kdy lze schraňovat body, za které pak můžete jet na podzimní soustředění.

Na druhou stranu se ale do řešení sériových úloh neponořte natolik, abyste se nezapomněli vynořit na DSEF a FYKOSí Fyziklání, které se konají 13. 2. a 14. 2. v Praze, protože minout tyto akce s možností vidět zajímavá fyzikální pracoviště a hlavně poměřit své fyzikální síly s ostatními by byla velká škoda.

Organizátoři



Zadání IV. série



Termín uploadu: 4. 3. 2014 20.00

Termín odeslání: 3. 3. 2014

Úloha IV.1 ... zase jedna neořezaná

2 body

Čerstvě ořezaná tužka 6B má hrot tvaru kužele s poloměrem podstavy $r = 1 \text{ mm}$ a výškou $h = 5 \text{ mm}$. Jak dlouhou čáru s ní dokážeme udělat, jestliže vzdálenost dvou grafitových vrstev je $d = 3,4 \text{ \AA}$ a stopa tuhy obsahuje takovýchto vrstev v průměru $n = 100$?

Úloha IV.2 ... zkumavky

2 body

Zkumavky o objemu 3 ml a 5 ml jsou spojeny krátkou tenkou trubičkou, v níž je pórovitá tepelně nevodivá přepážka, která umožňuje dosažení tlakové rovnováhy v systému. Obě zkumavky původně obsahují kyslík při tlaku 101,25 kPa a teplotě 20 °C. První zkumavku (3 ml) ponoříme do nádoby s rovnovážnou soustavou ledu a vody a druhou (5 ml) do nádoby s párou. Jaký bude tlak v soustavě obou zkumavek po dosáhnutí mechanické rovnováhy? Jakého tlaku by se dosáhlo, pokud by ve zkumavkách byl za stejných podmínek dusík místo kyslíku?

Úloha IV.3 ... racek

4 body

Naproti sobě plují dvě lodě, první rychlostí $u_1 = 4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a druhá rychlostí $u_2 = 6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Ve chvíli, kdy jsou od sebe vzdáleny $s_0 = 50 \text{ km}$, vzletne z první lodi racek a letí směrem ke druhé. Letí proti větru, jeho rychlost je $v_1 = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Když dorazí k druhé lodi, obrátí se a letí zpět, nyní po větru rychlostí $v_2 = 30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Takto létá tak dlouho, dokud se obě lodi nesetkají. Jakou celkovou dráhu racek urazí?

Úloha IV.4 ... vybitý puding

4 body

Modelů atomu vodíku bylo nespočetné množství a mnohé z nich už jsou překonané, ale my máme rádi puding a tak se vrátíme k tzv. pudinkovému modelu vodíku. Atom tvoří koule o poloměru R s rovnoměrně rozloženým kladným nábojem („puding“), v kterém se nachází

jeden elektron („rozinka“). Samozřejmě nejlépe je elektronu v místě s nejnižší energií, tak sedí ve středu pudingu. Celkově je soustava elektricky neutrální. Jakou energii musíme dodat elektronu, abychom ho dostali do nekonečna? Jaký by musel být poloměr pudingu, aby se tato energie rovnala Rydbergově energii (excitační energie elektronu v atomu vodíku)? Poloměr vyjádřete v násobcích Bohrova poloměru.

Úloha IV.5 ... kulky

4 body

O kolik se zvýší teplota stejných ocelových kulek po jejich vzájemné srážce? Pohybují se stejným směrem rychlostmi $v_1 = 0,7c$ a $v_2 = 0,9c$, kde c je rychlost světla. Uvažujte konstantní tepelnou kapacitu a uvažujte, že kulky jsou stále v pevném skupenství.

Úloha IV.P ... to pravé gravitační zrychlení

5 bodů

Faleš chtěl v Praze (V Holešovičkách 2 v přízemí) určit hodnotu *gravitačního* zrychlení z experimentu, kdy pouštěl kulatý míček z výšky pár metrů na Zemi. Rozmyslete si, jaké korekce musel při zpracování měření zahrnout. Poté navrhnete vlastní experiment na stanovení gravitačního zrychlení a diskutujete jeho přesnost.

Úloha IV.E ... někdo to rád vlažné

8 bodů

Změřte závislost teploty na čase v uvařeném šálku čaje. Proměřte klidný případ i čaj míchaný lžičkou. Dále ověřte, že doba vychladnutí na pitnou teplotu nezávisí na tom, zda se s čajem míchá či nikoli.

Úloha IV.S ... kvantová

6 bodů

a) Podívejte se do textu, jak působí operátor polohy \hat{X} a hybnosti \hat{P} na složky stavového vektoru v x -reprezentaci (vlnovou funkci) a spočítejte jejich komutátor, tj.

$$(\hat{X})_x ((\hat{P})_x \psi(x)) - (\hat{P})_x ((\hat{X})_x \psi(x)).$$

Tip Zjistěte si, co se stane při derivaci součinu dvou funkcí.

b) Problém energetických hladin pro volnou kvantovou částici, tj. pro $V(x) = 0$, vypadá následovně:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = E\psi(x).$$

1. Zkuste jako řešení dosadit $\psi(x) = e^{\alpha x}$ a zjistěte, pro jaká α (obecně komplexní) je E kladná (nadále používejte pouze taková α).
2. Je toto řešení periodické? Pokud ano, tak s jakou prostorovou periodou (vlnovou délkou)?
3. Je získaná vlnová funkce vlastním vektorem operátoru hybnosti (v x -reprezentaci)? Pokud ano, najděte souvislost mezi vlnovou délkou a hybností (tj. odpovídajícím vlastním číslem operátoru hybnosti) daného stavu.
4. Zkuste formálně spočítat hustotu pravděpodobnosti výskytu částice v prostoru naší vlnové funkce podle vzorce uvedeného v textu. Pravděpodobnost, že se částice vyskytuje v celém prostoru by měla být pro fyzikální hustotu pravděpodobnosti 1, tj. $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$. Ukažte, že nelze naši vlnovou funkci *nanormovat* (tj. přenásobit nějakou konstantou) tak, aby její formální hustota pravděpodobnosti podle vzorce z textu byla opravdovou, fyzikální hustotou pravděpodobnosti.

5. *Bonus* Jaká si myslíte, že je limitně neurčitost polohy částice, jejíž vlnová funkce je hodně blízká té naší? (Tj. blíží se ve všech vlastnostech, ale má vždy normovanou hustotu pravděpodobnosti a je to tudíž fyzikální stav.) Lze odhadnout pomocí Heisenbergových relací neurčitosti jaká přitom bude nejméně neurčitost hybnosti?

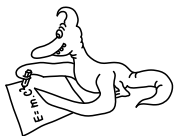
Tip Dávejte pozor na komplexní čísla, například kvadrát komplexního čísla je něco jiného než kvadrát velikosti komplexního čísla.

- c) V druhém díle jsme si odvodili energetické hladiny elektronu ve vodíku pomocí redukované akce. Zvláštní shodou by řešení spektra hamiltoniánu v coulombickém potenciálu protonu vedlo na úplně samé energie, tj.

$$E_n = -Ry \frac{1}{n^2},$$

kde $Ry = 13,6 \text{ eV}$ je energetická konstanta známá jako *Rydberg*. Elektron, který spadne z libovolné hladiny na $n = 2$, vyzáří energii ve formě jediného fotonu úměrnou rozdílu energie daných hladin. Ze kterých hladin musí elektron na druhou hladinu spadnout, aby bylo vyzářené světlo viditelné? Jakou budou mít odpovídající spektrální čáry barvu?

Tip Vzpomeňte si na fotoelektrický jev a na vztah mezi frekvencí světla a jeho vlnovou délkou.



Řešení II. série

Úloha II.P ... Temelínská

4 body; průměr 2,78; řešilo 49 studentů

Odhadněte, kolik jaderného paliva se spotřebuje v jaderné elektrárně na 1 MWh elektrické energie, kterou spotřebují lidé až v domácnosti. Srovnajte to se spotřebou paliva v tepelné elektrárně. Nezapomeňte uvažovat všechny možné ztráty.

Bonus Uvažte i energii, která se spotřebuje při těžbě a přepravě potřebných surovin.

Karel přemýšlel nad ČEZem.

Úlohu si rozdělíme na tři části: výrobu energie, rozvod energie a bonus – příprava a přenos paliva. Úlohu budeme řešit pro Českou republiku a zanedbáme propojení sítě se sousedními zeměmi.

Nejdřív zjistíme, kolik jaderného paliva je potřeba na dodání jednoho MWh do elektrické sítě. Jaderná elektrárna Dukovany ročně vyrábí zhruba 14,4 TWh, v každém ze 4 jejích bloků se nachází zhruba 42 t paliva a ročně se jedna pětina vyměňuje.¹ Spotřeba paliva s_j je tedy

$$s_j = \frac{\text{roční spotřeba paliva v kg}}{\text{roční výroba v MWh}} \doteq 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{MWh}^{-1}.$$

Můžeme předpokládat, že tato hodnota bude obdobná i pro JET, takže tato hodnota bude platit pro veškerou jadernou energii v ČR. Je ale nutno mít na paměti, že se jedná o energii dodanou do sítě, ne do domácností (což je předmětem úlohy).

¹http://cs.wikipedia.org/wiki/Jaderná_elektrárna_Dukovany

Pro odhad spotřeby paliva na 1 MWh v tepelných (uhelných) elektrárnách vyjdeme z údajů pro rok 2010, kdy se v uhelných elektrárnách společnosti ČEZ spotřebovalo $2,7 \cdot 10^{10}$ kg hnědého i černého uhlí² a vyrobilo zhruba 29 TWh elektrické energie.³ Potom je spotřeba na megawatt

$$s_u \doteq 1\,100 \text{ kg} \cdot \text{MWh}^{-1}.$$

Rozvodnou síť si rozdělíme na dvě části: síť přenosovou a síť distribuční. Přenosová soustava přenáší elektrickou energii na velké vzdálenosti do rozvodu. Funguje zpravidla na napětích řádově stovky kV a v ČR ji provozuje zejména společnost ČEPS, a. s. Distribuční síť zajišťuje distribuci elektřiny koncovým uživatelům. V ČR pracuje na hladinách 110 kV, 20 kV a 0,4 kV, provozují ji zejména společnosti ČEZ, E.ON a PREDistribuce (Pražská energetická).

Než se pustíme do odhadování ztrát přenosové soustavy, ujasněme si několik faktů. Elektrony jako částice nemají vlastní identitu a tím méně ji můžou mít jejich gradienty generující napětí. Protože je přenosová síť spojitá, nelze říci, energie z které elektrárny dorazila kam, nebo kolik energie z dané elektrárny se přeměnilo na Jouleovo teplo. Odhady ztrátovosti jaderné či uhelné elektřiny jsou tedy pouze připodobnění.⁴ Vytvoříme si tedy zjednodušující model přenosové soustavy. Proud v této soustavě se řídí pravidlem nejmenšího odporu, tzn. rozdělí se tak, aby měřitelný odpor (pro AC impedance) byl co nejmenší⁵. Dále předpokládejme dokonale symetrickou a dostatečně hustou přenosovou síť a homogenní rozdělení spotřeby energie. Vyjdeme-li z tohoto, dostali bychom rozdělení spotřebitelů energie z dané elektrárny, kde by vzdálenější spotřebitelé spotřebovali méně. V našem modelu toto rozdělení nahradíme kruhem, kde energii dodává výhradně daná elektrárna, kde celková spotřeba se rovná výkonu elektrárny.

Na stránkách ČEPSu⁶ lze nalézt množství zajímavých údajů a informací včetně aktuálních dat týkajících se dodávání, rozvodu a regulace energie. K odhadnutí ztrátovosti jaderné, resp. uhelné energie v síti je více, prezentovat tu budu pouze jeden. Mj. se z těchto stránek dá zjistit, kolik energie bylo celkově přeneseno a kolik ztraceno.⁷ Tato data odpovídají procentuální ztrátovosti přenosové sítě $p \doteq 0,0131 = 1,31\%$, což je reálná hodnota. Tím ale nemáme vyhráno, protože hustota produkce energie není homogenní a mezi jadernými a uhelnými elektrárnami jsou v tomto směru velké rozdíly. Konkrétně je tím myšleno, že jaderných elektráren je méně, za to jsou výkonnější (ve smyslu 1 JE vs. 1 UE). Aplikujme tento poznatek na náš model přenosové sítě. Procentuální ztrátovost vedení je přímo úměrná délce vedení. Z toho ale vyplývá, že ztrátovost naší přenosové soustavy pro danou elektrárnu je přímo úměrná váženě-průměrné vzdálenosti jejího odběratele. Platí tedy

$$p_i \sim \frac{\int_0^{r_i} 2\pi r^2 dr}{\pi r_i^2} = \frac{2}{3} r_i,$$

kde p_i je procentuální ztrátovost přenosové sítě pro elektrárnu i . Zároveň ale platí

$$\pi r_i^2 \sim P_i,$$

²<http://www.cez.cz/edee/content/micrositesutf/odpovednost2011/cs/environment/vyroba-tezba-a-vystavba.html>

³http://cs.wikipedia.org/wiki/Seznam_tepelných_elektráren_v_Česku

⁴Spíše je tím myšleno, jak by se změnily ztráty přenosové sítě v poměru k výkonu elektrárny, kdyby tato elektrárna byla ze sítě vyjmuta a v určitém okruhu okolo elektrárny by došlo ke snížení odběru odpovídajícímu výkonu elektrárny.

⁵Jedná se pouze o jinou interpretaci Ohmova zákona pro paralelní zapojení.

⁶<http://www.ceps.cz>

⁷<http://www.ceps.cz/CZE/Media/Stranky/Zajimava-cisla.aspx>

kde P_i je výkon elektrárny i . Důsledkem tohoto

$$p_i \sim r_i \sim \sqrt{P_i}.$$

Procentuální ztrátovost určité skupiny N elektráren p_N potom bude

$$p_N = \frac{P_{\text{ztráty}}}{P_{\text{clk}}} = \frac{\sum_i^N p_i P_i}{\sum_i^N P_i} \sim \frac{\sum_i^N P_i^{\frac{3}{2}}}{\sum_i^N P_i}.$$

Dále vyjdeme z tabulky⁸. Tabulka představuje 80 % instalovaného výkonu tepelných elektráren v ČR. Značná část zbývajících tepelných i netepelných elektráren nemusí přenosovou soustavu vůbec využívat. Dále velkou část výkonu netepelných elektráren tvoří přečerpávací vodní elektrárny, které jsou v našem modelu zanedbány. Proto v dostatečném přiblížení můžeme tuto tabulku považovat za kompletní seznam dodavatelů do přenosové sítě. Tato data nyní vložíme do tabulkového editoru a numericky spočítáme poměry procentuálních ztrátovostí a celkových produkcí jaderných a tepelných-nejaderných elektráren:⁹

$$\frac{p_u}{p_j} \doteq 0,45, \quad \frac{P_u}{P_j} \doteq 1,63.$$

Z definice potom určitě platí:

$$p = \frac{\text{celkové ztráty}}{\text{celkový výkon}} = \frac{p_u P_u + p_j P_j}{P_u + P_j} = p_j \frac{1 + \frac{p_u}{p_j} \frac{P_u}{P_j}}{1 + \frac{P_u}{P_j}},$$

odkud

$$p_j = p \frac{1 + \frac{P_u}{P_j}}{1 + \frac{p_u}{p_j} \frac{P_u}{P_j}}, \quad p_u = p_j \frac{p_u}{p_j},$$

z čehož nám po dosazení vyjde $p_j \doteq 0,020 = 2,0\%$, $p_u \doteq 0,009 = 0,9\%$ ¹⁰

Co se týče distribuční sítě, na stránkách příslušných společností lze opět zjistit řadu zajímavých věcí, bohužel ale ne počet uzlů vedení jednotlivých napěťových úrovní. Bez tohoto údaje nejsme schopni provést kvalifikovaný kvantitativní odhad ztrát a přímo údaje o ztrátách v distribučních vedeních pro ČR nebo jednotlivé provozovatele nelze jednoduše dohledat. Naštěstí můžeme předpokládat, že na transformační stanice z přenosové sítě přichází energie z jader i z uhelných elektráren společně, tudíž ztrátovost distribuční sítě d_j , resp. d_u pro energii z jaderných, resp. z uhelných elektráren bude stejná.

Podle serveru <http://www.indexmundi.com> činila celková procentuální ztrátovost přenosové i distribuční sítě ČR z v roce 2010 5,2%. Pro ztrátovost d distribuční sítě tedy bude platit:

$$1 - (1 - d)(1 - p) = z \quad \Rightarrow \quad d = 1 - \frac{1 - z}{1 - p} \doteq 0,04 = 4\%.$$

⁸http://cs.wikipedia.org/wiki/Seznam_tepelných_elektráren_v_Česku

⁹K tomuto se nejvíce hodí sloupec roční výroba energie. Můžeme vypočítat pouze poměry, protože neznáme konstanty úměrnosti zkoumaných závislostí.

