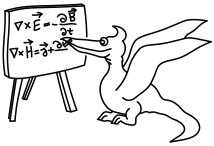


Seriál: Relativistický

Nedávno jsem si listoval v minulých ročnících FYKOSího seriálu a zaujala mě poslední úloha ze seriálu Jardy Trnky o kvantové mechanice. Úlohu tehdy nazval *Za nobelovku* a zadání znělo následovně: „Vytvořte lokální renormalizovatelnou kvantovou teorii pole, která popisuje všechny čtyři typy sil jako projevy jedné sjednocené interakce.“ A tak mě napadlo: „Co na toto téma napsat letošní seriál?“

Doufám, že vás hned ve druhé větě nevystrašilo množství cizích slov a vydáte se s námi na pouť, ve které poodhalíme stěžejní metody a představy, bez kterých se teoretický fyzik neobejde jediný den. Ilustrujeme je na jednom z pravděpodobně nejslibnějších proudů moderní fyziky, který se o sjednocení všech interakcí pokouší, tedy teorii strun.

V prvním díle tohoto seriálu si nejprve osvětlíme problémy se sjednocením a nadsvětelnou rychlostí proběhneme formalismus a některé základní pojmy Einsteinovy teorie relativity.

Sjednocení v potížích

V čem je tedy vlastně problém v současné teorii? Na světě se setkáváme se čtyřmi základními interakcemi, tedy elektro-magnetickou, slabou, silnou a gravitační. Elektro-magnetická je podstatou všech elektrických a magnetických jevů, jevů světelných, ale také je to síla držící elektrony v atomových obalech a určující tak vlastnosti prvků. Slabá jaderná interakce je pro změnu zodpovědná za některé jaderné reakce, jako je například β-rozpad. Silná interakce drží pohromadě nukleony v jádrech atomu, ale také vzájemně přitahuje kvarky, které tvoří konstituenty samotných nukleonů, tedy protonů a neutronů. Poslední zmíněnou interakcí je gravitační, u které narážíme na problém.

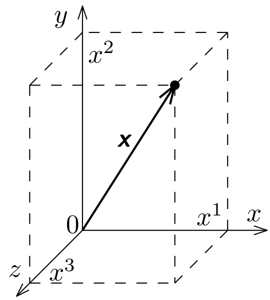
Fyzika 20. století stojí na dvou základních pilířích, a těmi jsou Einsteinova teorie relativity a kvantová fyzika. Už v počátcích vědy se lidé snažili vytvořit jednotnou konzistentní teorii, která by popsala všechny známé částice a jejich interakce. V případě prvních tří výše uvedených interakcí taková teorie existuje. Právě v řeči kvantové teorie lze konzistentně formulovat teorii elementárních částic a prvních tří interakcí (tzv. standardní model fyziky elementárních částic).

Gravitace je však popsána Einsteinovou teorií relativity a jazyk této teorie je naprosto odlišný od jazyka teorie kvantové. Za běžných situací to příliš nevadí, protože kvantová teorie je relevantní teorií na mikroskopických vzdálenostech, zatímco gravitace řídí pohyb planet a hvězd. Problém nastane například u černých děr nebo ve fázích vesmíru hned po Velkém třesku. V těchto situacích je hmota tak hustá, že gravitační i kvantové efekty jsou velmi silné a pro konzistentní popis takových situací je potřeba teorie *kvantové gravitace*.

Snaha o vytvoření teorie kvantové gravitace je už od počátku znesnadněna výskytem výrazů, které jsou nekonečné (divergují), a s nekonečny se rozhodně nepočítá snadno. Kvantová teorie to však umí pomocí tzv. renormalizace, která tato nekonečna za jistých podmínek odstraní. V případě gravitace jsou nekonečna však tak „silná“, že běžná renormalizace selhává a je potřeba vytvořit teorii novou. Teorie strun je doposud jedinou známou konzistentní teorií kvantové gravitace a dokonce existenci gravitace předpovídá.

