

ALEŠ FLANDERA A KOLEKTIV

Fyzikální korespondenční seminář

XXVII. ročník – 2013/14



Copyright © Aleš Flandera, 2014
Copyright © **MATFYZPRESS**, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze, 2014

ISBN 978-80-7378-271-9



Obsah

Předmluva	4
Zadání teoretických úloh	6
Řešení teoretických úloh	13
Zadání experimentálních úloh	84
Řešení experimentálních úloh	85
Seriál o teorii strun	116
Kapitola 1: Relativistický	116
Kapitola 2: Akční	121
Kapitola 3: Aplikační	129
Kapitola 4: Kvantový	138
Kapitola 5: Strunný	146
Kapitola 6: Spektrální	153
Řešení úloh ze seriálu	160
Akce FYKOSu	178
Podzimní soustředění v Ludvíkově	178
Jarní soustředění ve Skleném u Fryšavy	179
FYKOSí Fyziklání	181
Fyziklání Online	182
Den s experimentální fyzikou	183
Cyklus přednášek pro středoškoláky	184
Pořadí řešitelů	185



Předmluva

Milá čtenářko či milý čtenáři!

Do rukou se Ti dostala knížka, která shrnuje veškerou činnost Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze v jeho XXVII. ročníku, který probíhal ve školním roce 2013/14.

FYKOS je nejstarší a také největší fyzikálně zaměřenou korespondenční soutěží pro žáky středních škol v České republice. Je organizován studenty především Matematicko-fyzikální fakulty UK, ale i jiných fakult a škol v České republice i zahraničí, a podporován zaměstnanci Matematicko-fyzikální fakulty UK. Snaží se zaujmout studenty se zájmem o fyziku, matematiku, techniku, zkrátka svět kolem nás. Naším cílem je rozvíjet talent a fyzikální myšlení, protože věříme, že člověk, který se umí zastavit a zamyslet (nejen nad fyzikálními problémy) a cítí touhu dobrat se řešení, se v životě vždy velmi dobře uplatní.

Během školního roku každý z řešitelů obdrží celkem sedm sešitků, v nichž nalezne šest sérií po osmi úlohách, z nichž dvě jsou „rozvíčkové“, jedna více problémová, jedna experimentální a jedna tzv. seriálová. Zadávané úlohy však nejsou příliš podobné těm, které znáte z hodin fyziky. Vyžadují mnohdy poněkud hlubší úvahu, trochu důvtipu nebo něco z vyšší matematiky. Nezřídká je třeba zapátrat na internetu nebo v odborné literatuře. Účastníci si mohou vybrat, které úlohy nakonec vypracují a pošlou nám k opravení, ať už klasicky poštou, nebo přes internet. Opravovatelé pak jejich řešení okomentují a vysvětlí případné chyby. To vše pošleme zpět řešitelům, včetně výsledkových listin, kde se každý může podívat, jak obstál v konkurenci svých vrstevníků. Na konci ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Mimo samotnou korespondenční soutěž pro řešitele připravujeme i další akce. Bezesporu nejpobulárnějšími jsou dvě týdenní soustředění v některém z malebných koutů české země. Jejich účastníci si užijí atraktivní program, založený na dopoledních matematických nebo fyzikálních přednáškách a odpoledních aktivitách v přírodě. Nechybí ani prostor pro fyzikální experimenty a výlety na atraktivní místa.

Další akcí je Den s experimentální fyzikou, na kterém se spolupodílejí jednotlivé katedry MFF, ale i pracoviště Akademie věd ČR, resp. Ústav jaderného výzkumu v Řeži. Naším řešitelům tak umožňujeme navštívit velmi zajímavá výzkumná pracoviště, kde se dělá opravdová fyzika.