¹⁰Předpokládáme hustou, stromovitou rozvodnou síť. Další vadou v našich výpočtech je fakt, že ve ztrátách přenosové sítě jsou započteny i ztráty při transformacích, ale počet transformací neroste lineárně s délkou vedení. Tento fakt přiblíží obě ztrátovosti blíže průměrné ztrátovosti.

Abychom dostali požadované hodnoty a_i množství paliva na energii spotřebovanou v domácnosti, musíme hodnoty s_i podělit účinnostmi jednotlivých sítí. Konkrétně

$$a_j = \frac{s_j}{(1 - p_j)(1 - d)} \doteq 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{MWh}^{-1},$$

$$a_u = \frac{s_u}{(1 - p_u)(1 - d)} \doteq 1\,200 \text{ kg} \cdot \text{MWh}^{-1}.$$

Je vidět, že se hodnoty liší o téměř šest řádů, 2 g jaderného paliva odpovídají zhruba tuně uhlí.

Tyto hodnoty udávají, kolik kg paliva musíme spotřebovat, abychom do domácností dodali 1 MWh. Chceme-li ale zjistit skutečné množství paliva, které zvýší přísun energie do domácností o 1 MWh, musíme hodnoty a_i upravit podle množství energie, která bude spotřebována při získávání, přípravě a přepravě paliva. Platí

$$\frac{1}{b_i} = \frac{1}{a_i} - e_i \quad \Rightarrow \quad b_i = \frac{a_i}{1 - a_i e_i},$$

kde b_i jsou množství paliv i , které je třeba použít, aby se přísun energie do domácností zvýšil o 1 MWh; e_i je množství energie, která se spotřebuje získáváním, přípravou a přepravou 1 kg paliva i .¹¹

Nicméně toto není jednoduchý úkol. V případě uhlí by se jednalo o zejména energetickou náročnost těžby a přepravy, pro jaderné palivo se jedná o těžbu, několikanásobný přesun (často krát na vzdálenosti tisíců kilometrů), filtrace a obohacování, nemluvě o energii spotřebované na bezpečnostní opatření a následné uložení použitého paliva. Během všech těchto procesů dojde ke spotřebě široké škály druhů energií od elektrické až po lidské zdroje. Značnou část těchto energií budou tvořit všemožná paliva na bázi ropy. Na výrobu a přepravu těchto paliv bylo kromě ropy zapotřebí opět bohatého spektra dalších typů energií. Většina potřebných dat je těžko dohledatelná a i poté by to byl téměř nadlidský úkol. Způsobů, jak se s tímto vypořádat, je opět několik, předvedeme tu jeden z nich.

Za zamýšlení rovněž stojí náklady (energie + suroviny) na stavbu elektráren (které se pro různé typy elektráren různí). Zde již záleží na pochopení zadání. Dle našeho názoru je úloha pouze o provozu elektráren, nicméně započítání těchto nákladů rozhodně není chyba.

V lidské společnosti existuje jedna univerzální entita, která slouží k měření různě uložených energií, totiž peníze. Pro srovnání energetické náročnosti jednotlivých paliv použijeme tedy jejich cenu.

Průměrná cena c_e 1 MWh se v českých domácnostech v posledních letech pohybovala okolo hodnoty 4 600 Kč. Cena uhlí či jaderného paliva se liší v závislosti na mnoha parametrech (množství, vzdálenost, dodavatel. . .). Počítejme tedy cenu jaderného paliva přibližně $60\,000 \text{ Kč} \cdot \text{kg}^{-1}$ a cenu hnědého uhlí zhruba $2 \text{ Kč} \cdot \text{kg}^{-1}$. Za náklady na uskladnění vyhořelého jaderného paliva budiž počítáno $50 \text{ Kč} \cdot \text{MWh}^{-1}$, které musí jaderné elektrárny odvádět do státem řízeného tzv. *jaderného účtu*. Částku odváděnou na JÚ za MWh přepočítejme na kilogram pomocí po-

¹¹Jedná se o 1 kg výsledného paliva.

měru s_j jaderného paliva na energii dodanou do sítě. Cena jednoho kg jaderného paliva c_j je zhruba 81 000 Kč. Platí:

$$e_i = \frac{1}{a_i} - \frac{c_i}{c_e},$$

$$b_i = \frac{c_e}{c_i},$$

$$b_j = \frac{c_e}{c_j} \doteq 5,7 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{MWh}^{-1},$$

$$b_u = \frac{c_e}{c_u} \doteq 2300 \text{ kg} \cdot \text{MWh}^{-1}.$$

Je vidět, že na hmotnost paliva na 1 kWh v domácnosti jsou stále jaderné elektrárny asi o pět řádů účinnější.

Na závěr bychom chtěli zdůraznit, že cest, jak se dostat k výsledku, je mnoho a netvrdíme, že tato je optimální. Dále je důležité si povšimnout, že většina ztrát, které jsme vypočítávali, se v důsledku projeví méně, než je nepřesnost kvůli odhadům vstupních veličin. Tyto chyby tedy teoreticky lze zanedbat, ale je potřeba argumentovat proč, což většinou nelze o moc snadněji než kvalifikovaným odhadem-výpočtem.

Komentáře k došlým řešením

S úlohou jste si většinou nějak poradili. Největší problémy dělal odhad ztrát ve vedení (těm, co se je snažili spočítat přes rezistivitu drátů). Problém dělalo rozlišení užitého a ztrátového výkonu. Je-li na vedení napětí U a celé vedení má odpor R , pak by ztrátový výkon $P_z = \frac{U^2}{R}$ pouze kdyby bylo vedení zapojené do zkratu. Pokud odebíráme energii, tak se do obvodu zapojí ještě spotřebič - rezistor, jehož výkon odpovídá užitému výkonu v domácnosti P_d . Problém ale je, že ostatní domácnosti můžou dělat to samé, tím mění proud ve vedení, což nelineárně (zhruba kvadraticky) zvyšuje ztráty v onom vedení.

Lubomír Grund
grund@fykos.cz

Úloha II.E ... kutululů

8 bodů; průměr 4,02; řešilo 45 studentů

Máme nakloněnou rovinu, na které postrčíme míček, aby se začal kutálet bez prokluzování směrem nahoru po nakloněné rovině. Změřte závislost rychlosti míčku na čase a určete závislost ztráty energie na čase. Nakloněná rovina nechť svírá úhel s vodorovnou rovinou úhel $\alpha \sim 10^\circ$. Nezapomeňte popsat parametry vašeho míčku.

Karel se zamyslel nad výrokem „koulelo se koulelo“.

Teorie

Máme určit závislost ztráty energie na čase, proto se nejprve musíme zamyslet nad tím, jaké druhy energie budeme započítávat do ztrát a jaké nikoli. Do ztrát budeme započítávat různá tření (o vzduch, podložku), ale nebudeme započítávat energii potenciální, kinetickou a rotační.

Zákon zachování mechanické energie říká

$$E_k + E_p = E = \text{konst},$$

tedy součet energie potenciální a kinetické translační a rotační by měl být konstantní, pokud by šlo o pohyb beze ztrát, tj. všechny působící síly by byly konzervativní.

Proto můžeme ztrátovou energii v čase t definovat dle vztahu

$$E_z(t) = E_k(t) + E_p(t) - (E_k(t=0) + E_p(t=0)),$$

kde $E(t=0)$ je energie v čase $t=0$ a $E(t)$ je daná energie měřená v čase t . Poslední dva členy můžeme anulovat vhodnou volbou nulové hladiny potenciální energie. Nulovou hladinu potenciální energie volíme v místě, kam by kulička došla v případě, že by pohyb probíhal bez tření. Proto pro ztrátovou energii můžeme napsat

$$E_z = E_k + E_p.$$

Pokud kulička rotuje okolo osy kolmé na směr pohybu a paralelní k nakloněné rovině a označíme-li I moment setrvačnosti kuličky vůči této ose, můžeme pro E_k a E_p napsat

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - mgh, \\ E_z &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I \left(\frac{v}{R}\right)^2 - mgh, \\ E_z &= \frac{1}{2}mv^2 \left(1 + \frac{I}{mR^2}\right) - mgs \sin \alpha, \end{aligned}$$

kde jsme označili: α sklon nakloněné roviny, h vertikální vzdálenost od nulové hladiny potenciální energie, s vzdálenost po nakloněné rovině od místa obratu, m hmotnost kuličky a g tíhové zrychlení (definujeme $h, s > 0$).

Pro kouli platí $I/(mR^2) = 2/5$, tj. pro ztrátovou energii můžeme psát

$$\frac{E_z}{m} = \frac{7}{10}v^2 - gs \sin \alpha. \quad (1)$$

Nyní určíme moment setrvačnosti pro homogenní kulovou slupku o vnitřním poloměru R_1 a vnějším R_2 . Vztah pro moment setrvačnosti koule můžeme přepsat do tvaru

$$I_k = \frac{2}{5}mR^2 = \frac{2}{5}\rho \frac{4}{3}\pi R^5 = \frac{8\pi}{15}\rho R^5.$$

Moment setrvačnosti kulové slupky bude rozdílem momentů setrvačnosti koulí o poloměrech R_2 a R_1 . Hmotnost této slupky je

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho (R_2^3 - R_1^3).$$

Proto

$$I_s = I_{R_2} - I_{R_1} = \frac{8\pi}{15}\rho (R_2^5 - R_1^5) = \frac{2}{5}M \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}.$$

Pro tenkou slupku pak proto platí

$$I_{ts} = \frac{2}{3}MR^2.$$

Pro energetické ztráty kulové slupky pak platí

$$\frac{E_z}{m} = \frac{5}{6}v^2 - gs \sin \alpha. \quad (2)$$

Nyní určíme vzdálenost, do které by kulička vyjela od počátku, pokud bychom neuvažovali tření, tj. hladinu nulové potenciální energie. Je-li zrychlení kuličky $a_k = (5/7)g \sin \alpha$ (lze odvodit ze silového rozkladu), pak vzdálenost teoretického bodu obratu je

$$s_{\max} = \frac{v_0^2}{2a_k}, \quad (3)$$

kde v_0 je rychlost, kterou jsme kuličce na začátku udělili.

Měření

Vyrobili jsme nakloněnou rovinu, na které byly připevněny špejle zaručující pohyb kuličky pouze v přímém směru, viz obrázek 1. Délka nakloněné roviny byla $s_0 = (1\,500 \pm 5)$ mm, výška byla $h_0 = (66 \pm 1)$ mm, proto je sklon $\alpha = (2,52 \pm 0,04)^\circ$. Úhel jsme volili záměrně menší, aby měly odporové síly větší vliv.



Obr. 1: Fotografie nakloněné roviny

Na nakloněné rovině jsme měli připevněno též délkové měřítko, abychom mohli přepočítat souřadnici v pixelech na polohu kuličky na nakloněné rovině.

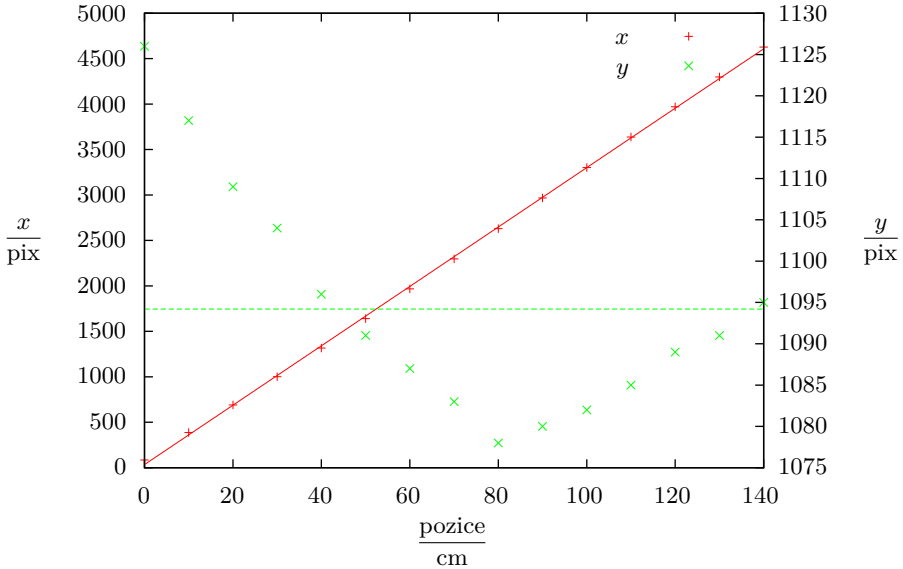
Pro kalibraci jsme stejnou situaci vyfotili v rozlišení $5\,184 \times 3\,456$. Zaznamenali jsme si x -ovou a y -ovou souřadnici bodů na měřítku, a to po deseti centimetrech. Na grafu 2 je uvedena závislost x -ové a y -ové souřadnice na poloze na měřítku. Na levé ose je x -ová souřadnice a na pravé ose je y -ová. Odchylka od kalibračních přímek je menší než 50 pixelů, což odpovídá 1,5 cm, tedy chyba je v řádu procenta. Upozorňujeme, že na levé a pravé ose je jiná škála. Výsledkem lineární kalibrace je škálovací faktor $\xi = (32,7 \pm 0,2) \text{ pix} \cdot \text{cm}^{-1}$.

K měření jsme použili dvě různé kuličky, jednak kuličku z myši, jednak kuličku z deodorantu. Kulička z myši byla plná, kulička z deodorantu byla prázdná, proto jsme si v teorii připravovali též momenty setrvačnosti pro kulovou slupku.

Pomocí programu Tracker jsme určili závislost polohy a rychlosti na čase. Abychom odstranili šum, vypočítali jsme vždy průměr 7 okolních hodnot. Pak dle vztahu (1) určíme závislost energetické ztráty na poloze kuličky z myši a podle vztahu (2) určíme energetické ztráty kuličky z deodorantu.

Na grafech jsou uvedeny měrné ztráty energie, tedy vydělené hmotností odpovídající kuličky. Graf závislosti energetických ztrát pro kuličku z myši je uveden na obrázku 3, též výsledek pro kuličku z deodorantu je uveden na obrázku 4. Poloha v pixelech byla přepočítána pomocí kalibrace ξ a informace, že kamera zabírala stejnou oblast, ale místo 5 184 pixelů měla pouze 1 280 pixelů, dává škálovací faktor pro kameru $\xi_k = (8,06 \pm 0,04) \text{ pix} \cdot \text{cm}^{-1}$. Video bylo pořizováno s frekvencí 50 fps.

Nejzajímavějším výsledkem by samozřejmě bylo určení závislosti zrychlení kuličky na rychlosti pohybu. Tyto závislosti jsou uvedeny na obrázku 5.



Obr. 2: Kalibrační křivky

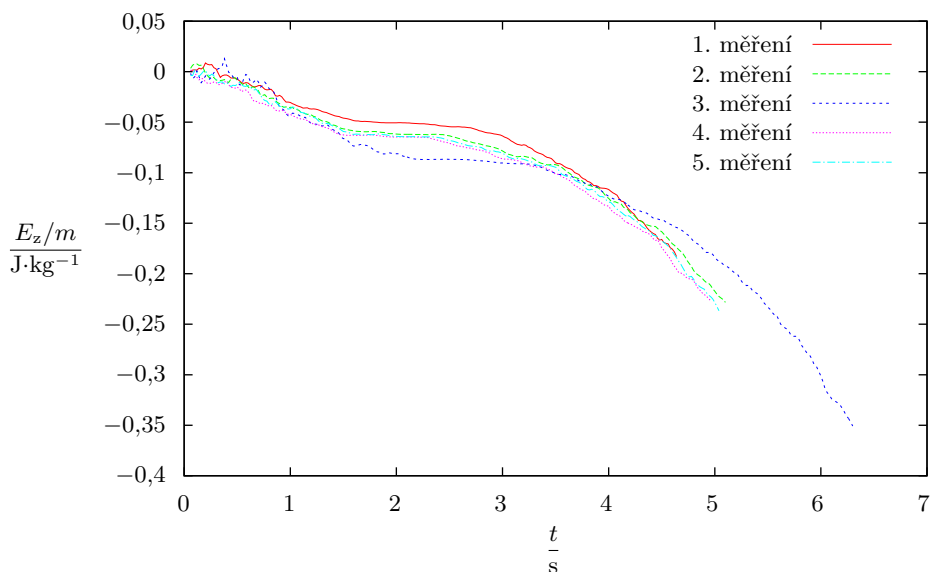
Diskuse

Křivky závislosti ztrátové energie na čase jsou značně zašumělé, protože určování polohy je limitováno jednak rozlišovací schopností kamery, jednak přesností identifikace polohy kuličky na videozáznamu. Tento šum je vidět, i když jsme použili filtrování. Toto filtrování není možné použít na větším rozsahu, protože by mohly být nesprávně shlazeny extrémy.