Setkání v časoprostoru

Než začneme mluvit o strunách, podívejme se nejprve na pár pojmů z Einsteinovy teorie relativity. Pominňme nyní možnou existenci více rozměrů, ke které se možná vrátíme v dalších dílech. Náš prostor je potom třírozměrný. Pro jednoznačné určení polohy bodu stačí udat tři kartézské souřadnice $\boldsymbol{x} = \left(x^1, x^2, x^3\right)$, kde x^1 je hodnota první souřadnice, x^2 hodnota souřadnice druhé a x^3 hodnota třetí jako na obrázku 1. Všimněme si, že složky vektoru číslujeme horním indexem. To je běžná notace v teorii relativity a my tak budeme značit složky všech vektorů (narozdíl od dolních indexů, které později použijeme ke značení tzv. kovektrorů). Budeme vždy dávat pozor na rozdíl mezi indexem a mocninou.



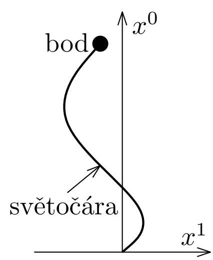
Obr. 1: Vektor v kartézských souřadnicích

Co však zadáním polohy není určeno jednoznačně, je *událost*. Když se domluvím spolužákem, že se sejdeme před školou, tak přestože oba víme, kde se setkat, můžeme tam být každý v jiný čas a stejně se nesetkáme. Do teorie je proto přirozené přidat čtvrtý rozměr, tedy čas. Událost je potom popsána čtyřrozměrným vektorem $\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$. Kamarádovi, se kterým si chci domluvit schůzku, můžu napsat SMS ve tvaru (15:00, $\boldsymbol{x}_{\text{škola}}$) a najednou je vše jasné.

Vzdálenost však měříme v metrech, zatímco čas v sekundách a my bychom rádi, aby měly všechny složky čtyřvektoru stejnou jednotku. Toho docílíme snadno tak, že vynásobíme časovou souřadnici t nějakou univerzální konstantou s rozměrem rychlosti, jako je například rychlost světla c. Máme tedy

$$\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = \left(ct, x^1, x^2, x^3\right)$$

a trojrozměrný prostor jsme tak povýšili na časoprostor.

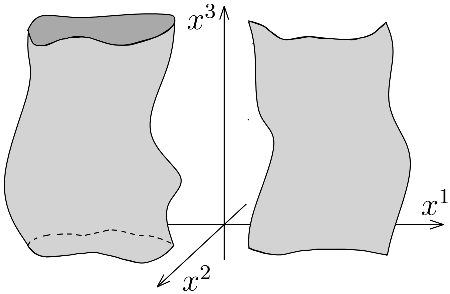


Obr. 2: Světočára bodu pohybujícího se v časoprostoru

Sledujme nyní pohyb částice v časoprostoru. Částice zde opisuje tzv. světočáru. Jedna taková světočára je znázorněna na obrázku, kde nejsou vyobrazeny všechny čtyři rozměry, ale jen první odpovídající času (na ose y) a druhá odpovídající souřadnici x^1 (na ose x). Částice startuje v čase $x^0 = 0$ z počátku a poté se pohybuje podél naší zvolené osy x^1 nejprve směrem doprava, poté doleva a zase zpět doprava. Pohyb takového částice je popsatelný čtyřmi funkcemi ve tvaru $\left(x^0(p), x^1(p), x^2(p), x^3(p)\right)$, kde p je nějaký libovolný parametr určující polohu na světočáře (tj. první složka čas události a zbylé polohu v prostoru).

Teď, když jsme si vyložili, jak znázorňovat pohyb bodu v prostoročase, rádi bychom znázornili pohyb jednorozměrného provázku. Teorie strun je teorií těchto provázků, které se pohybují v prostoročase. Bodová částice nám při pohybu v prostoročase zaznamenávala světočáru, zatímco struna bude zaznamenávat dvoudimenzionální plochu, tzv. světoplochu. Struny lze rozdělit na dva typy. Prvním typem je *otevřená struna* se dvěma konci a druhým je *uzavřená struna* se spojenými konci. Světoplochu otevřené struny vidíme na obrázku vpravo a uzavřené struny vlevo.