Proběhl již sedmý ročník tradičního FYKOSího Fyziklání, soutěže pětičlenných týmů v řešení fyzikálních úloh na čas. Vyhrává tým s největším bodovým ziskem, přičemž rozhoduje jak rychlost, tak přesnost. V letošním roce se soutěže zúčastnilo 74 družstev z ČR i ze Slovenska. To je pro nás dostatečným důkazem, že zájem o fyziku a přírodní vědy mezi mladými lidmi stále ještě existuje.

V návaznosti na FYKOSí Fyziklání jsme se rozhodli uspořádat již třetí roč-

ník internetové týmové soutěže Fyziklání online, která, stejně jako minulý rok, zaznamenala velký úspěch. Soutěž byla díky její elektronické formě otevřena všem zájemcům, nejenom středoškolákům, pro které je vytvořena především. Druhého ročníku se zúčastnilo 132 středoškolských a 32 jiných týmů. To svědčí o narůstající popularitě soutěže, a nyní se již řadí mezi tradiční FYKOSí akce.

Tato ročenka obsahuje kompletní zadání i řešení jednotlivých úloh XXVII. ročníku FYKOSu. Zadání jsou záměrně oddělena od řešení, abychom podnítli čtenáře k samostatnému zamýšlení nad možným řešením problému. Příklady jsou navíc pro snazší orientaci rozděleny na teoretické a experimentální. Další částí knihy je Seriál o teorii strun, který je rovněž doplněn úlohami. Na konci knížky se nachází krátké ohlédnutí za letošními soustředěními a jinými akcemi a seznam nejlepších řešitelů ročníku.

Pokud Tě FYKOS zaujal natolik, že by ses chtěl stát řešitelem nebo se pouze na něco zeptat, ať už se to týká fyziky, či studia na MFF, neváhej a napiš nám.



FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>
 e-mail: fykos@fykos.cz

A jak vypadal XXVII. ročník očima statistiků? FYKOS řešilo 203 studentů z 131 středních škol z České a Slovenské republiky. Přehled škol podle úspěšnosti jejich studentů uvádíme níže. Pro zajímavost ještě dodejme, že organizátoři opravili celkem 2 752 došlých řešení a udělili 8 023 bodů.

Pořadí škol

Škola	Počet řešitelů	Průměr	Celkem
G Havlíčkův Brod	3	119	357
G B. Němcové, HK	3	86	257
G J. Ressela, Chrudim	2	117	234
G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	213	213
G Jana Keplera, Praha	2	101	202
G, Dubnica n. Váhom	1	195	195
G P. de Coubertina, Tábor	2	92	184
G a SOŠZZE Vyškov	2	90	179
G, Lovosice	1	179	179



Zadání teoretických úloh

Úloha I.1 ... zlatá přehrada

2 body

Kolik cihlíček (kvádríků) ze čtyřřidvaceti karátového zlata o rozměrech 10 cm, 3 cm a 1 cm by se vešlo do vodní nádrže Orlík? Jaký zhruba tlak bude působit na cihličku, která je na dně v nejhlubším místě nádrže? (řešení str. 13)

Úloha I.2 ... nezastavitelný terminátor

2 body

Jak rychle se pohybuje hranice světla a tmy (terminátor) na povrchu Měsíce? Je možné utíkat před tmou, když jste na rovníku? (řešení str. 13)

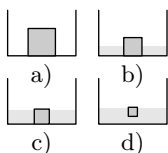
Úloha I.3 ... bublina v ropovodu

4 body

Máme malou kulatou bublinku plynu v kapalině, která teče nějakou rychlostí vodorovným potrubím. Jak se změni její rozměry, když se dostane do místa, kde je potrubí zúžené? K čemu se to dá využít, nebo naopak kde to dělá problémy? Uvažujte laminární proudění. (řešení str. 15)

Úloha I.4 ... kostka v bazénu

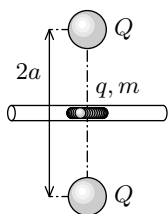
4 body



Na dně prázdného bazénu s dnem plochy S leží ledová kostka (z vody) o hraně délky a . Kostka se rozpouští ze všech stran stejnoměrně tak, že si je stále podobná. Jaká její část se rozpustí, než začne plavat? (řešení str. 17)

Úloha I.5 ... korálek

5 bodů



Bodový korálek o hmotnosti m a s nábojem q se pohybuje v rovné trubce bez tření. Trubka se nachází ve středu mezi dvěma nabitými koulemi, každá s nábojem $Q = -q$. Vzdálenost koulí je $2a$. Uvažujte elektrostatické působení a najděte frekvenci malých kmitů korálku okolo rovnovážné polohy.