Pro kuličku myši odpovídají výsledky předpokladu, tj. ztrátová energie s časem klesá. Je zajímavé, že kulička přijde o větší část energie na sestupné části trajektorie. Odchytky mezi jednotlivými měřeními jsou způsobeny různými počátečními rychlostmi. Jistou malou odchytkou mohlo způsobit gumové opláštění kuličky, které zvětšovalo poloměr, ale nikoli moment setrvačnosti vůči středu. Další odchytkou mohly způsobit kolejničky, kvůli čemuž kulička musela rotovat rychleji. Tyto dvě systematické chyby se ale naštěstí odečítají.

Pro kuličku z deodorantu můžeme pozorovat strmý pokles ztrátové energie na počátku pohybu především pro první dvě měření. Tato odchylka od modelu se dá vysvětlit prokluzováním kuličky, tj. platí $v \neq \omega R$. Další zajímavostí je vysoký peak pozorovaný při druhém měření. Tento je způsoben právě vyhodnocováním polohy kuličky pomocí programu Tracker — referenční bod se posunul. Zajímavostí je, že pokud bychom pro výpočet ztrátové energie použili vztah (1) a nikoli (2), pozorovali bychom nárůst ztrátové energie okolo horní úvratí pohybu. Můžeme tedy toto měření použít i pro vyvrácení hypotézy o plnosti kuličky.

Závislost zrychlení na rychlosti je bohužel velmi zašumělá, a proto z ní něco usuzovat lze pouze velmi těžší. Je zde vidět, že zrychlení se blíží k nule pro $v \rightarrow -\infty$. Tato asymptotika je pochopitelná, protože po dlouhé době, kdy jede kulička po nakloněné rovině dolů, dosáhne ustáleného stavu a bude se pohybovat s nulovým zrychlením. Jednoduše nevysvětlitelná je



Obr. 3: Závislost ztrátové energie na čase pro kuličku z myši

ale pravá část grafu, kde můžeme pozorovat klesající velikost zrychlení pro velké (počáteční) rychlosti. Jedním z vysvětlení je vyrovnávání momentu hybnosti a hybnosti třením o podložku, v této době není splněn předpoklad $v = \omega R$.

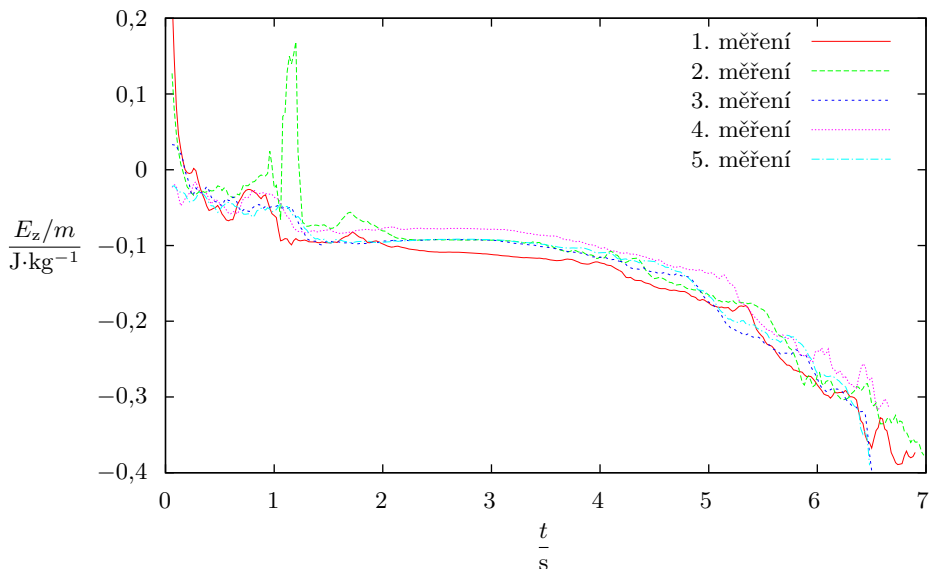
Pokud by tyto hodnoty nebyly zatíženy šumem, mohli bychom tvořit hypotézy, jaké jsou původní třecích sil působících v systému.

Závěr

Změřili jsme závislost ztrátové energie na čase pro kuličku z myši, viz graf 3, a také pro dutou kuličku z deodorantu, viz graf 4. Pokusili jsme se analyzovat původ třecích sil, ale bohužel neúspěšně, viz graf 5.

Poznámky k došlým řešením

Nejčastější chybou v došlých řešeních bylo nepochopení základního principu úlohy a následně zanedbání odporových sil působících na míček. Místo ztrát mechanické energie se pak v řešeních často objevoval prostý vývoj hodnoty kinetické energie v čase. Dalším častým problémem bylo opomenutí složky kinetické energie při rotaci, což vedlo také k nesprávnému odvození vztahu pro zrychlení. Někteří řešitelé si také neuvědomili, že pro sestrojení grafu závislosti rychlosti na čase je potřeba proměřit závislost polohy na čase v několika krátkých úsecích, a místo toho měřili pouze průměrnou rychlost. Mnoho řešitelů také opominulo tu část pohybu míčku, kdy se vrací zpět do startovní pozice. Velmi často se také vyskytovaly problémy s počtem platných číslic, popisováním os grafu a podobně. Nakonec bychom rádi vyzdvihli řešení Martina Štykse,

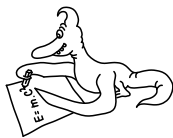


Obr. 4: Závislost ztrátové energie na čase pro kuličku z deodorantu

ktej provedl pečlivě měření pro tři různé míčky či míče, a dále řešení Jakuba Kvorcky a Filipa Ayaziho, kteří dodali nejlepší řešení po stránce teoretické.

Michal Červeňák
miso@fykos.cz

Lukáš Ledvina
lukasl@fykos.cz



Řešení III. série

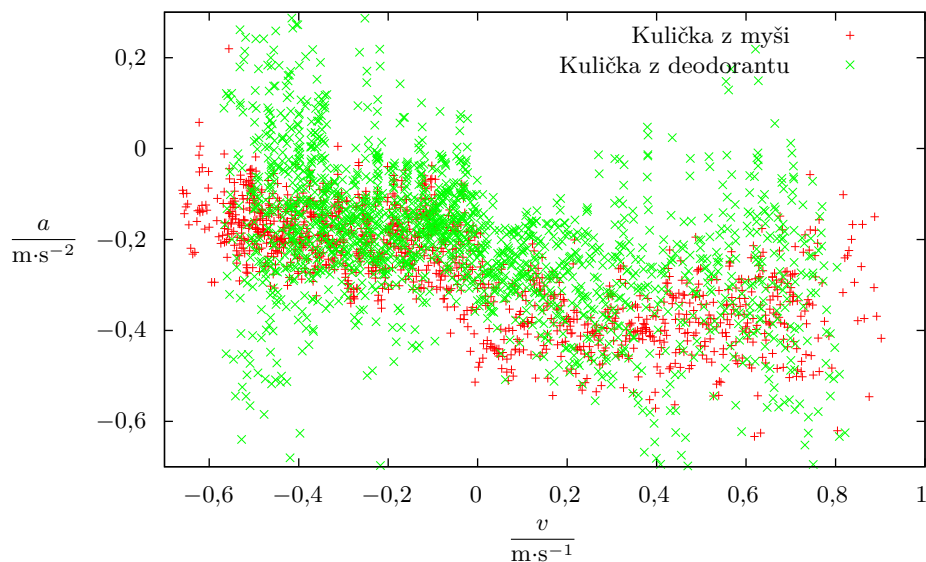
Úloha III.1 ... zatmění

2 body; průměr 1,66; řešilo 53 studentů

Kolem hvězdy obíhá po kruhové dráze planeta a kolem ní obíhá taktéž po kruhové dráze měsíc, a to v rovině jejího oběhu. Víme, že při zatmění slunce je úhlová velikost měsíce stejná jako úhlová velikost slunce, pozorováno z planety (tj. měsíc slunce přesně zakryje). Dále ještě víme, že při zatmění měsíce naopak planeta přesně zakryje měsíc. Určete, jaký je poměr poloměrů planety R a měsíce r , jestliže je vzdálenost planety od hvězdy mnohem větší než vzdálenost měsíce od planety L a ta je zase řádově větší než rozměry R , r .

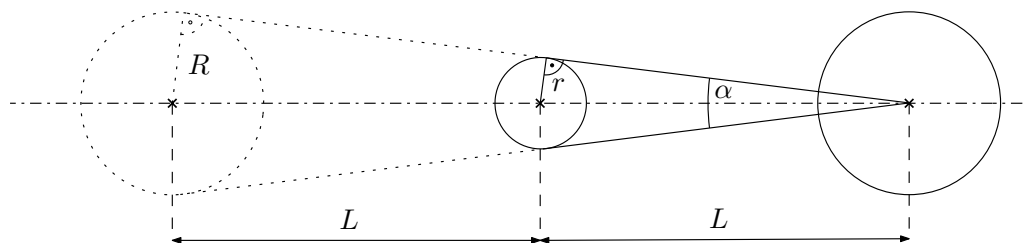
Mirek prohledával archivy Всероссийской астрономической олимпиады.

Podstatou úlohy je nakreslit si s využitím údajů ze zadání vhodný obrázek, z něž bude hodnota hledaného poměru ihned patrná. Jelikož jsou dráhy planety i měsíce přesně kruhové a leží v jedné



Obr. 5: Závislost zrychlení na rychlosti

rovině, lze geometrii obou případů zatmění popsat z této roviny v pohledu kolmém na spojnici slunce – planeta – měsíc.



Obr. 6: Zatmění slunce (plná čára) a zatmění měsíce (tečkovaná čára).

Dále víme, že rozměry planety a měsíce jsou zanedbatelné vůči jejich vzájemné vzdálenosti. V případě zatmění slunce tedy můžeme nakreslit stínový kužel měsíce tak, že jeho vrchol leží ve středu planety. Úhel u vrcholu označme α . Poloměr měsíce pak můžeme vyjádřit pomocí úhlu α a vzdálenosti L jako

$$r = L \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (4)$$

Druhou situaci, zatmění měsíce, můžeme nakreslit do stejného obrázku tak, že zafixujeme polohu měsíce a planetu nakreslíme v opačné poloze. Úhlová velikost hvězdy se tímto zjednodušením

změní pouze zanedbatelně, protože její vzdálenost od planety je mnohem větší než L . Potom je vrcholový úhel stínového kuželu planety přibližně roven vrcholovému úhlu stínového kuželu měsíce a tyto dva kužely, resp. trojúhelníky, v obrázku splynou. Pak vyjádříme poloměr planety

$$R \approx 2L \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (5)$$

a ze vztahů (4) a (5) již velmi přímočaře plyne

$$R \approx 2r.$$

Poloměr planety tedy musí být přibližně roven dvojnásobku poloměru její družice. Výše popsany geometrický rozbor je znázorněn na obrázku 6.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha III.2 ... Středozemní moře

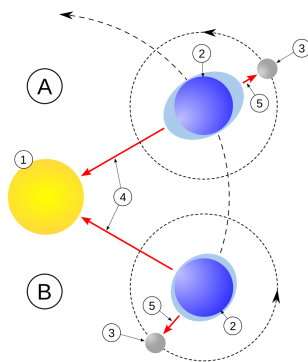
2 body; průměr 1,68; řešilo 65 studentů

Jak rychle v průměru teče voda Gibraltarským průlivem, když umožňuje střídání přílivu a odlivu ve Středozemním moři? Potřebné údaje si najdete na internetu a nezapomeňte citovat!

Lukáš byl překvapen výškou přílivu.

Slapové jevy (tedy příliv a odliv) vznikají v důsledku působení tzv. slapových sil, které jsou druhotným efektem gravitační síly.

Nejjednodušší model je na obrázku 7. Situace A představuje tzv. skočné dmutí, kdy Slunce, Měsíc a Země jsou v jedné přímce, a výška přílivu, resp. odlivu, je vyšší než v případě situace B, tzv. hluchého dmudí. Z obrázku je patrné, že slapové síly Slunce jsou slabší než slapové síly Měsíce.



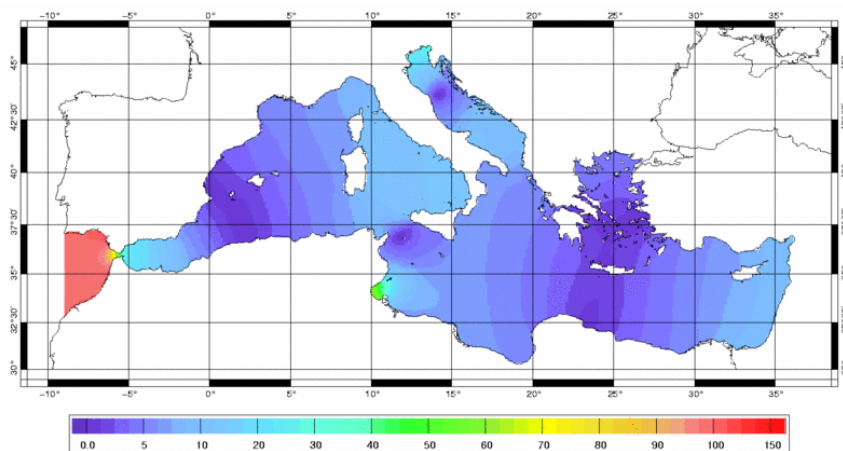
Obr. 7: Slapové jevy. A – skočné dmudí, B – hluché dmudí.

Zdroj: http://cs.wikipedia.org/wiki/Slapové_jevy.

Rozloha Středozemního moře¹² je asi $2,6 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$, přičemž změna rozlohy mezi přílivem a odlivem je zanedbatelná. Průměrná hloubka Gibraltarského průlivu¹³ je 365 m, široký je (odhadneme např. z mapy) asi 15 km. Vynásobením dostaneme průřez asi $5,5 \cdot 10^6 \text{ m}^2$.

¹²http://cs.wikipedia.org/wiki/Středozemní_moře

¹³<http://www.britannica.com/EBchecked/topic/233262/Strait-of-Gibraltar>



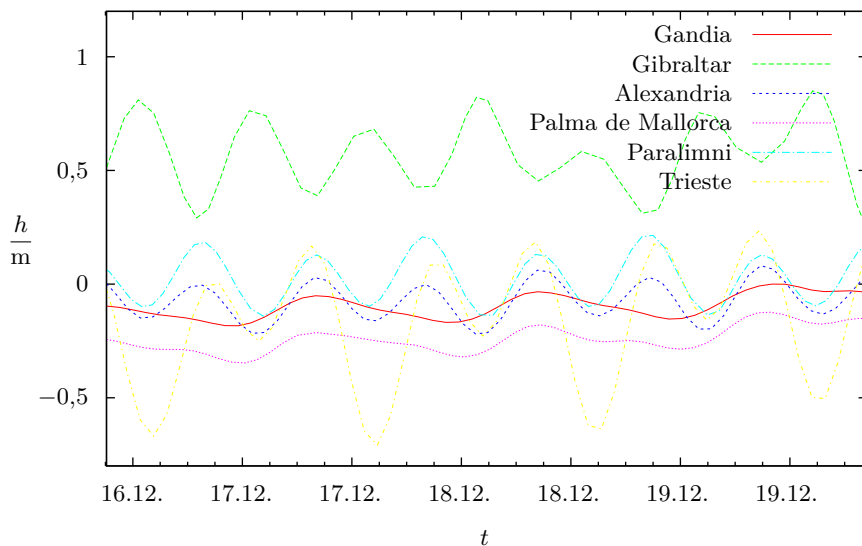
Obr. 8: Průměrné amplitudy přílivu na různých místech Středozemního moře. Zdroj: <http://www.avisioceanobs.com/en/applications/ocean/tides/tides-around-the-world.html>.