Jednorozměrnou světočáru částice jsme byli schopni popsat čtveřicí funkcí závislých právě na jednom parametru p. Světoplochu struny však jedním parametrem nepopíšeme, protože jde o dvojrozměrný objekt. Zde budeme potřebovat parametry dva, τ a σ, a světoplocha bude



Obr. 3: Světoplocha uzavřené struny (vlevo) a otevřené struny (vpravo) v časoprostoru

popsána čtveřicí funkcí těchto proměnných $\left(x^0(\tau,\sigma),\, x^1(\tau,\sigma),\, x^2(\tau,\sigma),\, x^3(\tau,\sigma)\right)$. Dosazením za τ a σ dostaneme bod na světoploše struny v prostoročasu. Chceme-li pro změnu vědět, jaký má struna tvar v daném čase, stačí udělat řez světoplochou kolmý na osu x^0 v daném čase. Ke světoplochám se však blíže vrátíme v dalších dílech.

V prostoru umíme měřit vzdálenosti. Máme-li dva body v prostoru určené polohovými vektory $\boldsymbol{x}_1$ a $\boldsymbol{x}_2$, potom vektor $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ nám určuje jejich vzájemnou polohu. Velikost tohoto vektoru je zřejmě vzdálenost těchto bodů. Pro velikost Δl prostorového vektoru v kartézských souřadnicích platí

$$(\Delta l)^2 = \left(\Delta x^1\right)^2 + \left(\Delta x^2\right)^2 + \left(\Delta x^3\right)^2 \,.$$

Všimněme si, že tato vzdálenost vyjde stejně, posuneme-li polohové vektory obou bodů ve stejném směru o tutéž vzdálenost. Také se nic nestane, otočíme-li oba vektory o stejný úhel kolem počátku. Těmto dvěma vlastnostem říkáme invariance vůči *translaci* a *rotaci*. Pokud chceme budovat teorii ve čtyřrozměrném prostoročase, budeme se muset naučit měřit „vzdálenosti“ také v něm. Naivním přidáním členu $+\left(\Delta x^0\right)^2$ bychom se však daleko nedostali. Mnohem užitečnější se ukáže zavedení vzdálenosti (čtyřintervalu) Δs, pro který platí

$$(\Delta s)^2 = -\left(\Delta x^0\right)^2 + \left(\Delta x^1\right)^2 + \left(\Delta x^2\right)^2 + \left(\Delta x^3\right)^2 \,. \tag{1}$$

Užitečný je tento čtyřinterval proto, že právě v tomto případě je vzdálenost invariantní nejen vůči translacím a rotacím v prostorových složkách, ale také vůči speciálním Lorentzovým transformacím (viz úloha), které jsou klíčovým prvkem speciální teorie relativity. Speciální Lorentzova transformace odpovídá transformaci, při které přecházíme mezi různými inerciálními systémy, které se vůči sobě pohybují.

V úloze c) si můžete vyzkoušet, že tato podivná „vzdálenost“ například nemusí být vždy reálná nebo může být nulová i pro velmi odlišné události. Tudíž se pro ni lépe hodí právě název „čtyřinterval“.

Mravenci a křivost

V předchozím jsme se seznámili s časoprostorem a naučili se v něm měřit vzdálenosti. Tím jsme si vlastně nejrychlejší možnou cestou připravili půdu pro speciální teorii relativity. Nyní si ještě něco povíme o jejím rozšíření, obecné teorii relativity. Obecná teorie relativity je teorie gravitace, ale na rozdíl od Newtonova gravitačního zákona nepopisuje gravitaci pomocí přitažlivého silového působení mezi tělesy, ale pomocí zakřivení časoprostoru. Podle obecné teorie relativity hmotná tělesa kolem sebe zakřivují časoprostor a ostatní částice se pak v tomto časoprostoru pohybují po nejrovnějších a nejkratších možných drahách, takzvaných *geodetikách*.

Náš život v zakřiveném časoprostoru si lze vyobrazit následovně. Představme si, že jsme mravenci pohybující se po povrchu balónu a nevnímáme nic jiného než jeho povrch. Vydáme-li se podél rovníku, po chvíli zjistíme, že jsme dorazili na místo, kde už jsme jednou byli. Mravenec Isaac by mohl přijít s vysvětlením, že se tak děje proto, že na nás pól působí přitažlivou silou, která zakřivuje naši dráhu. Z pohledu člověka však víme, že se tak děje proto, že je balón zakřivený. A takto lze popisovat gravitaci jako zakřivený časoprostor.

Není to ale zdaleka tak jednoduché, jak by se na první pohled mohlo zdát. Stejně jako je čtyřinterval jakási „podivná vzdálenost“, jsou geodetiky v relativistickém prostoročase „podivně nejkratší“, protože jejich „délku“ měříme podobným čtyřintervalem.