Nápověda Uvědomte si, že velikost síly se při malých výchylkách mění pouze zanedbatelně. (řešení str. 18)

Úloha I.P ... rychlost světla

5 bodů

Jaký by byl svět, ve kterém by byly stejné hodnoty fundamentálních fyzikálních konstant, jenom rychlost světla by byla pouze $c = 1\,000 \text{ km} \cdot \text{hod}^{-1}$? Jaký by byl takový svět pro život na Zemi, život lidí? A bylo by vůbec možné, aby v takovém světě existovali lidé? (řešení str. 19)

Úloha II.1 ... Twix

2 body

Tyčinka Twix obsahuje 32% polevy. Jde o váleček průměru 10 mm. Neuvažujte polevu podstavy. Jak je poleva tlustá?

Bonus Uvažujte lepší model tyčinky.

(řešení str. 21)

Úloha II.2 ... létavé dřevo

2 body

Máme dřevěnou kuličku ve výšce $h = 1$ m nad Zemí o poloměru $R_Z = 6378$ km a hmotnosti $M_Z = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg. Kulička má poloměr $r = 1$ cm a je ze dřeva o hustotě $\rho = 550$ kg·m⁻³. Předpokládejte, že Země má náboj $Q = 5$ C. Jaký náboj q by musela mít kulička, aby se mohla vznášet nad Zemí? Jak tento výsledek závisí na výšce h ?

(řešení str. 22)

Úloha II.3 ... týrání pístu

4 body

Máme nádobu o konstantním průřezu, která obsahuje ideální plyn a píst ve výšce h . Píst nejprve rychle (tzn. prakticky adiabaticky) stlačíme do výšky $h/2$, podržíme ho, než nastane tepelná rovnováha s okolím, a pak ho pustíme. Do jaké výšky píst vystoupá ihned? Do jaké výšky vystoupá za dlouhou dobu? Nakreslete pV diagram.

(řešení str. 23)

Úloha II.4 ... hvězdná velikost Měsíce

4 body

Je známo, že Měsíc v úplňku má zdánlivou hvězdnou velikost přibližně -12 mag a Slunce na denní obloze zase -27 mag. Pokuste se odhadnout, jakou hvězdnou velikost má Měsíc těsně před zatměním Slunce, pokud víte, že albedo Země činí 0,36 a albedo Měsíce 0,12. Předpokládejte, že světlo se po odrazu rozptyluje stejným způsobem na povrchu Země i Měsíce.

(řešení str. 25)

Úloha II.5 ... kelímek na vodě

5 bodů

Kužel obrácený podstavou vzhůru může držet ve vzduchu na stříkajícím proudu vody, který vychází ze země s konstantním hmotnostním průtokem a počáteční rychlostí v_0 . V jaké výšce nad zemí se bude kužel v rovnováze vznášet?

Bonus Vyšetřete stabilitu kužele v této poloze.

(řešení str. 27)

Úloha II.P ... Temelínská

4 body

Odhadněte, kolik jaderného paliva se spotřebuje v jaderné elektrárně na 1 MWh elektrické energie, kterou spotřebují lidé až v domácnosti. Srovnajte to se spotřebou paliva v tepelné elektrárně. Nezapomeňte uvažovat všechny možné ztráty.

Bonus Uvažte i energii, která se spotřebuje při těžbě a přepravě potřebných surovin.