Budeme předpokládat, že k přílivu a odlivu dochází pouze s dvojnásobkem frekvence odpovídající průchodu Měsíce nad příslušným poledníkem, tj. každých 12 hodin 25 minut a 14 sekund, tedy zanedbáme vliv Slunce. Předpokládejme, že příliv nastává na celé ploše Středozemního moře v jeden okamžik a rozdíl mezi výškou hladiny při přílivu a při odlivu odhadneme dle mapy na obrázku 8 na 20 cm (je-li průměrná amplituda 10 cm, pak rozdíl mezi maximem a minimem je dvojnásobek). Vynásobením plochy vodní hladiny a této výšky zjistíme, že od odlivu do přílivu (tedy za polovinu periody, tj. za asi 6 hodin 12 minut) se objem vody ve Středozemním moři zvedne o $5,2 \cdot 10^{11} \text{ m}^3$. Průměrný průtok Gibraltarským průlivem by pak byl asi $2,3 \cdot 10^7 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Zajímá nás průměrná velikost rychlosti vody, tu dostaneme vydělením průměrného průtoku průřezem a dostaneme asi $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

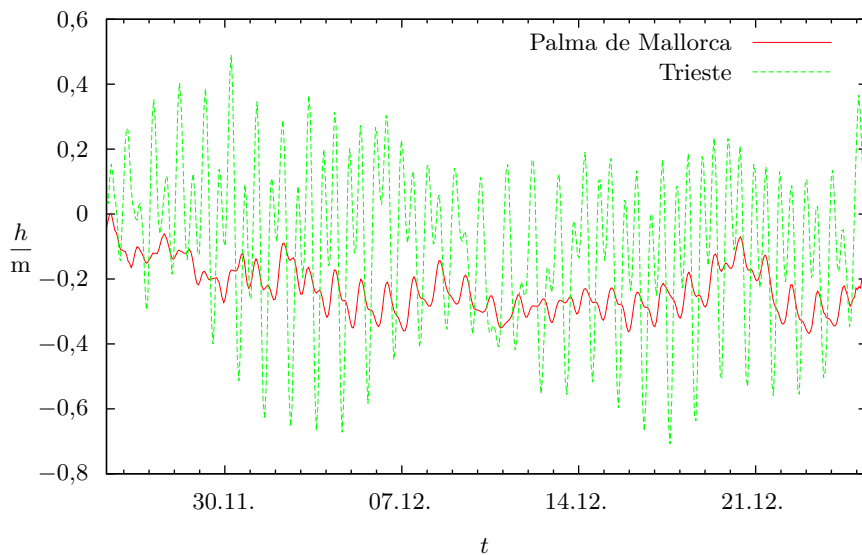
Pokusme se dále alespoň kvalitativně popsat některá zjednodušení, která jsme v odhadu udělali. Kvantitativní vyjádření těchto jevů by však bylo obtížné, jedinou možností by byla numerická simulace¹⁴

Prvním zjednodušením byl předpoklad, že příliv nastává na všech místech Středozemního moře v jeden okamžik. Rozdíl zeměpisné délky nejvýchodnějšího a nejzápadnějšího bodu Středozemního moře je (např. dle mapy na obrázku 8) asi 37° . Proto v případě, kdy uvažujeme pouze působení Měsíce (tedy rozdíl zeměpisných délek místa s přílivem a odlivem je 90°), nikdy nenastane situace, že by v celém Středozemním moři byl příliv. Bude-li na jednom konci příliv, na druhém konci bude hladina přibližně odpovídat výšce mezi přílivem a odlivem. Na obrázku 9 je závislost výšky vodní hladiny v čase pro několik různých míst Středozemního moře. Můžeme si povšimnout, že rozdíl fáze (tedy vzájemný časový posun maxim) mezi stanicemi Alexandria (Egypt) a Paralimni (Kypr) je malý, jejich zeměpisné šířky jsou blízké, kdežto je-li na Kypru příliv, na druhém konci Středozemního moře, v Gibraltaru, je odliv. Voda se tedy v rámci Stře-

¹⁴Podrobnější výpočet najdeme např. na <http://www.pik-potsdam.de/news/public-events/archiv/greencyclesii/programme/18.5.2011/artale/Tidal-exchange-gibraltar-strait.pdf>



Obr. 9: Časová závislost výšky přílivu na několika místech Středozemního moře koncem roku 2013. Zdroj dat: <http://www.ioc-sealevelmonitoring.org>.



Obr. 10: Časová závislost výšky vodní hladiny během jednoho měsíce koncem roku 2013.

dozemního moře přesouvá, a tudíž průtok Gibraltarským průlivem je značně menší než výše odhadnutý.

Na obrázku 9 si též můžeme povšimnout další skutečnosti, kterou jsme při odhadu nebrali v potaz. Příliv a odliv se neprobíhají vždy s frekvencí asi 12,5 nebo 12 hodin, nicméně též s frekvencí 24 hodin. Například na stanici Gandia (Španělsko) je perioda jednoho dne dobře viditelná. Na Mallorce jsou v závislosti dobře patrné obě složky – denní i půldenní. Na obrázku 10 vidíme závislost výšky hladiny na dvou místech po delší časový interval. Na obou spatřujeme kromě půldenní periody i periodu denní. Z grafu je též patrné, že amplituda půldenních slapových jevů je menší než denních a během měsíce se mění.

Tomáš Pikálek
pikos@fykos.cz

Úloha III.3 ... pohárkovo vanová

4 body; průměr 2,31; řešilo 72 studentů

Vezměme prázdný válcový kelímek. Otočme ho dnem vzhůru a tlačme ho pod klidnou vodní hladinu. Jak vysoký bude vzduchový sloupec v kelímku v závislosti na jeho ponoření?

Karel se inspiroval tím, jak si dříve hrával s kelímkem ve vaně.

Uvažujme, že kelímek má plochu podstavy S a výšku h , a rovněž, že teplota okolního vzduchu T_a je stálá a rovná teplotě vody, do které kelímek tlačíme. Z hlediska jednoduchých termodynamických modelů můžeme tlačit kelímek dvěma způsoby: buď velmi rychle (tak, aby nestíhala probíhat výměna tepla mezi vzduchem v kelímku a okolím) anebo velmi pomalu (tak, aby teplota vzduchu v kelímku byla vždy rovna teplotě okolí, neboli, aby se teploty okolí a kelímku vždy stihly vyrovnat).

Uvažme nejdříve druhý scénář (*isotermický* model). Označme x vzdálenost okraje ponořeného kelímku od hladiny a $y(x)$ výšku vzduchového sloupce v kelímku. Těsně před ponořením byl objem vzduchu v kelímku $V_0 = Sh$ a jeho tlak byl atmosferický p_a . Ponoříme-li okraj kelímku do hloubky x , bude objem vzduchu v kelímku roven $V(x) = Sy(x)$. Přetlak uvnitř kelímku spočteme jako hydrostatický tlak v úrovni hladiny vody v kelímku, neboli $p(x) = p_a + \rho_v g(x + y - h)$. Můžeme potom psát Boyleův-Mariottův zákon

$$p_a Sh = p(x)V(x) = [p_a + \rho_v g(x + y - h)] Sy.$$

Už odtud můžeme snadno vyčíst, že máme $y(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \infty$: na levé straně rovnice máme konstantu a pokud jdeme s x do nekonečna, přičtením žádného relevantního y toto nekonečno nezrušíme, neboť $y > 0$. Můžeme toho docílit akorát tak tím, že pošleme y k nule. To souhlasí s našimi fyzikálními představami (ve velké hloubce je tlak vzduchu velký a tedy objem malý).

Vztah dále můžeme jednoduše upravit na

$$\rho_v g y^2 + [p_a + \rho_v g(x - h)] y - p_a h = Ay^2 + By + C = 0,$$

kde jsme označili

$$A = \rho_v g, \quad B = [p_a + \rho_v g(x - h)], \quad C = -p_a h.$$

Dosazením do vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice máme y jako funkci x

$$\begin{aligned} y_{1,2}(x) &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \\ &= \frac{-[p_a + \rho_v g(x - h)] \pm \sqrt{[p_a + \rho_v g(x - h)]^2 + 4\rho_v g p_a h}}{2\rho_v g}, \end{aligned}$$

jejíž nejednoznačnost se nám příliš nelíbí. Nahlédneme ale, že vždy $A > 0$ a $C < 0$, což nám za požadavku $y > 0$ říká, že musíme zvolit znaménko plus. Máme tedy řešení

$$y(x) = \frac{-[p_a + \varrho_v g(x-h)] + \sqrt{[p_a + \varrho_v g(x-h)]^2 + 4\varrho_v g p_a h}}{2\varrho_v g}$$

nebo také

$$y(x) = \frac{2p_a h}{[p_a + \varrho_v g(x-h)] + \sqrt{[p_a + \varrho_v g(x-h)]^2 + 4\varrho_v g p_a h}}$$

pro všechna $x > 0$. Z posledního tvaru je dobře vidět, že $y(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \infty$, jak jsme již odhalili výše.

Zde bychom s výpočty mohli skončit a spokojit se s výsledkem výše. To my ale neuděláme, protože chceme vědět, co se stane v případě *skutečného kelímku* (tedy kromě toho, že máme k výsledku jisté výhrady z hlediska estetiky). Výška typického kelímku totiž nepřesahuje řád desítek centimetrů, což je přibližně stokrát méně, než $H = p_a/(\varrho_v g) \doteq 10$ m, takže $h \ll H$. Tušíme tedy, že pro $x \ll H$ se budou dít zajímavé věci.

Abychom k výsledku došli rychle a relativně bezbolestně, povíme si o velmi užitečném nástroji, totiž *Taylorově větě*: je-li funkce $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ n -krát diferencovatelná a má spojitých prvních $n-1$ derivací na nějakém okolí bodu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, pak pro všechna \mathbf{t} z tohoto okolí platí¹⁵

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{t}) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (\mathbf{t} \cdot \nabla)^k f(\mathbf{x}) + O(|\mathbf{t}|^{n+1}),$$

kde $\nabla \equiv (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ a $\partial/\partial x_i$ značí *parciální derivaci* podle proměnné x_i (což je to stejné jako normální derivace podle x_i , kdy všechny ostatní proměnné považujeme za konstanty). Jak se ukáže, nám bude stačit případ $n=2$ a $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, pro který máme

$$\begin{aligned} f(\mathbf{t}) = f(\mathbf{0}) + t_1 \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} + t_2 \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} + \frac{1}{2} t_1^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} + \frac{1}{2} t_2^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} + \\ + t_1 t_2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} + O(|\mathbf{t}|^3). \end{aligned} \quad (6)$$

Jelikož nás zajímá tvar y pro $x, h \ll H$, bude vhodné pro účely následujícího rozboru uvažovat o y jako o funkci x a h a zavést si nové proměnné $\xi = x/H$ a $\eta = h/H$. Budeme pak zkoumat limitu $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$. Přepíšme si nejdříve y jako funkci ξ a η . Po jednoduché manipulaci dostáváme

$$y(\xi, \eta) = \frac{H}{2} \left(\eta - \xi - 1 + \sqrt{(\xi - \eta + 1)^2 + 4\eta} \right).$$

Nahlédneme, že $y(\xi, \eta)$ splňuje v bodě $(0, 0)$ podmínky Taylorovy věty výše, a po rutinním cvičení z derivování odmocnin zjistíme, že $y(0, 0) = 0$, $\partial_\xi y|_{(0,0)} = 0$, $\partial_\eta y|_{(0,0)} = H$, $\partial_{\xi\xi} y|_{(0,0)} = 0$, $\partial_{\eta\eta} y|_{(0,0)} = 0$ a $\partial_{\xi\eta} y|_{(0,0)} = -H$. Dosazením do (6) pak dostaneme

$$y(\xi, \eta) = H\eta(1 - \xi) + O(|(\xi, \eta)|^3).$$

¹⁵Zde použijeme notaci, která se běžně používá a určitě stojí za to si ji osvojit: pro funkci $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ píšeme, že $f(\mathbf{x}) = O(g(\mathbf{x}))$ pro $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$, pokud se f na nějakém okolí \mathbf{a} chová nejhůře jako g (až na vynásobení nenulovou konstantou). Přesněji, máme $f(\mathbf{x}) = O(g(\mathbf{x}))$ pro $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$, pokud existuje $M > 0$ takové, že $|f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})| \leq M$ pro všechna \mathbf{x} v nějakém okolí \mathbf{a} .

My ale předpokládáme $h \ll H$ (tedy $\eta \ll 1$) a jak jsme již avizovali výše, zajímá nás teď chování $y(x)$ pro $x \ll H$ (tedy $\xi \ll 1$). Potom ale můžeme zanedbat členy vyšších řádů a máme elegantní výsledek

$$y(x) \approx h \left(1 - \frac{x}{H}\right) \quad \text{pro } x, h \ll H.$$

Nemusíme snad připomínat, že podmínky $x, h \ll H$ jsou pro platnost této aproximace životně důležité a koneckonců, dostaneme-li se do oblasti $x \approx H$, vztah očividně selže pro $x > H$.

Pokud bychom se vrátili k prvnímu (*adiabatickému*) scénáři, došli bychom (analogicky jako výše) k rovnosti

$$p_a h^\kappa = [p_a + \rho_v g(x + y - h)] y^\kappa, \quad (7)$$

ze které pro hodnotu Poissonovy konstanty $\kappa \approx 1,4$ pro vzduch nelze analyticky vyjádřit y jako funkci x . Můžeme z ní ale snadno vyčíst, že opět máme $y(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \infty$, neboť stále $y > 0$ a navíc $\kappa > 0$, takže y jde k nule, právě když y^κ jde k nule.

Rovněž můžeme opět uvážit případ $x, h \ll H$. Musíme zde ale rovnou aproximovat rovnici (7), protože přesný výsledek neznáme.¹⁶ Přepíšeme nejdříve rovnici (7) do tvaru

$$y = \left(1 + \frac{x + y - h}{H}\right)^{-\frac{1}{\kappa}} h.$$

Máme ale $x + y - h < x$, takže $x + y - h \ll H$ a tedy

$$y \approx \left(1 - \frac{x + y - h}{\kappa H}\right) h,$$

odkud jednoduše vyjádříme y a za pomoci dalších přímočarých aproximací dostaneme přibližný výsledek

$$y(x) \approx h \left(1 - \frac{x}{\kappa H}\right) \quad \text{pro } x, h \ll H.$$

Všimněme si, že pro $\kappa = 1$, což by mělo odpovídat izotermickému ději, opravdu dostaneme výsledek, který jsme pro izotermický děj odvodili výše.

Kuba Vošmera
kuba@fykos.cz

Úloha III.4 ... Ani k stáru, ani k stáru... 4 body; průměr 1,89; řešilo 35 studentů

Balón i s košem má hmotnost M . Koš balónu se ponoří do přehrady a nateče do něj voda. Nyní trochu přitopíme a zvýšíme vztlak balónu na $Mg + F$. Koš má tvar hranolu se čtvercovou podstavou o hraně a a je ponořený do hloubky H . Otvory v koši tvoří $p \ll 1$ z celkové plochy koše, o kterém předpokládáme, že je prázdný (kromě vody). Zanedbejme viskozitu vody a vlastní objem koše. Jak rychle se bude koš vynořovat v závislosti na hloubce ponoření?

Bonus Za jak dlouho se vynoří?

Nápověda Střední rychlost výtoku vody z části koše nad hladinou je rovna $2/3$ maximální rychlosti výtoku. *Napadla Lukáše při sledování filmu Vratné lahve.*

¹⁶Podobně jsme mohli postupovat i v případě isotermického děje a dostali bychom se ke stejnému výsledku jako výše.

Označme si x výšku vynoření koše balonu a y výšku hladiny v koši měřenou od hladiny přehrady. Rychlost vynořování odpovídá časové změně délky x . Množství vody, která vytéká je úměrné časové změně výšky hladiny v koši. Označíme-li H_0 výšku koše, pak výška hladiny v koši je

$$h = H_0 - x + y.$$

Dále označíme rychlosti odpovídající po řadě x , y a h jako v_x , v_y , v_h . Je zřejmé, že platí

$$v_h = v_y - v_x \quad \Rightarrow \quad v_x = v_y - v_h. \quad (8)$$

Pro průtok vody skrz plášť koše platí

$$Q = a^2 v_h \quad \Rightarrow \quad v_h = Q a^{-2}, \quad (9)$$

kde a^2 je plocha podstavy koše, viz zadání.

Nyní se zaměříme na síly působící v systému, abychom mohli vypočítat Q a v_y , což nám stačí pro nalezení výsledku. Na vodu v koši působí jednak tíhová síla, jednak vztlaková síla. Vztlaková síla má velikost $F_{vz} = a^2(H_0 - x)\rho g$, kde $a^2(H_0 - x)$ je objem ponořené části balónu. Vidíme, že se přesně vyrovná tíhové síle vody v koši, jenž je pod hladinou přehrady. Proto součet tíhové a vztlakové síly je $a^2 y \rho g$, a protože uvažujeme systém téměř v rovnováze,¹⁷ tak musí s velkou přesností platit

$$F = a^2 y \rho g \quad \Rightarrow \quad y = \frac{F}{a^2 \rho g}. \quad (10)$$

A protože síla F je konstantní, tak je i $y = \text{konst}$ a proto je $v_y = 0$. Rozdíl výšky hladiny v balónu a hladiny přehrady je po celou dobu konstantní. Rovnice pro rychlost vynořování (8) spolu s rovnicí pro průtok z koše (9) dávají

$$v_x = -Q a^{-2},$$

kde průtok Q bude záporný, protože voda vytéká. Nyní tedy stačí jej určit.