Gravitační sílu jsme tedy vyměnili za zakřivený časoprostor. Jak ale zakřivený časoprostor popsat? Zakřivení poznáme podle toho, že měříme úhly, vzdálenosti mezi objekty, obsahy, objemy,... v prostoru a porovnáme je se vztahy známými z plochého prostoru. Příkladem takových vztahů může být vztah pro obvod nebo obsah kruhu vzhledem k jeho poloměru nebo třeba součet vnitřních úhlů trojúhelníku. Nakreslíme-li na povrch balónu kruh, zjistíme, že neplatí vztah pro obvod kruhu (zkuste si to). Nakreslíme-li trojúhelník, tak součet vnitřních úhlů nebude roven $180\,^\circ$. To platí jen v plochém prostoru.

Zkusme vztah (1) pro plochý časoprostor přepsat tak, aby nám umožňoval zobecnění, jak měřit vzdálenosti ve křivých časoprostorech

$$(\Delta s)^2 = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu\,,$$

kde $\eta_{\mu\nu}$ nazýváme metrikou a v našem případě plochého časoprostoru je $\eta_{00} = -1$, $\eta_{11} = 1$, $\eta_{22} = 1$, $\eta_{33} = 1$ a ostatní komponenty jako například η_{01}, η_{23} atd. jsou nulové. Všimněme si, že tento vztah lze také interpretovat jako skalární součin vektoru $\Delta \boldsymbol{x}$ se sebou samým. Stejně můžeme definovat skalární součin i dvou různých vektorů a pomocí něj získávat kromě vzdáleností i úhly mezi vektory. U metriky $\eta_{\mu\nu}$ jsme použili dolních indexů. Jsou-li stejné indexy v opačných polohách, vždy se přes ně sčítá a často se dokonce suma před výrazem ani nepíše.

Jak už jsme řekli, v případě zakřiveného časoprostoru mohou být tyto vzdálenosti, ale také úhly, jiné. Pokud chceme měřit vzdálenosti v zakřiveném časoprostoru, musíme vědět, jaké jsou vzdálenosti a úhly mezi vektory v každém bodě časoprostoru a musíme tedy znát metriku

$$(\Delta s)^2 = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu\,,$$

kde Δx^μ je rozdíl souřadnic dvou blízkých bodů a $g_{\mu\nu}$ již nemá složky jako $\eta_{\mu\nu}$, ale tyto složky mohou být odlišné a dokonce v každém bodě časoprostoru mohou být různé. Tato metrika popisuje zakřivení časoprostoru a právě pole odpovídající této metrice se automaticky objeví v teorii strun.

Úloha I.S ... relativistická — 6 bodů

a) Kvantovou gravitaci potřebujeme jen při studiu velmi malých vzdáleností, kdy jsou gravitační síla a kvantové efekty rovnocenné. Gravitační sílu charakterizuje gravitační konstanta, kvantovou mechaniku Planckova konstanta a speciální teorii relativity rychlost světla. Najděte hodnoty těchto konstant v tabulkách a zkuste z nich vzájemným násobením a umocňováním získat veličinu s jednotkou délky. Tak získáte délkovou škálu, na které je relevantní gravitace a kvantová mechanika současně.

b) Ukažte, že provedeme-li speciální Lorentzovu transformaci (tj. přejdeme do systém pohybujícímu se vůči původnímu rychlostí v ve směru osy x^1)

$$x^0_{\mathrm{nov}} = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,, \quad x^1_{\mathrm{nov}} = \frac{-\frac{v}{c}x^0 + x^1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,, \quad x^2_{\mathrm{nov}} = x^2\,, \quad x^3_{\mathrm{nov}} = x^3\,,$$

potom se hodnota čtyřintervalu nezmění.

c) Vzpomeňte na definici čtyřintervalu a položte $\Delta x^3 = \Delta x^2 = 0$. Máme pak

$$(\Delta s)^2 = -\left(\Delta x^0\right)^2 + \left(\Delta x^1\right)^2\,.$$

V jaké části roviny $\left(\Delta x^0, \Delta x^1\right)$ je čtyřinterval $(\Delta s)^2$ záporný a kde kladný? Jak vypadá křivka definovaná $(\Delta s)^2 = 0$?

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.