(řešení str. 30)

Úloha III.1 ... zatmění

2 body

Kolem hvězdy obíhá po kruhové dráze planeta a kolem ní obíhá taktéž po kruhové dráze měsíc, a to v rovině jejího oběhu. Víme, že při zatmění slunce je úhlová velikost měsíce stejná jako úhlová velikost slunce, pozorováno z planety (tj. měsíc slunce přesně zakryje). Dále ještě víme, že při zatmění měsíce naopak planeta přesně zakryje měsíc. Určete, jaký je poměr poloměrů planety R a měsíce r , jestliže je vzdálenost planety od hvězdy mnohem větší než vzdálenost měsíce od planety L a ta je zase řádově větší než rozměry R , r .
(řešení str. 34)

Úloha III.2 ... Středozevní moře

2 body

Jak rychle v průměru teče voda Gibraltarským průlivem, když umožňuje střídání přílivu a odlivu ve Středozevní moři? Potřebné údaje si najdete na internetu a nezapomeňte citovat!
(řešení str. 35)

Úloha III.3 ... pohárkovo vanová

4 body

Vezměme prázdný válcový kelímek. Otočme ho dnem vzhůru a tlačme ho pod klidnou vodní hladinu. Jak vysoký bude vzduchový sloupec v kelímku v závislosti na jeho ponoření?
(řešení str. 38)

Úloha III.4 ... Ani k stáru, ani k stáru...

4 body

Balón i s košem má hmotnost M . Koš balónu se ponoří do přehrady a nateče do něj voda. Nyní trochu přitopíme a zvýšíme vztlak balónu na $Mg + F$. Koš má tvar hranolu se čtvercovou podstavou o hraně a a je ponořený do hloubky H . Otvory v koši tvoří $p \ll 1$ z celkové plochy koše, o kterém předpokládáme, že je prázdný (kromě vody). Zanedbejme viskozitu vody a vlastní objem koše. Jak rychle se bude koš vynořovat v závislosti na hloubce ponoření?

Bonus Za jak dlouho se vynoří?

Nápověda Střední rychlost výtoku vody z části koše nad hladinou je rovna $2/3$ maximální rychlosti výtoku.
(řešení str. 41)

Úloha III.5 ... mig-mig!

5 bodů

Chudák hladový kojot chce ulovit proradného ptáka Uličníka a přichystal na něj následující past: na pevné lano přiváže 500tunovou kovadlinu, přehodí ji přes větev tak, aby visela nad silnicí, a bude čekat. Kolikrát musí lano kolem větve obtočit, jestliže chce kovadlinu udržet ve vzduchu pouze vlastní vahou? Předpokládejte, že hmotnost lana je vůči hmotnosti kojota zanedbatelná.
(řešení str. 43)

Úloha III.P ... solární pohon

5 bodů

Mohlo by letadlo létat na solární pohon?

(řešení str. 45)

Úloha IV.1 . . . zase jedna neořezaná

2 body

Čerstvě ořezaná tužka 6B má hrot tvaru kužele s poloměrem podstavy $r = 1 \text{ mm}$ a výškou $h = 5 \text{ mm}$. Jak dlouhou čáru s ní dokážeme udělat, jestliže vzdálenost dvou grafitových vrstev je $d = 3,4 \text{ \AA}$ a stopa tuhy obsahuje takovýchto vrstev v průměru $n = 100$? *(řešení str. 46)*

Úloha IV.2 . . . zkumavky

2 body

Zkumavky o objemu 3 ml a 5 ml jsou spojeny krátkou tenkou trubičkou, v níž je pórovitá tepelně nevodivá přepážka, která umožňuje dosažení tlakové rovnováhy v systému. Obě zkumavky původně obsahují kyslík při tlaku $101,25 \text{ kPa}$ a teplotě $20 \text{ }^\circ\text{C}$. První zkumavku (3 ml) ponoříme do nádoby s rovnovážnou soustavou ledu a vody a druhou (5 ml) do nádoby s párou. Jaký bude tlak v soustavě obou zkumavek po dosáhnutí mechanické rovnováhy? Jakého tlaku by se dosáhlo, pokud by ve zkumavkách byl za stejných podmínek dusík místo kyslíku? *(řešení str. 48)*