Pro určení průtoku Q_1 z části pod hladinou se podíváme na rozdíl tlaků uvnitř a vně koše. Budeme-li totiž znát rozdíl tlaků, tak (z důvodu zanedbání viskozity) můžeme určit rychlost průtoku vody v_k skrz koš z Bernoulliho rovnice

$$\frac{1}{2} \rho v_k^2 = \Delta p \quad \Rightarrow \quad v_k = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}.$$

Rozdíl tlaků na vnitřní a vnější straně koše je $\Delta p = y \rho g$. Plocha ponořené části koše je $S = a^2 + 4a(H_0 - x)$. První člen odpovídá ploše podstavy. Proto pro celkový výtok z části pod hladinou platí

$$Q_1 = -p (a^2 + 4a(H_0 - x)) \sqrt{\frac{2y\rho g}{\rho}} = -p (a^2 + 4a(H_0 - x)) \sqrt{2yg},$$

kde za y budeme dosazovat z (10).

¹⁷Jelikož $p \ll 1$, bude balón při vynořování klást velký odpor a proto očekáváme, že se systém velmi rychle přiblíží rovnováze.

Zbývá ještě určit průtok Q_2 z vynořené části koše. Z nápovědy víme, že střední rychlost výtoku bude rovna $2/3$ maximální výtokové rychlosti. Maximální výtoková rychlost těsně nad hladinou bude $v_{\text{nh}} = \sqrt{2yg}$. Proto pro průtok Q_2 platí

$$Q_2 = -\frac{2}{3} \cdot 4\pi a y \sqrt{2yg}.$$

Rychlost zdvihu je tedy

$$v_x(x) = -a^{-2} (Q_1 + Q_2) = \frac{p\sqrt{2yg}}{a} \left(a + 4H_0 + \frac{8}{3}y - 4x \right),$$

kde y je dáno vztahem (10).

Vidíme, že rychlost vynořování lineárně klesá v závislosti na výšce vynoření. Můžeme tedy rovnici přepsat do tvaru

$$v_x(x) = B - Ax,$$

kde A a B jsou konstanty určitelné ze zadání. Jde o diferenciální rovnici. Podívejme se prvně na případ, kdy $B = 0$. Pak nám rovnice přejde do tvaru $v_x(x) = -Ax$, což je rovnice naprosto stejná, jako ta, která popisuje radioaktivní rozpad. V tomto případě víme, že řešením je

$$x(t) = x_0 e^{-At}, \quad v_x(t) = -Ax_0 e^{-At},$$

kde x_0 je libovolná konstanta. Když ale k funkci $x(t)$ přičteme libovolnou konstantu, tak se nám rychlost nezmění. Když přičteme B/A , dostaneme

$$x(t) = \frac{B}{A} + x_0 e^{-At} \Rightarrow Ax(t) = B + Ax_0 e^{-At} \Rightarrow B - Ax(t) = -Ax_0 e^{-At}.$$

což je přesně výraz pro rychlost, takže máme splněnu naši rovnici. Konstantu x_0 určíme tak, aby platilo $x(t=0) = H_0 - H + y$. Tedy $H_0 - H + y = B/A + x_0 \Rightarrow x_0 = H_0 - H + y - B/A$. A získali jsme závislost výšky vynoření na čase. K úplnému vynoření dojde pro $x(t) = H_0$. Tj.

$$H_0 = \frac{B}{A} + x_0 e^{-AT} \Rightarrow T = -\frac{1}{A} \ln \frac{H_0 - \frac{B}{A}}{x_0},$$

kde jsme označili T čas úplného vynoření.

Komentáře k došlým řešením

Ve značné části řešení se objevovala chyba, kdy jste zapomněli zahrnout vztakovou sílu vodu obklopující koš. Dále byla velmi často špatně interperována poznámka $p \ll 1$. Její význam byl takový, aby bylo možno počítat posloupnost stacionárních stavů a zanedbat sílu potřebnou pro zrychlování celé soustavy. Tj. rychlost vynořování je rovna rychlosti vytékání kapaliny. Tím pádem též odporové síly nemají žádný vliv. Mrzlo nás, že jste si nenakreslili obrázek, do kterého byste uvedli definici jednotlivých veličin. V nemálo případech absence obrázku vedla k nesprávným používáním zavedených veličin, také bylo někdy jedno písmenko používáno pro více veličin zároveň.

Lukáš Ledvina
lukasl@fykos.cz

Úloha III.5 ... mig-mig!

5 bodů; průměr 1,69; řešilo 54 studentů

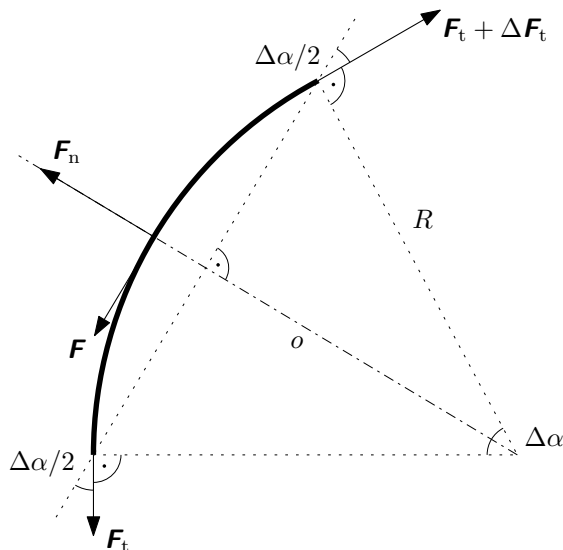
Chudák hladový kojot chce ulovit proradného ptáka Uličníka a přichystal na něj následující past: na pevné lano přiváže 500tunovou kovadlinu, přehodí ji přes větev tak, aby visela nad silnicí, a bude čekat. Kolikrát musí lano kolem větve obtočit, jestliže chce kovadlinu udržet ve vzduchu pouze vlastní vahou? Předpokládejte, že hmotnost lana je vůči hmotnosti kojota zanedbatelná.

Mirek vždy fandil kojotovi.

Je jasné, že musí existovat nějaký fyzikální jav, ktorý umožní udržať lano s nákovou obmotané okolo konára. Týmto javom je trenie medzi lanom a konárom. Označme si príslušný koeficient statického trenia f . Ešte si označme hmotnosť nákovy M , hmotnosť kojota m a polomer konára R .

Uvažujme veľmi malý kúsok lana dĺžky Δl , ktorý je obmotaný okolo konára a vymedzený uhlom $\Delta\alpha = \Delta l/R$ ako vidno na obrázku. Tento kúsok lana susedné kúsky napínajú silami veľkosti F_t a $F_t + \Delta F_t$ (bez ujmy na všeobecnosti môžeme teraz predpokladať, že $\Delta F_t > 0$). Konár naň pôsobí výslednou normálovou silou s veľkosťou F_n .

Na náš kúsok lana pôsobí okrem toho výsledná trecia sila s veľkosťou $F = fF_n$. Ak by neexistovala, lano by sa odtáčalo v smere sily $F_t + \Delta F_t$ (lebo proti smeru tohto pohybu pôsobí iba sila F). Ak si volíme Δl veľmi malé, bude situácia prakticky symetrická, teda výsledná normálová aj trecia sila budú pôsobiť v strede nášho kúska.



Obr. 11: Rozbor síl pôsobiacich na malý kúsok lana.

Aby sa náš kúsok nehýbal, musí byť naňho pôsobiaci výsledný moment síl nulový. Keďže konár má tvar valca, stačí, aby bola výslednica síl pozdĺž obvodu konára nulová. Vplyv gravitačnej sily na lano môžeme zanedbať. Platí teda

$$(F_t + \Delta F_t) - F_t - F = 0. \quad (11)$$

Lano je pevne navinuté, preto aj výslednica síl v smere osi o nášho kúska je nulová

$$F_n - (F_t + \Delta F_t) \sin \frac{\Delta\alpha}{2} - F_t \sin \frac{\Delta\alpha}{2} = 0. \quad (12)$$

Pre malé uhly $\Delta\alpha$ približne platí $\sin(\Delta\alpha/2) \approx \Delta\alpha/2$ a sily $F_t + \Delta F_t$ a F_t sú približne rovnaké. Preto môžeme z (12) vyjadriť

$$F_n = (2F_t + \Delta F_t) \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \approx 2F_t \frac{\Delta\alpha}{2} = F_t \Delta\alpha$$

a dosadením do (11) dostaneme

$$\Delta F_t = F = f F_n = f F_t \Delta\alpha = \frac{f F_t}{R} \Delta l.$$

Táto rovnica nám hovorí, ako sa zmení napätová sila v lane na vzdialenosti Δl .

Konce lana s kojotom, resp. nákovou sú napínané tiažovou silou $F_{g,1} = mg$, resp. $F_{g,2} = Mg$. Môžeme teda čakať, že pri minimálnej dĺžke lana L_0 bude sila F_t postupne od kojota po nákovu rásť.¹⁸ A ako vlastne bude rásť? Ak sa Δl blíži k nule, prechádza zlomok $\Delta F_t / \Delta l$ na deriváciu

$$\frac{dF_t}{dl} = \frac{f F_t}{R},$$

z čoho integrovaním dostaneme

$$\int_{F_{g,1}}^{F_{g,2}} \frac{1}{F_t} dF_t = \int_0^{L_0} \frac{f}{R} dl,$$

$$\ln \frac{M}{m} = \frac{f L_0}{R}.$$

Konce lana budú visieť dole, preto bude v skutočnosti lano navinuté k -krát o uhol 2π okolo celého konára a ešte raz o π okolo jeho vrchnej polovice. My potrebujeme aspoň také k , pre ktoré je dĺžka lana $(2k+1)\pi R \geq L_0$. Počet prehodení lana bude potom

$$N = k + 1 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{L_0}{\pi R} \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{f\pi} \ln \frac{M}{m} \right].$$

Dosadením rozumných hodnôt $m = 10 \text{ kg}$ a $f = 0,5$ dostaneme $N = 4$. Teda kojotovi stačí prehodiť lano okolo konára štyrikrát a nákovu udrží aj vlastnou, oveľa menšou, váhou.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

¹⁸To, že kojot je ľahší ako nákova, snáď netreba spomínať.

Úloha III.P . . . solární pohon

5 bodů; průměr 2,29; řešilo 66 studentů

*Mohlo by letadlo létat na solární pohon?**Domínika s Honzou a Michalem chtěli odletět to teplých krajin.*

Kdybychom chtěli být struční stejně jako v zadání, stačilo by do řešení napsat „ano“, protože aniž bychom cokoliv museli rozebírat, stačí strávit chvíli se svým oblíbeným vyhledávačem a najdeme mimo jiné projekt *Solar Impulse*,¹⁹ který má za cíl dokonce cestu kolem světa ve Sluncem poháněném letadle, jehož první testovací let již proběhl v roce 2009 a v loňském roce letadlo už zvládlo přeletět Atlantický oceán.

Podívejme se nyní na praktičnost takového letadla. *Solar Impulse* je pouze testovací stroj, který má za úkol demonstrovat možnosti této technologie, a tak je veškerá jeho stavba podřízena tomu, aby létal. Je to velmi lehké a velmi pomalé letadlo (jeho maximální vzletová hmotnost je 2 000 kg, z toho je užitečný náklad 400 kg, a maximální rychlost je $70 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$) při poměrně velkém rozpětí křídel (63 m) a délce trupu (22 m). Z toho je jasné, že s takovými parametry by na něm žádné aerolinky nevydělaly. Zamysleme se nad tím, jestli by solárním pohonem šlo pohánět nějaké standardní dopravní letadlo, a nad tím, jaký pokrok je nutný, aby se vyvážíly případné nedostatky.

Naším modelovým letadlem budiž Boeing 787-8 *Dreamliner*. Parametry, které budeme uvažovat, jsme našli na Wikipedii:²⁰ Důležité hodnoty jsou následující: plocha křídel $S_k = 325 \text{ m}^2$, maximální hmotnost paliva $m_p = 102 \text{ t}$ a výkon motorů $P_s = 71 \text{ MW}$ (při vzletu – při samotném letu je výkon nižší, ale letadlo, které nevzletí, neletí). Za poznámku stojí také, že co do rozpětí křídel jsou si obě letadla, která tu zmiňujeme, velmi podobná.

Už jen z toho výkonu motorů je evidentní, že pohánět *Dreamliner* solárními panely bude nejspíš utopie. Proč? Víme,²¹ že na Zemi dopadá sluneční záření, jehož plošná hustota výkonu je přibližně $1\,000 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. I kdyby solární panely měly 100% účinnost, nikdy bychom se na požadovaných 71 MW nedostali. Museli bychom znásobit plochu celého letadla řádově aspoň 10^2 krát. Budiž nám útechou aspoň to, že v operačních výškách dopravních letadel bude tok slunečního záření vyšší než na úrovni moře. Jak bychom tomu, aby letadlo létalo, mohli pomoci? Protože jsme mohli vypustit všechno palivo, naše letadlo teď unese 102 t baterií, které si na zemi před letem můžeme pomoci solárních článků dobít. Lehké lithium-iontové baterie (ty lepší) mají poměr uskladněné energie ke hmotnosti asi²² $0,8 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ (pro srovnání benzin asi $45 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$). Kdybychom celý prostor využili na baterie, měli bychom k dispozici asi 82 GJ elektrické energie. To už zní lépe, ale při plném výkonu je to asi 20 min. Jenže v tuto chvíli jsme zanedbali to, že baterie se při takovémto odběru budou rychle přehřívat, což by si vyžádalo náročné chlazení. *Dreamliner* jsme zvolili jako ukázkou také proto, že jako moderní letadlo spoléhá na složitou elektronickou avioniku, která si vyžaduje velký (sice stále řádově menší) elektrický výkon a stejně se v něm baterie přehřívají.²³

Je také potřeba zmínit to, že letadla za svoje vlastnosti vděčí právě proudovému motoru, který se nedá jen tak nahradit motorem elektrickým – bylo by nutné se vrátit k vrtuli, což by snížilo účinnost, a tudíž i dolet a další vlastnosti, které bychom od dopravního letadla očekávali.

Zdá se, že v tuto chvíli není možné postavit dopravní letadlo, které by poháněla pouze sluneční energie. Co s tím může věda udělat? Limity jsou jasné – letadlo samo o sobě nemůže

¹⁹<http://www.solarimpulse.com>

²⁰http://en.wikipedia.org/wiki/Boeing_787_Dreamliner

²¹[http://en.wikipedia.org/wiki/Air_mass_\(solar_energy\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Air_mass_(solar_energy))

²²http://en.wikipedia.org/wiki/Energy_density

²³<http://www.ft.com/cms/s/0/4369c0d8-7dd9-11e3-95dd-00144feabdc0.html>

vyrábět víc energie, než mu Slunce a jeho rozměry dovolí. Tento výkon sám o sobě dostatečný na pohon velkých letadel nejspíš nikdy nebude. Materiáloví inženýři by mohli přinést nové lehčí konstrukční prvky, ale cesta k letadlu poháněnému elektřinou vede spíše přes výkonné a energeticky husté baterie, které budou dobíjeny elektřinou (třeba ze solárních článků) na zemi.

Aleš Podolník
ales@fykos.cz

Úloha III.E . . . viskozoidní

8 bodů; průměr 5,59; řešilo 41 studentů

Každá kapalina má svou specifickou viskozitu. Pokuste se doma vyrobit průtokový viskozimetr a změřit relativní viskozitu několika vhodných tekutin (alespoň tří) vůči vodě. Vaše výsledky porovnejte s údaji vyhledanými na internetu.

Kiki při navažování v lékárně švalo, jak všechno teče jinak.

Teorie

Viskozita je veličina, která udává poměr mezi tečným napětím a gradientem rychlosti ve směru kolmém na rychlost při proudění kapalin. Ideální kapalina má viskozitu nulovou, reálné kapaliny mají však v důsledku působení sil mezi částicemi kapaliny nenulovou viskozitu. Tyto síly lze označit jako vnitřní tření, pokud má kapalina velké vnitřní tření, má i velkou viskozitu a poteče pomaleji.

Pro měření viskozity je třeba použít newtonovské kapaliny (zpravidla nízkomolekulární látky), u kterých je přímá úměra mezi rychlostí jejich deformace a napětím. Tyto kapaliny se řídí Newtonovým zákonem viskozity

$$\tau = \eta \frac{du}{dx},$$

kde τ je tečné napětí, η je *dynamická* viskozita a du je vzájemná rychlost pohybu smykových rovin vzdálených o dx . Kromě dynamické viskozity pak ještě zavádíme *kinematickou* viskozitu $\nu = \eta/\rho$, kde ρ je hustota kapaliny.

Viskozita závisí na teplotě a se zvyšující se teplotou klesá, což má podklad v chování částic, které se při nižší teplotě více shlukují. Platí, že pro jednoduché měření viskozity je třeba, aby proudění kapaliny bylo laminární a ne turbulentní, neboť turbulence by byly dalším faktorem mimo viskozitu, který by proudění kapaliny brzdil, a rušily by tak určení viskozity. Zda je proudění laminární či turbulentní lze určit pomocí Reynoldsova čísla $Re = (vd)/\nu$, kde v je střední rychlost proudění kapaliny a d je průměr trubice. Za střední rychlost proudění lze přibližně považovat průměrnou rychlost kapaliny vztaženou k průřezu trubice S , průměrnou rychlost kapaliny vypočítáme jako podíl objemu kapaliny V , jehož průtok měříme, a průměrné doby průtoku T . Po úpravě dostáváme pro výpočet Reynoldsova čísla vztah

$$Re = \frac{4V}{\pi d T \nu}.$$

Přibližná číselná hodnota Re pro každou kapalinu je uvedena u výsledků v tabulce 2. Pokud je hodnota Reynoldsova čísla do dvou tisíc, proudění je laminární.

Stanovení viskozity pomocí průtokových viskozimetrů je založeno na měření doby průtoku T . Pro objemový tok Φ při laminárním proudění kapaliny v trubici o kruhovém průřezu s poloměrem r a délce l můžeme psát²⁴

$$\Phi = \frac{\pi \Delta p r^4}{8 \eta l},$$

kde Δp je rozdíl tlaků na začátku a na konci trubice. V našem případě uvažujeme svislou trubici, na kterou je shora připojen zásobník s kapalinou a z jejíhož dolního konce kapalina volně vytéká (zásobník je otevřený, takže na hladinu vody v něm působí atmosferický tlak). Je tedy zřejmé, že $\Delta p = \rho g l + p$, kde p je hydrostatický tlak u dna zásobníku (takže $p \equiv p(h)$, kde h výška hladiny kapaliny v zásobníku nad nějakou pevnou referenční hladinou, a p je rovněž přímo úměrný ρ , neboli $p(h) = \rho \Pi(h)$ pro nějakou funkci $\Pi(h)$, přičemž $\Pi(h)$ závisí pouze na geometrii experimentu a ne na použité kapalině).

Označme nyní $S(h)$ vodorovný průřez zásobníku ve výšce h . Potom podle rovnice kontinuity musí platit $S(h)\dot{h} = -\Phi(h)$, což je diferenciální rovnice pro h . Měříme-li čas T pro všechny kapaliny mezi dvěma pevnými hladinami h_1 a h_2 v zásobníku, dostáváme přímou integrací vztah

$$T = - \int_{h_1}^{h_2} \frac{S(h)}{\Phi(h)} dh = - \frac{8 \eta l}{\pi \rho r^4} \int_{h_1}^{h_2} \frac{S(h)}{g l + \Pi(h)} dh = K \nu,$$

kde K je konstanta pro náš měřicí aparát a nezávisí na volbě kapaliny. Dostáváme tedy důležitý výsledek: *doba průtoku T kapaliny viskozimetrem je přímo úměrná její kinematické viskozitě*. Změříme-li doby průtoků pro různé kapaliny, dokážeme pak jednoduše spočítat poměry jejich kinematických viskozit. Známe-li pak přesně kinematickou viskozitu jedné z kapalin, můžeme z těchto poměrů dopočítat kinematické viskozity všech ostatních.

Pomůcky – výroba průtokového viskozimetru

Pro výrobu viskozimetru byla využita tenká plastová trubička s vnitřním průměrem $d = 1$ mm. Trubička byla kouskem zasunuta do vršku od PET láhve (s vyvrtanou dírkou na ni) a oblepena, aby se ve vršku neposunovala a neprosakovala kolem ní kapalina. Jako zásobník kapaliny byla použita seříznutá PET láhev, na které byly tenkým fixem udělány rysky pro vymezení objemu kapaliny, jehož doba průtoku bude měřena. Tento vymezený objem byl zhruba 400 ml, tedy dostatečné množství, aby výsledky měření výrazně neovlivnily nepřesnosti při měření času průtoku s použitím stopky.

Měření

Doba průtoku byla měřena u vody, 20 % roztoku sacharózy, nízkotučného mléka, technického lihu a technického benzínu. Všechny kapaliny se nechaly nějaký čas temperovat na pokojovou teplotu. Samotné měření probíhalo takovým způsobem, že kapalina byla nalita shora do připraveného viskozimetru tak, aby její hladina dosahovala několika centimetrů nad horní rysku a nechala se protékat. V okamžiku, kdy hladina dosáhla horní rysky, byly spuštěny stopky a zastaveny byly ve chvíli, kdy hladina dosáhla spodní rysky. Kapalina byla zachytávána v nádobě pod viskozimetrem, aby bylo možné s ní měření provést celkem desetkrát. Před měřením každé další kapaliny byly jak viskozimetr, tak ostatní pomocné nádoby vždy umyty a vysušeny.

²⁴Jedná se o *Poiseuilleův zákon*, jehož odvození z Newtonova zákona ponecháváme čtenáři jako instruktivní cvičení.

Tabulka 1: Naměřené časy průtoku jednotlivých kapalin a průměrný čas průtoku.

$\underline{T}_{\text{voda}}$	$\underline{T}_{\text{sacharóza}}$	$\underline{T}_{\text{mléko}}$	$\underline{T}_{\text{benzín}}$	$\underline{T}_{\text{láh}}$
s	s	s	s	s
312,06	395,81	421,85	305,07	309,08
301,67	407,72	429,06	314,79	315,34
310,91	404,67	429,73	310,26	321,94
307,39	397,62	425,80	303,94	312,87
304,99	402,50	422,84	299,51	317,63
309,23	396,25	427,49	304,36	311,58
310,72	399,13	426,87	311,27	317,27
308,14	401,59	430,15	313,48	320,04
307,58	406,74	424,88	302,02	316,76
313,42	402,45	425,92	305,44	313,83
$308,6 \pm 2,5$	$401,5 \pm 3,0$	$426,5 \pm 2,0$	$307,0 \pm 3,6$	$315,6 \pm 2,8$

Výsledky

Výsledky získané měřeními jsou časy průtoku jednotlivých kapalin, tyto časy byly statisticky zpracovány pomocí Studentova intervalu spolehlivosti na hladině významnosti $\alpha = 0,05$, výsledky jsou uvedené v tabulce 1.

Cílem úlohy je stanovit relativní viskozitu ostatních kapalin vůči vodě, čehož docílíme, pokud podělíme výsledný čas průtoku kapaliny časem průtoku vody. Víme-li, že kinematická viskozita vody při $18\text{ }^\circ\text{C}$ činí $1,06 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, můžeme za pomoci získané relativní viskozity odhadnout kinematické viskozity ostatních kapalin. Tabulka 2 uvádí relativní kinematickou viskozitu kapalin vůči vodě, odhad kinematické viskozity (relativní kinematická viskozita vynásobená kinematickou viskozitou vody) a kinematickou viskozitu uvedenou pro jednotlivé kapaliny na internetu.²⁵ Zde je však nutné mít na zřeteli, že technický láh nemá stejné chemické složení jako čistý láh, pro který byla viskozita uvedena, to samé platí o technickém benzínu. Jedná se tedy spíše o údaj pro porovnání, jakou kinematickou viskozitu má daná kapalina, pokud je v chemicky čistém stavu. Mimo to je v posledním sloupci tabulky uvedeno již zmíněné Reynoldsovo číslo pro každou kapalinu, aby bylo ověřeno, že proudění bylo laminární.

Diskuze

I přesto, že se jedná o domácí vyrobený viskozimetr, měření poskytla poměrně dobré výsledky. Díky dostatečně tenké trubičce je proudění laminární tak, jak potřebujeme, což je vidět z vypočítaných hodnot Reynoldsova čísla pro všechny kapaliny (žádná hodnota nepřesahuje 2000). Proto je možné použít jednoduchý model určení viskozity z doby průtoků bez dalších komplikací. Ukázalo se, že je názornější na takto domácí vyrobeném viskozimetru měřit látku *od pohledu* viskóznější než voda, protože například naměřená doba průtoku technického benzínu byla vodě tak blízká, že jejich relativní kinematická viskozita se lišila jen minimálně, takže by nebylo možné od sebe s velkou přesností tyto dvě kapaliny rozlišit pomocí měření viskozity s naší technikou (pomineme-li nepřehlédnutelný zápach technického benzínu).

²⁵<http://cs.wikipedia.org/wiki/Viskozita>

Tabulka 2: Určení relativní kinematické viskozity vůči vodě a přibližné kinematické viskozity. V předposledním sloupci je kinematická viskozita látek (v čistém stavu) podle údajů z internetu. Poslední sloupec obsahuje přibližnou hodnotu Reynoldsova čísla.

látka	$\frac{\nu}{\nu_{\text{voda}}}$	$\frac{\nu \cdot 10^6}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}$	$\frac{\nu_{\text{tab}} \cdot 10^6}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}$	Re
voda	1	$1,06 \pm 0,00$	1,06	160
sacharóza	$1,30 \pm 0,09$	$1,38 \pm 0,10$		90
mléko	$1,38 \pm 0,05$	$1,46 \pm 0,05$		80
líh	$1,02 \pm 0,08$	$1,08 \pm 0,09$	1,07	160
benzín	$0,99 \pm 0,10$	$1,04 \pm 0,11$	0,77	150

Závěr

Podařilo se určit relativní kinematické viskozity vůči vodě u různých kapalin. Viskozita u mléka se ukázala být zhruba 1,4krát vyšší než viskozita vody, viskozita roztoku sacharózy byla 1,3krát vyšší a viskozity technického benzínu a lihu se viskozitě vody hodně blížily, technický líh měl viskozitu o málo větší a technický benzín téměř zanedbatelně menší. Bohužel získané výsledky nelze dobře porovnávat s údaji na internetu, neboť použité kapaliny byly směsi a nešlo je přesně chemicky definovat. Přesto lze experiment považovat za poměrně zdařilý a vzhledem k použitému vybavení vlastní výroby i za poměrně přesný (při opakování měření se jednotlivé časy průtoku dané kapaliny lišily minimálně).

Nakonec lze pro odlehčení doporučit stránku o více než 85 let probíhajícím experimentu, který s problematikou naší úlohy souvisí.²⁶

Kristína Nešporová
kiki@fykos.cz

Úloha III.S ... aplikační

6 bodů; průměr 3,75; řešilo 28 studentů

- a) V textu seriálu jsme využili přibližný vztah pro $\sqrt{1+h^2}$, kde h je malá hodnota. Zkoumejte, jak přesná je to aproximace. Jak moc se může h lišit od nuly, aby se aproximovaná a přesná hodnota lišily o méně než deset procent? Podobnou aproximaci můžeme provést pro libovolnou rozumnou funkci pomocí tzv. Taylorova rozvoje. Pokuste se na internetu najít Taylorův rozvoj například pro funkce $\cos h$ a $\sin h$ kolem bodu $h = 0$, zanedbejte členy vyšší než h^2 a najděte přibližnou mezní hodnotu h , kdy se aproximovaná a přesná hodnota liší o 0,1.
- b) Uvažujme vlnovou rovnici pro klasickou strunu ze seriálu a necht' je struna pevně upevněna na jednom konci v bodě $[x; y] = [0; 0]$ a na druhém konci v bodě $[x; y] = [l; 0]$. Pro jaké hodnoty ω , α , a a b je výraz

$$y(x, t) = \sin(\alpha x) [a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)]$$

řešením vlnové rovnice?

Tip Dosadte do pohybové rovnice a využijte okrajové podmínky.

²⁶<http://smp.uq.edu.au/content/pitch-drop-experiment>

- c) V minulém díle seriálu jsme porovnávali hodnoty akce pro různé trajektorie částice. Nyní vypočítejte hodnotu Nambu-Gotovy akce pro uzavřenou strunu, která od času 0 do času t stojí na místě v rovině (x^1, x^2) a má tvar kruhu o poloměru R . Máme tedy

$$X(\tau, \sigma) = (c\tau, R \cos \sigma, R \sin \sigma, 0)$$

pro $\sigma \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Načrtněte dále, jak vypadá světoplocha této struny (na poslední, nulovou komponentu zapomeňme) a jak vypadají čáry konstantního τ a σ .

- a) V textu seriálu jsme využili aproximace

$$\sqrt{1+h^2} \approx 1 + \frac{1}{2}h^2.$$

Dosadíme-li pár hodnot do obou stran výrazu, zjistíme, že pro malá h lze vztah považovat za praktický přesný (relativní odchylka od přesné hodnoty je pro $h = 0,1$ pouhých 0,001 %). Rozdílnost pravé a levé strany však pro vyšší hodnoty h stoupá. Pro $h = 1$ je to již 6 % rozdíl a pro $h = 10$ nelze už ani mluvit o aproximaci.

Jaká je tedy hodnota h , aby byla odlišnost pravé a levé strany právě 10 %? Tuto hodnotu určíme řešením následující rovnice

$$\frac{1 + 0,5h^2 - \sqrt{1+h^2}}{\sqrt{1+h^2}} = 0,1.$$

Po dvou umocněních na druhou dostaneme kvadratickou rovnici v h^2 , jejímž řešením dostáváme dvě reálná řešení $h \doteq \pm 1,195$. Hodnota h se tedy může lišit od nuly maximálně o 1,195, aby byla přesnost aproximace maximálně 10 %.

Podobnou aproximaci lze provést i pro další funkce. Speciálně pro sinus a kosinus máme rozvoje

$$\begin{aligned} \sin h &= h - \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120} + \dots, \\ \cos h &= 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} + \dots \end{aligned}$$

Čím více členů v Taylorově rozvoji funkce vezmeme v úvahu, tím lepší dostáváme aproximaci. Jednotlivé členy se obvykle liší řádově. V případě sinu dává například první člen pro $h = 0,5$ příspěvek 0,5, zatímco druhý člen 0,02 a následující pouhých 0,0003. Člen následující po členu, do kterého uvažujeme rozvoj, pak můžeme považovat za odhad chyby aproximace. V našem případě uvažujeme jen členy do h^2 v rozvoji výše a následující člen pak určuje přibližnou chybu. Pro h odpovídající chybě 0,1 pak máme podmínku

$$\begin{aligned} \frac{h^3}{6} &\approx 0,1, \\ \frac{h^4}{24} &\approx 0,1. \end{aligned}$$

Řešením dostáváme v prvním případě mezní hodnotu 0,843 a ve druhém případě 1,245 (hodnoty udáváme v radiánech). Tento odhad chyby není daleko od skutečné hodnoty, která je 0,854 a 1,261.

b) Dosadme navrhovaný tvar řešení do vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0,$$

kde jsme označili rychlost šíření vlny $c^2 = (T_0 l)/m$. K tomu potřebujeme umět parciálně derivovat podle x a t . Derivujeme-li parciálně podle jedné proměnné, považujeme ostatní proměnné za konstanty a tedy pro první derivace

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \sin(\alpha x) [-a\omega \sin(\omega t) + b\omega \cos \omega t],$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \alpha \cos(\alpha x) [a \cos(\omega t) + b \sin \omega t].$$

Pro druhé derivace pokračujeme podobně a všimněme si, že

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 y(x, t),$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = -\alpha^2 y(x, t).$$

Dosazením do vlnové rovnice a vydělením $y(x, t)$ dostáváme tedy podmínku

$$\omega^2 = c^2 \alpha^2.$$

Nyní uvažujme okrajové podmínky, podle kterých musí být v každém čase t

$$0 = y(0, t) = 0,$$

$$0 = y(l, t) = \sin(\alpha l) [a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)],$$

kde první podmínka je triviálně splněna a druhá dává restrikcí na hodnoty α . Protože je člen v hranaté závorce obecně nenulový, musí být nulový sinus, tedy

$$\alpha l = \pi n,$$

kde n je celé číslo. V případě $n = 0$ máme však triviální (nulové) řešení a záporné hodnoty n odpovídají jen řešením s opačným znaménkem prefaktorů, tedy záměně $a \rightarrow -a$ a $b \rightarrow -b$, které nejsou nikterak omezené. Proto můžeme uvažovat jen přirozená n .

Máme tedy možná řešení vlnové rovnice

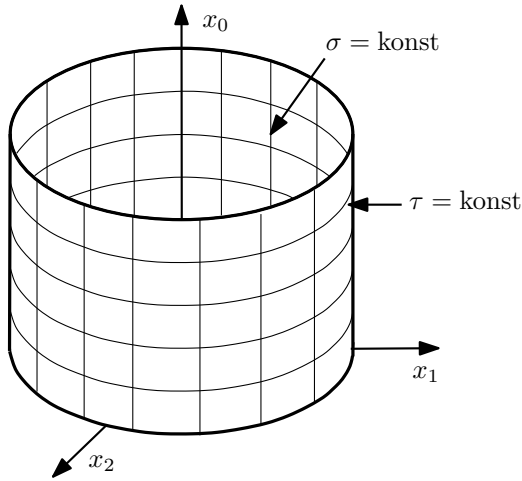
$$y(x, t) = \sin(\alpha x) [a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)],$$

kde

$$\alpha = \frac{\pi}{l} n, \quad \omega = \frac{\pi c}{l} n$$

a hodnoty a a b mohou být libovolné. Tyto hodnoty lze určit ze znalosti počáteční konfigurace struny.