Úloha IV.3 . . . racek

4 body

Naproti sobě plují dvě lodě, první rychlostí $u_1 = 4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a druhá rychlostí $u_2 = 6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Ve chvíli, kdy jsou od sebe vzdáleny $s_0 = 50 \text{ km}$, vzlétne z první lodi racek a letí směrem ke druhé. Letí proti větru, jeho rychlost je $v_1 = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Když dorazí k druhé lodi, obrátí se a letí zpět, nyní po větru rychlostí $v_2 = 30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Takto létá tak dlouho, dokud se obě lodi nesetkají. Jakou celkovou dráhu racek urazí? *(řešení str. 50)*

Úloha IV.4 . . . vybitý puding

4 body

Modelů atomu vodíku bylo nespočetné množství a mnohé z nich už jsou překonané, ale my máme rádi puding a tak se vrátíme k tzv. pudinkovému modelu vodíku. Atom tvoří koule o poloměru R s rovnoměrně rozloženým kladným nábojem („puding“), v kterém se nachází jeden elektron („rozinka“). Samozřejmě nejlépe je elektronu v místě s nejnižší energií, tak sedí ve středu pudingu. Celkově je soustava elektricky neutrální. Jakou energii musíme dodat elektronu, abychom ho dostali do nekonečna? Jaký by musel být poloměr pudingu, aby se tato energie rovnala Rydbergově energii (excitační energie elektronu v atomu vodíku)? Poloměr vyjádřete v násobcích Bohrova poloměru. *(řešení str. 50)*

Úloha IV.5 . . . kulky

4 body

O kolik se zvýší teplota stejných ocelových kulek po jejich vzájemné srážce? Pohybují se stejným směrem rychlostmi $v_1 = 0,7c$ a $v_2 = 0,9c$, kde c je rychlost světla. Uvažujte konstantní tepelnou kapacitu a uvažujte, že kulky jsou stále v pevném skupenství. *(řešení str. 53)*

Úloha IV.P ... to pravé gravitační zrychlení

5 bodů

Faleš chtěl v Praze (V Holešovičkách 2 v přízemí) určit hodnotu *gravitačního* zrychlení z experimentu, kdy pouštěl kulatý míček z výšky pár metrů na Zemi. Rozmyslete si, jaké korekce musel při zpracování měření zahrnout. Poté navrhnete vlastní experiment na stanovení gravitačního zrychlení a diskutujete jeho přesnost.

(řešení str. 55)

Úloha V.1 ... natlakovaná žirafa

2 body

Porovnejte krevní tlak v hlavě dospělé žirafy a dospělého člověka. Systolický tlak na úrovni srdce je u člověka $p_{h1} = 120 \text{ mmHg}$ a u žirafy $p_{g1} = 280 \text{ mmHg}$, hustota krve obou živočichů je $\rho = 1050 \text{ kg}\cdot\text{m}^3$. Uvažujte pouze případ, kdy člověk i žirafa stojí. Rychlost proudění krve v těle považujte za konstantní.

(řešení str. 59)

Úloha V.2 ... uranová hvězda

2 body

Představme si, že ve hvězdách neprobíhá termojaderná fúze, nýbrž štěpná jaderná reakce. Odhadněte, jak dlouho by taková hvězda dokázala vyzařovat, jestliže na počátku svého životního cyklu sestává pouze z uranu 235, její hmotnost i zářivý výkon jsou přibližně konstantní a odpovídají současným hodnotám pro Slunce.