Poznamenejme ještě, že číslo n odpovídá počtu „kolečků“ sinu, které se na strunu „vejdou“. Řešení pro různá n pak odpovídají různým módům kmitání struny. O tom si ještě povíme v dalším díle seriálu.



Obr. 12: Světlocha uzavřené struny z příkladu c).

- c) Kruhá struna stojí v prostoru (pro daného pozorovatele) opisuje v časoprostoru plášť válce tak jako na obrázku. Na obrázku jsou také vyobrazeny čáry konstantního τ a σ , které lze snadno určit ze znalosti parametrizace.

Vypočítáme hodnotu akce ze znalosti parametrizace přímým dosazením. Čáry konstantního τ a σ jsou na sebe kolmé a můžeme tedy dosazovat do výrazu

$$S[\mathbf{X}(\tau, \sigma)] = -\frac{T_0}{c} \int_0^t \int_0^{2\pi} \sqrt{-\left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}\right|^2 \left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}\right|^2} d\tau d\sigma.$$

My ale máme po zderivování každé složky

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} &= (c, 0, 0, 0), \\ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} &= (0, -R \sin \sigma, R \cos \sigma, 0). \end{aligned}$$

Velikosti těchto čtyřvektorů jsou tedy (vzpomeňme na první seriál a úlohy k němu, kde jsme tyto velikosti počítali)

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}\right|^2 &= -c^2, \\ \left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}\right|^2 &= R^2 \sin^2 \sigma + R^2 \cos^2 \sigma = R^2. \end{aligned}$$

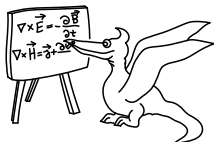
Dosazením do výrazu pro akci a dvěma integracemi konstanty dostáváme konečně

$$S[\mathbf{X}(\tau, \sigma)] = -\frac{T_0}{c} \int_0^t \int_0^{2\pi} cR d\tau d\sigma = -2\pi R T_0 t.$$

V tomto speciálním případě lze hodnotu akce také uhádnout. Z textu seriálu víme, že hodnota akce odpovídá povrchu světloplochy vynásobenému prefaktorem $-T_0/c$. Povrch pláště válce (bez podstavy) o poloměru R a délce ct (viz zadání) je roven $2\pi Rct$ a hodnota akce bude tedy $S = -2\pi T_0 R t$, což je hodnota, která nám výše vyšla. Poznamenejme ovšem, že tomu tak nemusí být vždy, protože plocha je měřená metrikou ds a její naivní výpočet může dát obecně jiný výsledek.

Vojtěch Witzany
witzanyv@fykos.cz

Miroslav Rapčák
miro@fykos.cz



Seriál: Kvantový

Přehoupli jsme se za polovinu tohoto seriálu, a proto bychom si měli zrekapitulovat, co už máme za sebou.

V prvním díle seriálu jsme podnikli velmi krátký a divoký nálet na teorii relativity a otázku kvantové gravitace. Speciální teorie relativity mluví o tom, jak různě rychlí pozorovatelé vidí věci odlišně. Prostor a čas už nejsou oddělené a pro různé pozorovatele se míchají – potřebujeme je popisovat jako jeden celek, *časoprostor*. Zároveň nám ale speciální teorie relativity říká, že jsou některé věci, které se prostě nemění, ať se díváme, jak se díváme (jako je například časoprostorový čtyřinterval $(\Delta s)^2$) a opravdová fyzika se nedá jiným pohledem obelhat. Obecná teorie relativity pak tyto myšlenky rozšiřuje a formuluje gravitaci pomocí zakřivení, zmačkání a pootáčení toho, co znamená čtyřinterval $(\Delta s)^2$ v různých bodech časoprostoru.

V díle druhém jsme uvedli důležitý nástroj každého teoretického fyzika – variační principy. Variační principy jsou nejbáječnější pomůcka při *hádání* fyzikálních zákonů, protože umožňují přirozeně rozšiřovat stávající teorie – třeba od bodu k řetízku nebo od částice ke struně. Ve druhém i třetím díle jsme viděli, že variační principy lze použít úplně všude, u statické rovnováhy, u lomu paprsků, u kmitů mechanických strun, u letů volných částic v relativitě i v klasické fyzice, a nakonec i u pohybu těch zvláštních provázkovitých objektů, kterým říkáme *relativistické struny*.²⁷

Co teď? Pokud jste si zatím nestihli pořádně pročíst složitá odvození z minula, nemusíte zoufat, protože k akci struny se vrátíme až příště. Po uvedení relativity a principu akce se nyní vrhneme na něco docela jiného – na principy kvantové fyziky. O to tady přeci od začátku jde, *nakvantovat* gravitaci. Co ale vůbec je to kvantování? Proč je potřeba mít kvantovou teorii? A jak se to dělá? To si vysvětlíme v tomto díle.

V roli slepce s nejistou rukou

Pokud sledujete objekt v každodenním životě, řekněme mokrou houbu vrženou po vás spolužákem, onu houbu bombarduje v každém okamžiku nespočet fotonů, ze kterých část pak vnímá vaše oko. V přímém přenosu tak můžete sledovat detailní pohyb houby a přesně předpovědět

²⁷ Znovu opakujeme, že *mechanickou strunou* myslíme opravdovou strunu například na kytarě a *relativistickou strunou* jakousi jednorozměrnou úsečkou nebo smyčkou plující v časoprostoru.

její pohyb tak, abyste se stihli včas vyhnout a ona nasáklá zapáchající houba zasáhla vašeho nic netušícího nebohého spolužáka (nedostaly se k němu přes vás fotony).

V mikrosvětě je všechno jinak, každý foton nadělá pěknou paseku a s předpovědí musíte být mnohem opatrnější. Situaci si můžete představit tak, že máte zavázané oči a značně roztřesenou ruku s hůlkou. Pokud chcete najít nějaký objekt, řekněme houbu nebo, abychom se trochu přiblížili tomu mikrosvětlu, elektron, musíte na něj narazit hůlkou. Ťuknutím předmět vždy trochu vyrušíte a rozpohybujete. Nicméně ruka se vám také třese tolik, že můžete omylem *překmitnout* přes celý hledaný předmět! Nad třasem ruky nemáte žádnou kontrolu, takže i když ucítíte dotek hůlky a objektu, nedokážete určit, jestli jste předmět třeba z půlky nepřekmitli a teprve pak do něj nenarazili.

Je ale jeden způsob, jak zjistit přesněji, kde se předmět v prostoru nachází, můžete svoji tyčku držet křehčivěji. Hůlka pak kmitá rychleji a do předmětu narazí dřív a s kratším překmitem. Je tu ovšem jedna nevýhoda – do předmětu při setkání narazíte rychleji a tím ho víc vyrušíte. Pokud bychom chtěli najít předmět úplně přesně, naše ruka by kmitala tak rychle, že by při nárazu předmět vystřelila někam úplně do neznáma (máme s tím třasem ruky opravdu docela problém).

Obrat Luího D Broje

Doopravdy ale nejsme slepci v mikrosvětě, ale místo roztřesené hůlky s rukou si můžete představit elementární částice, jako je foton nebo elektron. Jak to? Nebojte, hned se k tomu dostaneme.

Asi dobře víte, že světlo lze stejně dobře popsat jak jako elektromagnetickou vlnu, tak i jako proud fotonů. Spojení mezi těmito dvěma obrazy poskytuje pozorování *fotoelektrického efektu*, kdy kov vystřeluje elektrony, pokud je vystaven světlu vysoké frekvence (například ultrafialovému) a vystřeluje elektrony o větších a větších rychlostech s rostoucí frekvencí světla.

Tento jev vysvětlil v roce 1905 Albert Einstein²⁸ pomocí představy, že existují malé balíčky oddělených vln, kde pro světlo o frekvenci f nese každý balík energii

$$E = hf, \quad (13)$$

kde h je nějaká konstanta, kterou dnes známe jako Planckovu. Lze však jít ještě dále, speciální teorie relativity přiděluje částici letící rychlostí světla c energii

$$E = pc, \quad (14)$$

kde p je hybnost částice.²⁹ Když zkombinujeme rovnice (13) a (14) se vztahem pro vlnovou délku světla $\lambda = c/f$, dostáváme

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (15)$$

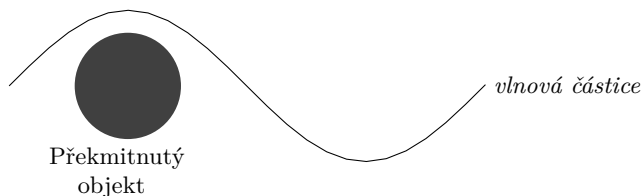
Ve své doktorské práci představil Louis De Broglie³⁰ zajímavou hypotézu – když mají na mikroskopické úrovni vlny vlastnosti částic, neměly by mít mikroskopické částice vlastnosti vln? Pro výpočet vlnové délky takovýchto *hmotných vln* použil právě vztah (15) s použitím klasického $p = mv$.

²⁸V roce 1921 pak dostal Einstein Nobelovu cenu za své služby teoretické fyzice a zejména za jeho objev zákona fotoelektrického jevu, za nic jiného!

²⁹Fotony však nemají žádnou vlastní klidovou hmotnost m , proto nemůžeme říct $p = mv$!

³⁰Byl to Francouz, takže se to čte Luí D Broj, viz nadpis.

Zajímavý, ale trochu zvláštní nápad, říkáte si. To ale ještě nevíte, že tři roky na to naměřili experimentátoři Davisson a Germer vlnovou difrakci elektronů na krystalové mřížce odpovídající vlnové délce (15) a De Broglieho hypotéza tím byla potvrzena!



Obr. 13: Ilustrace nepřesnosti při zkoumání mikrosvěta.

To je tedy ta naše slepecká hůlka – mikroskopické částice jako foton, elektron nebo proton, které vysíláme, aby narážely do předmětů. Nic lepšího prostě k dispozici nemáme. Třás hůlky odpovídá jejich vlnovému charakteru a délka překmitu vlnové délce. Na obrázku 13 můžete vidět ilustraci *překmitu* mikroskopického objektu.

Nesmíme ale zapomenout, že *na těchto škálách musí mít i pozorovaný objekt vlnový charakter*. Navíc vlastně dobře nevíme, co to znamená *srážka dvou vlnových částic*, takže je obrázek 13 pouze jakýmsi intuitivním přiblížením toho, proč jsou naše pozorování nepřesná.

Síla sevření naší slepecké hůlky zvyšující frekvenci jejího třasu odpovídá energii částice nebo též její hybnosti. Zvýšená energie nebo hybnost částice pak vyruší jakoukoliv věc, kterou se náletem mikroskopické částice pokoušíme pozorovat.

Pokud si takto uvědomíme, že *polohu ani hybnost částice nemůžeme znát současně přesně*, dojdeme navíc k legrační zacyklenosti: *pomocí částic, jejichž přesnou polohu ani hybnost neznáme, se snažíme zjistit polohu a hybnost dalších částic, což bychom ani tak nemohli udělat přesně*.

Mikroskopický svět je prostě jako rozmlžená struktura, na kterou si nemůžeme sáhnout, ať se snažíme sebevíc. Rozmlženost *fázového prostoru* na mikroskopických škálách je pak nejlépe demonstrována pro chybu polohy Δx a hybnosti Δp takzvanými Heisenbergovými relacemi neurčitosti:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (16)$$

kde $\hbar = h/(2\pi)$ je redukovaná Planckova konstanta.

Ještě než přejdeme k formulaci kvantové mechaniky, zmíníme jednu poslední poznámku – o částici tu mluvíme jako o vlně a naopak. Pravda je taková, že v řadě kontextů se mikroskopická částice chová výhradně vlnově, v dalších ale výhradně částicově, tj. jako hmotný bod. Je to právě tato podivná dualita, která zamotává hlavu vědcům již skoro století a neexistuje jasná shoda na tom, jak ji vysvětlovat.

Shoda však existuje na aparátu, který předpovídá výsledky experimentů, ten uvedeme záhy.

Hmotný bod je mrtev, ať žije stav!

V historii fyziky se ukázal být nesmírně plodný přístup: *Nemůžu to ani v principu změřit? Pak to není potřeba v žádných fyzikálních zákonech*. Takto například Albert Einstein vyškrtl z fyziky éter a absolutní souřadný systém, vůči kterému se mělo pohybovat světlo svojí konstantní rychlostí c , a získal speciální teorii relativity.

U kvantové mechaniky se jde ovšem ještě o krok dál – protože nemůžeme na mikroskopických škálách přesně znát polohu ani hybnost částice, prostě je zahodíme a fyzikální zákony budeme popisovat bez nich. Polohy a hybnosti, tj. bod ve fázovém prostoru, jsou nahrazeny *stavovým vektorem*, který budeme značit $|\Psi\rangle$. Smíříme se s tím, že v sobě nese pouze informaci o pravděpodobnosti různých hybností a poloh, nikoliv však jejich ostré hodnoty. Protože se obecně může částice s nějakou nenulovou pravděpodobností v principu nacházet v nekonečně mnoha bodech, bude stavový vektor obecně nekonečně-dimenzionální (bude mít nekonečně mnoho složek).

To však není všechno, protože nám experiment bezpodmínečně potvrzuje relace neurčitosti (16) pro všechny fyzikální situace, *musí být důsledkem nějaké fundamentální fyziky!* Jak to udělat se dozvíte až za pár odstavců.

O kvantové mechanice, která udává stavové vektory a jejich dynamiku, se přednáší celé semestry vysokoškolských přednášek. Pokud si ale chcete přečíst nějaký středně zevrubný úvod, můžete si v archivu na našem webu najít XX. ročník FYKOSího seriálu, který se právě kvantové mechanice výhradně věnuje.

My si tady řekneme pouze následující: informace o měřitelných veličinách se z kvantověmechanického stavového vektoru těží takzvanými *operátory*. Operátory si můžete představit jako matice skládající se z nekonečně mnoha čísel násobící nekonečně-dimenzionální stavový vektor (nekonečně dlouhý sloupcový vektor). Podívejte se, co udělá násobení maticí v následujícím případě:³¹

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vidíte, že na sloupcový vektor působilo násobení čtvercovou maticí jako násobení číslem λ . Pokud máme čtvercovou matici M a nějaký vektor \mathbf{v}_λ , pro který platí

$$M\mathbf{v}_\lambda = \lambda\mathbf{v}_\lambda,$$

říkáme, že \mathbf{v}_λ je vlastním vektorem operátoru (čtvercové matice³²) M s vlastním číslem λ . Právě takovýmto způsobem ale získáváme z kvantověmechanického stavu měřitelné veličiny – pomocí jejich odpovídajících operátorů a vlastních čísel.

Co se ale stane, pokud stavový vektor není vlastním vektorem daného operátoru? Matematická teorie nám zajišťuje, že se na vlastní vektory dá každý vektor rozložit a podíl³³ zastoupení jednotlivých vlastních vektorů je úměrný *pravděpodobnosti, s jakou nalezneme jeho vlastní hodnotu jakožto hodnotu sledované fyzikální veličiny!*

Legrační je, že pak máme operátory, jako je energie částice, které mohou v některých situacích nabývat pouze diskrétních hodnot a *nic mezi tím*.³⁴ Můžeme tedy naměřit pouze jednu hodnotu energie a další až o nějaký kus, *kvantum*, dál.

³¹Pokud neumíte násobit matice a vektory, pak vězte, že se to provádí tak, že výsledný sloupcový vektor postupně plníte skalárním součinem násobeného sloupcového vektoru s řádky násobící matice. Jako první tedy do výsledného sloupcového vektoru napíšete součin původního sloupcového vektoru s prvním řádkem matice atd.

³²Všimněte si, že čtvercová matice vždy násobením vektor jen *přeoperuje* – stane se z něj opět sloupcový vektor stejné délky.

³³presněji druhá mocnina jeho absolutní hodnoty

³⁴Vzpomeňte na úlohu od Nielse Bohra k druhému dílu seriálu.

Spousta z vás si doteď možná říkala, proč se kvantové mechanice říká *kvantová*, když se doteď zdála oproti klasické hlavně *vlnová*. Toto kvantování pozorovaných hodnot různých veličin název již osvětluje.

Souvislost mezi vlnovostí a kvantováním můžeme přiblížit následovně – asi dobře víte, že struna uchycená na houslích zní při daném utažení jen jedním tónem, kmitá s jednou frekvencí. To ale není tak úplně pravda, na strunu se vejdu i *vyšší módy* nebo *vyšší harmonické*, které kmitají s *celočíslnými násobky hlavní frekvence* a trochu pozměňují vyznění tónu a dodávají mu jeho specifické zabarvení.³⁵

Pozorujeme tedy vlnění, které se děje pouze na určitých frekvencích, které jsou od sebe vzdáleny o nějaká kvanta. Proto, když je částice někde nějakým způsobem *uchycená* nebo též *vázaná* (jako třeba elektron v atomu), pozorujeme jeho energie v nějakých diskrétních hladinách.

Zpátky ke kvantové mechanice, jako všechny fyzikální veličiny, má i poloha x svůj operátor \hat{X} a hybnost p operátor \hat{P} . Heisenbergovy relace neurčitosti (16) jsou zajištěny postulátem, že působení operátorem polohy na stav $|\Psi\rangle$ a pak operátorem hybnosti dá jiný výsledek než při prohozeném pořadí. Tj. měření polohy a poté až hybnosti dá jiný výsledek než při prohozeném pořadí daných měření. Matematické zkoumání požadavku Heisenbergových relací vede na požadavek rovnice

$$\hat{X}\hat{P}|\Psi\rangle - \hat{P}\hat{X}|\Psi\rangle = i\hbar|\Psi\rangle.$$

Protože zmíněná rovnost musí platit pro libovolný stav, zkráceně se též tato tzv. *komutační relace* zapisuje jako

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar. \quad (17)$$

Teď tedy konečně víte, co je to kvantování – opustí se dosavadní popis pomocí přesného stavu fyzikálního systému a začne se popisovat objektem, kterému říkáme stavový vektor. Ze všech veličin, jako je poloha nebo hybnost, se stanou operátory, a jako náš hlavní průvodce pro jejich identifikaci nám slouží komutační relace (17). Tento postup však není úplně jednoznačný, zvláště u složitějších systémů, a proto se říká, že *kvantování je spíš umění, než matematický postup*. Nakvantování systému musí proto vždy ještě potvrdit experimentální pozorování.

Průměty v nekonečných dálavách a prostorech

Mohli jste si všimnout, že jsme doteď nepoužívali složky polohy nebo hybnosti. To je proto, že budeme pro jednoduchost uvažovat pouze částici, která se může pohybovat pouze v jednom rozměru a ne ve třech, jako jsme zvyklí. Složka hybnosti i polohy je pak jen jedna a značíme ji x a p . K tomu, abychom popsali stavový vektor, si musíme vybrat něco jako souřadný systém, ve kterém vyjádříme složky vektoru. Zatímco u prostorových vektorů volíme složky podle průmětů do celých os x, y, z , v případě stavového vektoru je vše úplně jinak. Musíme totiž promítat stavový vektor *do vlastních vektorů nějakého operátoru*, kterých může být nekonečně mnoho.

Jedním z nejčastějších operátorů, do jehož vlastních vektorů se stavový vektor promítá, je operátor polohy \hat{X} . Jeho vlastní vektory jsou dost podivné, protože jsou to stavy, ve kterých částice zcela určitě nalezneme na nějaké naprosto přesné pozici x . Pokud se ale podíváte na Heisenbergovy relace (16), je jasné, že pak neurčitost hybnosti takové částice musí být *nekonečná*. U vlastních vektorů operátoru \hat{X} prostě nevíme, jakou rychlostí se částice v odpovídajícím stavu pohybuje. Tím si ale nebudeme lámat hlavu a přejdeme ke složkám stavového vektoru.

Stejně jako vektor \mathbf{v} má obvykle tři složky v_x, v_y, v_z , tak stavový vektor $|\Psi\rangle$ má složky v této takzvané x -reprezentaci $\psi(x)$, kde x indexuje průmět na vlastní stav, který se určitě nachází

³⁵To odpovídá diskrétnímu systému řešení vlnové rovnice z úlohy k minulému dílu seriálu.

v bodě x . Vidíte, že složky $\psi(x)$ můžeme vlastně chápat jako funkci polohy, která v našem případě nabývá obecně komplexních hodnot. Této funkci se často říká *vlnová funkce*. Hustota pravděpodobnosti, že částici nalezneme v daném bodě, je pak dána kvadrátem velikosti vlnové funkce v daném bodě

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2.$$

Když působíme operátorem \hat{X} na náš stavový vektor $|\Psi\rangle$, promítne se na vlastní stavy operátoru a každý z průmětů je vynásoben vlastním číslem operátoru. V tomto případě jsou vlastní hodnoty polohy částice x a vlastní vektory jsou zmíněné zcela přesně lokalizované stavy v těchto polohách. Proto, když působíme operátorem \hat{X} na náš stav, každý průmět neboli složka vektoru se vynásobí odpovídající hodnotou polohy x :

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &\rightarrow \hat{X}|\Psi\rangle, \\ \psi(x) &\rightarrow x\psi(x). \end{aligned}$$

Napůl mrtvé kočky a jejich spektra

Geometricky si představovat promítání na nekonečně mnoho vektorů může být docela fuška, ale zatněte zuby, protože se už dostáváme k závěru tohoto dílu seriálu. V druhém dílu jsme zmiňovali, že celková energie částice je součet její kinetické energie $T = mv^2/2$ a potenciální energie $V(x)$. Pokud vztah přepíšeme pomocí hybnosti $p = mv$ získáváme³⁶

$$E \equiv H = \frac{p^2}{2m} + V(x). \quad (18)$$

V kvantovém případě stačí tedy jen přejít do x -reprezentace a počítat energetické hladiny jako vlastní stavy tohoto operátoru. Operátor potenciálu bude na složky stavového vektoru $\psi(x)$ působit násobením svojí hodnotou $V(x)$ stejně jako operátor \hat{X} , protože závisí jen na poloze. Horší už je to s operátorem \hat{P} , pro jehož identifikaci máme jen komutační relaci (17). V podúloze a) k seriálu si můžete ověřit, že v x -reprezentaci splňuje komutační relace operátor

$$(\hat{P})_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}. \quad (19)$$

Když tedy chceme hledat energetické hladiny nějakého fyzikálního systému, jako je třeba elektron v atomu vodíku, vezmeme definici energie (18), vložíme do ní operátor hybnosti vyjádřený v x -reprezentaci (19) (potenciál není třeba měnit) a řešíme diferenciální rovnici³⁷

$$(\hat{H})_x \psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

kde E už je ovšem obyčejné číslo – možná měřená hodnota energie, kterou ovšem neznáme. Získáme tak vlnovou funkci, a tudíž i rozložení pravděpodobnosti výskytu částice, ale co nás většinou zajímá více, možné energetické hladiny daného systému.

Částice jako například elektron v atomu, který pak přechází mezi dvěma oddělenými energetickými hladinami, se nějak musí zbavit *celého rozdílu energie najednou*, v jednom kvantu. Forma energie, kterou se elektron energie zbavuje, je vyzářený foton. Proto, když ionizujeme

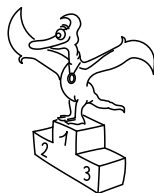
³⁶Celkové energii se též někdy říká hamiltonián, proto se též kromě E značí jako H .

³⁷Této rovnici se někdy říká bezčasová Schrödingerova rovnice.

atomy, pozorujeme u nich diskrétní hodnoty frekvencí (a tudíž energií), na nichž vyzařují při rekombinaci elektronů (jejich návratu do *slupek* atomu).

Jinak řečeno, pozorujeme při ionizaci a následné rekombinaci diskrétní spektrum. Protože byla kvantová mechanika používána nejdříve v kontextu spekter atomů a molekul, říká se často úloze nalezení energetických hladin daného problému *hledání spektra hamiltoniánu*.

Tím protentokrát končíme. Kvantová mechanika je divná, a jak říkal Richard Feynman, kvantové mechanice nerozumí nikdo. Její výhoda je v tom, že ačkoliv jsme v mikrosvětě jako slepci s roztřesenou rukou, kvantová mechanika dokáže v těchto oborech přesto poskytovat *neuvěřitelně přesné experimentální předpovědi*. A o tom fyzika je, o tom, co můžeme změřit. Více ke kvantové mechanice příště a v posledním díle nakvantujeme strunu – je se na co těšit.



Pořadí řešitelů po III. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ
		4	4	4	4	5	5	8	6	40	100	119
1. Matěj Mezera	G Havlíčkův Brod	4	4	4	4	3	1	6	4	30	84	100
2. Jan Preiss	G, Lovosice	4	4	2	1	5	4	7	2	29	80	95
3. Martin Štyks	G Jana Keplera, Praha	4	4	4	2	1	4	7	2	28	76	90
4. Jáchym Bártík	G Havlíčkův Brod	4	2	3	3	4	4	3	2	25	69	82
5. Lucie Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	2	3	1	1	1	4	2	18	57	66
6. Jozef Lipták	G Tajovského, B. Bystrica	4	4	1	-	1	1	7	2	20	62	64
7. Přemysl Šťastný	G, Žamberk	2	4	2	2	1	1	7	1	20	56	62
8. Daniela Pittnerová	G L. Svobodu, Humenné	2	4	3	-	0	2	3	-	14	60	53
9. Klára Ševčíková	G Uherské Hradiště	4	4	2	3	-	2	-	-	15	70	49
10. Jaroslav Janoš	G, Lesní čtvrť, Zlín	4	4	2	3	-	1	7	-	21	79	48
11. Jozef Burkuš	G, Rožňava	2	2	1	-	0	2	3	-	10	52	44
12. Kateřina Stodolová	G, Dašická, Pardubice	4	4	1	4	1	-	-	-	14	76	41
13.-14. Vít Horáček	G L. Jaroše, Holešov	4	4	2	1	1	4	-	-	16	71	40
13.-14. Adam Poloček	G, Havlíčkova, Český Těšín	2	2	2	1	-	4	-	-	11	57	40
15. František Zajíc	G, Nymburk	4	4	2	-	-	5	6	-	21	80	39
16.-17. Petr Jakubčík	PORG, Praha	-	-	1	-	-	-	-	-	1	60	38
16.-17. Aneta K. Lesná	G Christiana Dopplera, Praha	-	4	1	1	1	1	5	-	13	40	38

Kategorie druhých ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ
		4	4	4	4	5	5	8	6	40	100	119
1. Petr Hrubý	G, Polička	4	4	2	1	0	5	8	5	29	74	88
2.-4. Dominika Ďurovčíková	G Hlohovec	4	4	2	2	0	1	8	6	27	72	76
2.-4. Jakub Jambrich	G J. A. Raymana, Prešov	4	4	2	2	1	4	6	3	26	64	76
2.-4. Jiří Jarošík	G J. Vrchlického, Klatovy	4	4	1	1	1	1	6	1	19	70	76
5. Tomáš Hrbek	G J. Ressela, Chrudim	2	4	2	2	1	2	6	5	24	61	73
6. Samuel Obuch	G Jána Hollého, Trnava	4	2	2	1	1	2	5	-	17	51	58
7. Klára Stefanová	G B. Němcové, HK	4	4	2	1	5	4	-	-	20	71	55
8. Pavel Kús	G J. Š. Baara, Domažlice	2	4	4	1	-	4	-	-	15	74	53
9. Daniela Šimánková	G, Pelhřimov	4	4	2	2	1	2	5	-	20	66	52
10.-11. Vojtěch Jelínek	G, Neumannova, Žďár n. S.	-	2	2	-	1	1	4	-	10	46	43
10.-11. Pavel Souček	G, Nymburk	4	4	3	-	-	-	-	-	15	80	43
12. Anna Kuřová	G M. Koperníka, Bílovec	-	-	-	-	-	-	-	-	-	58	41
13.-14. Martin Gažo	G, Pankúchova, SR	4	4	2	-	-	-	-	-	10	86	38
13.-14. Kuba Pilař	G J. Ressela, Chrudim	0	4	1	1	-	1	-	-	7	54	38
15. Marek Otýpka	G, Židlochovice	2	2	-	-	-	4	-	-	8	48	36
16. Jaroslav Stránský	G, Tišnov	-	4	1	-	1	-	6	-	12	66	35

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ	
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	4	4	4	5	5	8	6	36	100	107
1. <i>Filip Ayazi</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	2	5	5	5	6	9	6	40	101	108	
2. <i>Luboš Vozdecký</i>	G a SOŠZZE Vyškov	2	0	4	2	5	4	7	6	30	84	90	
3. <i>Pavel Peterka</i>	G P. de Coubertina, Tábor	2	2	5	–	5	4	7	5	30	84	87	
4. <i>Jozef Bucko</i>	G PdC, Piešťany	2	1	2	1	2	3	7	3	21	75	80	
5. <i>Mojmír Poprocký</i>	G Matyáše Lercha, Brno	2	2	2	–	1	5	5	3	20	77	79	
6. <i>Jakub Sláma</i>	G Opatov, Praha	1	2	3	4	1	6	8	2	27	69	74	
7. <i>Jakub Dolejší</i>	G B. Němcové, HK	2	1	4	–	4	–	–	6	17	85	66	
8. <i>Tomáš Kremel</i>	G J. Škody, Přerov	–	–	3	–	1	2	–	7	13	81	63	
9. <i>Pavel Blažek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	2	2	1	–	1	4	7	–	17	73	54	
10. <i>Tomáš Fiala</i>	G, SOŠ a VOŠ, Ledec n. Sáz.	1	2	2	–	1	–	–	5	11	70	51	
11. <i>Jakub Maruška</i>	G Andreja Vrábľa, Levice	–	1	2	–	1	1	4	–	9	66	47	
12. <i>Miloslav Staněk</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	2	2	2	–	1	4	6	–	17	78	46	
13. <i>Samuel Kočišćák</i>	G Poštová, Košice	2	2	3	–	1	3	–	–	11	68	44	
14. <i>Václav Skála</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	61	43	
15. <i>Lucie Břichová</i>	PSG jazykové, HK	–	–	0	–	1	1	5	–	7	45	39	
16. <i>Martin Vančura</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	73	37	
17. <i>Kateřina Smítalová</i>	G, Dašická, Pardubice	1	1	1	0	–	2	3	1	9	47	36	
18. <i>Václav Rozhoň</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	6	6	87	34	
19. <i>Petr Doležal</i>	G Z. Winttra, Rakovník	2	–	3	–	4	1	–	–	10	79	33	
20. <i>Brigita Holendová</i>	G A. Kmeťa	–	1	1	–	0	1	6	–	9	38	32	
21. <i>Luboš Krnác</i>	G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	–	–	3	–	1	4	–	–	8	60	30	

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ	
<i>Studenti Pilný</i>	MFF UK	2	2	4	4	4	5	5	8	6	36	100	107
1. <i>Jakub Kvorka</i>	G, Dubnica n. Váhom	2	2	5	3	5	3	8	6	34	97	104	
2. <i>Ondřej Zelenka</i>	SPŠ a SOŠGS Most	2	1	5	2	1	3	2	7	23	74	64	
3. <i>Lýdia Janitorová</i>	G, Šrobárova, Košice	1	–	2	1	5	1	7	2	19	56	49	
4. <i>Markéta Vohníková</i>	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	45	
5. <i>Zuzana Vlasáková</i>	G, Rumburk	–	2	–	–	–	2	–	2	6	68	42	
6. <i>Míchal Belina</i>	G Volgogradská, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	65	33	
7. <i>Tomáš Tměj</i>	G, Arabská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	30	
8. <i>Patrik Turzák</i>	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	89	24	
9.–11. <i>Peter Hojnoš</i>	G Školská, Spišská Nová Ves	–	2	–	–	–	–	–	–	2	78	21	
9.–11. <i>Denisa Lampášová</i>	G, Považská Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	81	21	
9.–11. <i>Ján Ondráš</i>	G Grösslingova, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	21	
12. <i>Marek Martaus</i>	G Velká okružná, Žilina	1	2	3	1	5	–	5	3	20	65	20	
13.–14. <i>Norbert Slovka</i>	G Tajovského, B. Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	19	
13.–14. <i>Karolína Šromeková</i>	ŠpMNDaG, SR	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	19	
15. <i>Lukáš Knob</i>	G, Kojetín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	95	18	
16.–18. <i>Július Koval</i>	G Senica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	15	
16.–18. <i>Andrej Novák</i>	G M. Hattalu, Trstená	–	–	–	–	–	–	–	–	–	60	15	
16.–18. <i>Radka Štefaníková</i>	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	94	15	
19. <i>Daniël Slezák</i>	Svobodná chebská škola	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	13	
20.–21. <i>Jiří Guth</i>	G, Jírovcova, České Budějovice	–	–	5	–	–	–	–	–	5	100	12	
20.–21. <i>Viktor Skoupý</i>	G, Moravská Třebová	–	–	–	–	–	–	–	–	–	92	12	



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta


Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>

e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku 

<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.