(řešení str. 60)

Úloha V.3 ... ta jemná nádoba

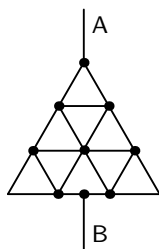
3 body

Mějme válcovou nádobu, jež zaujímá objem $V = 11$. Nádoba je uzavřena vzduchotěsným pohyblivým pístem, který má nezanedbatelnou hmotnost M . Dále víme, že nádoba je vodorovnými přepážkami rozdělena na n komor a v i -té komoře (číslováno odshora) je $2^i a$ částic, kde a je blíže neurčená konstanta. Přepážky nejsou k nádobě připevněny, přesto nedovolují, aby si komory, v nichž je ideální plyn, vyměňovaly teplo nebo částice. Celý systém je v rovnováze. Poté zdvojnásobíme hmotnost pístu a počkáme, až se náš systém opět ustaví v rovnováze. Jak se změní objem, který plyn v nádobě zaujímá? Atmosferický tlak neuvažujte.

(řešení str. 61)

Úloha V.4 ... trojúhelníkový odporník

4 body



Určete odpor trojúhelníku vytvořeného z odporového drátu mezi svorkami A a B, které vidíte na obrázku. Jedna strana malého trojúhelníčku (ze kterých se skládá velký trojúhelník) má odpor R_0 . Odpor přírodních vodičů neuvažujte.

(řešení str. 63)

Obr. 1:
Trojúhelník

Úloha V.5 ... hlídání dětí

5 bodů

Mějme houpačku zavěšenou na dvou svislých lanech délky $l = 1,5$ m na vodorovné tyči o poloměru $r = 4$ cm. Dítěti sedícímu na houpačce udělíme v dolní úvrati takovou rychlost v_0 , aby dítě vykonalo celou otočku kolem horizontální tyče a lana byla během namotávání stále napnutá. Zároveň chceme, aby počáteční rychlost byla nejmenší možná. Určete rozdíl úhlové rychlosti ω_1 houpačky s dítětem po návratu do dolní úvrati a počáteční úhlové rychlosti ω_0 .

Nápověda Pro výpočet odstředivého zrychlení můžete uvažovat, že se dítě pohybuje lokálně po kružnici. (řešení str. 66)

Úloha V.P ... fyzika v plamenech

5 bodů

Na jakých fyzikálních (a chemických) parametrech závisí teplota, kterou hoří nějaká konkrétní látka? Jak? Určete tuto teplotu pro nějakou konkrétní látku.

(řešení str. 70)**Úloha VI.1 ... antijádro**

2 body

Máme dvě homogenní nerotující planety tvaru dokonalých koulí s vnějšími poloměry R_Z . První z nich je dokonalá koule o hustotě ρ a na jejím povrchu je gravitační zrychlení a_g . Druhá je dutá do poloviny jejího poloměru a až pak je plná.

- Pokud by obě planety byly ze stejného homogenního materiálu, na povrchu které planety bude větší gravitační zrychlení a jaký bude poměr mezi hodnotami gravitačního zrychlení na obou planetách?
- Pokud by i na povrchu druhé planety bylo gravitační zrychlení a_g , jaká by musela být hustota druhé planety?

(řešení str. 73)**Úloha VI.2 ... go west**

2 body

Již před více než sto lety měření geodetů potvrdila, že když plujeme lodí směrem na západ, ukazují gravimetry větší hodnoty tíhového zrychlení než při cestě na východ. Určete, jaký rozdíl naměříme na rovníku, jestliže nejprve provedeme měření v klidu a poté za konstantní rychlosti 20 uzlů v západním směru. (řešení str. 74)

Úloha VI.3 ... kule a šlupka

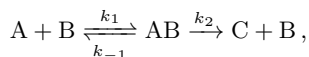
4 body

Máme měděnou plnou kouli a měděnou tenkou kulovou šlupku (tak tenkou, že můžete zanedbat její tloušťku). Obě mají při pokojové teplotě stejný poloměr. Jak se bude jejich poloměr měnit, když je začneme ohřívat? (Zapište závislost poloměru na teplotě a okomentujte ji.) U měděné šlupky uvažujte, že má v sobě malé otvory, které vyrovnávají vnitřní a vnější tlak vzduchu. (řešení str. 75)

Úloha VI.4 ... nenasytný pavouk

4 body

V tmavém koutě číhá pavouk, který právě polapil mouchu a postupně ji tráví za předpokladu, že trávení probíhá podle rovnice



kde A je *muší substrát*, B jsou trávicí látky (neustále v dostatku) a C je produkt trávení. AB označuje nestabilní meziprodukt. Reakce je prvního řádu, tzn. rychlost je přímo úměrná koncentraci dané látky. Určete, za jak dlouho se pavouk vydá opět na lov, jestliže mu interoreceptory oznámí pocit hladu při poklesu koncentrace substrátu na 10 % původní hodnoty.

Nápověda Použijte aproximaci stacionárního stavu meziproduktu.

(řešení str. 77)

Úloha VI.5 ... toaleťák

4 body

Roli s papírem uchyťme do ložiska (bez tření) a necháme odmotávat konec papíru (zanedbáme lepení vrstev na sebe, tření v ložisku a hmotnost ložiska). Jakou úhlovou rychlostí se bude otáčet rulička potom, co se odmotá všechen papír? Známe poloměr a hmotnost ruličky, délkovou hustotu papíru, jeho celkovou hmotnost a délku. Uvažujte, že se papír bude odmotávat do nekonečné hloubky.

Bonus Uvažujte, že papír dopadne na zem dříve, než se celý odmotá.

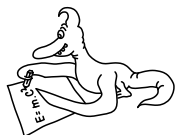
(řešení str. 78)

Úloha VI.P ... světlo přesně podle norem

5 bodů

Navrhňte rozmístění světel nad stolem tak, abyste dodrželi normy pro osvětlení. K dispozici máte dostatečné množství kompaktních zářivek (lidově úsporných žárovek) se světelným tokem $P = 1400$ lm. Normy říkají, že pro běžné pracovní úkony má být osvětlení pracovní plochy $E = 300$ lx. Zářivky můžete umístit do libovolných pozic na strop ve výšce $H = 2$ m nad pracovní plochu. Pro jednoduchost uvažujte čtvercovou pracovní plochu o straně $a = 1$ m a zářivku považujte za bodový izotropní zdroj záření. Odraz a rozptyl světla zanedbejte.

(řešení str. 81)



Řešení teoretických úloh

Úloha I.1 ... zlatá přehrada

Kolik cihliček (kvádríků) ze čtyřřidvaceti karátového zlata o rozměrech 10 cm, 3 cm a 1 cm by se vešlo do vodní nádrže Orlík? Jaký zhruba tlak bude působit na cihličku, která je na dně v nejhlubším místě nádrže?

Internetové zdroje uvádí¹, že přehrada Orlík má objem $720\,000\,000\text{ m}^3$ a dosahuje hloubky až 74 m. Objem jedné zlaté cihličky činí $V_c = 3 \cdot 10^{-5}\text{ m}^3$. Počet zlatých cihliček, které by se do přehrady teoreticky vešly (při zanedbání toho, že cihličky svým tvarem přesně nekopírují tvar přehrady), se rovná podílu objemu přehrady ku objemu jedné cihličky, tj. $2,4 \cdot 10^{13}$ cihliček. Nutno však poznamenat, že takové množství zlata mnohonásobně přesahuje odhadované množství zlata, které bylo kdy vytěženo, neboť i kdybychom uvažovali horní hranici odhadu, pak by veškeré vytěžené zlato zhruba vydalo na krychli o hraně 17,5 m.²

Za předpokladu, že cihličky budou narovnány do sloupců, tak na nejspodnější cihličku v místě největší hloubky působí tíha $7\,399 \doteq 7\,400$ cihliček, které jsou nad ní. Hustota ρ čtyřřidvaceti karátového zlata činí³ $19\,500\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Tíhu cihliček vypočteme jako $G = 7\,400 \cdot mg$, kde m je hmotnost jedné cihličky, přičemž $m = V_c \rho$. Tlak na nejspodnější cihličku pak určíme jako $p = G/S$, kde S je styčná plocha cihliček, tj. $p \doteq 14\text{ MPa}$.

Do přehrady Orlík by se teoreticky vešlo $2,4 \cdot 10^{13}$ zlatých cihliček. Tlak na cihličku, která by byla na dně v nejhlubším místě nádrže, by byl přibližně 14 MPa.

Úloha I.2 ... nezastavitelný terminátor

Jak rychle se pohybuje hranice světla a tmy (terminátor) na povrchu Měsíce? Je možné utíkat před tmou, když jste na rovníku?

První jev, který nás napadne a který má na pohyb terminátoru vliv, je zřejmě rotace Měsíce kolem jeho osy. Její periodu (vzhledem ke hvězdám, které považujeme za statické pozadí) označme⁴ P_{sid} (činí 27,32 d).

Uvažujme nejdříve, že je Měsíc vzhledem ke Slunci v klidu a pouze rotuje kolem vlastní osy, která je kolmá na rovinu ekliptiky.⁵ Pak by terminátor oběhl povrch Měsíce právě jednou za čas P_{sid} a jelikož Měsíc rotuje kolem své osy rovnoměrně, můžeme pohybu terminátoru přisoudit konstantní úhlovou rychlost $\omega_{\text{sid}} = 2\pi/T_{\text{sid}}$

¹http://cs.wikipedia.org/wiki/Vodní_nádrž_Orlík

²<http://www.svatymaur.cz/cs/jine/stredoveke-zlatnicke-techniky/zajimavosti-o-zlate.html>

³<http://cs.wikipedia.org/wiki/Zlato>

⁴siderická perioda (*sidus* lat. hvězda)

⁵rovina, ve které obíhá Země kolem Slunce

(tj. terminátor urazí v selenografické délce⁶ ω_{sid} radiánů za jednotku času). Pokud by nás zajímal pohyb Slunce po měsíční obloze, pozorovali bychom, že se Slunce pohybuje po Měsíční obloze s periodou P_{sid} , a tedy úhlovou rychlostí ω_{sid} .

První komplikace nastane, uvědomíme-li si skutečnost, že sklon rotační osy Měsíce vůči rovině ekliptiky není přesně 90° , ale činí přibližně $88,5^\circ$. To jistě bude mít na pohyb terminátoru vliv, protože se nám tímto vytvoří oblasti, kudy terminátor nikdy neprojde, tj. oblasti věčného polárního dne a noci (stále ignorujeme oběh Země kolem Slunce). Započítáme-li pak i vliv oběhu Země kolem Slunce jednou za T_{rok} (což vzhledem ke hvězdám činí 365,26 d), bude Měsíc vykazovat (byť v menší míře než na Zemi) střídání ročních období. A jelikož P_{sid} není vůči T_{rok} zrovna zanedbatelná (poměr $P_{\text{sid}}/T_{\text{rok}}$ je přibližně jedna třináctina), bude započítání tohoto vlivu na pohyb terminátoru méně triviální záležitost, a to obzvláště v blízkosti rotačních pólů. Naštěstí je odchylka sklonu rotační osy Měsíce od 90° velmi malá a provedše tento kvalitativní popis, budeme nadále pro jednoduchost předpokládat, že rotační osa je přesně kolmá na rovinu ekliptiky. Nás navíc bude zajímat pouze situace na rovníku, kde se roční pohyb terminátoru neprojevuje.

Dále je třeba zvážit vliv oběhu Měsíce kolem Země. Uvažujme proto, že Měsíc nerotuje kolem vlastní osy, ani že Země neobíhá kolem Slunce. Můžeme rovněž předpokládat, že paprsky přicházející od Slunce jsou rovnoběžné, neboť rozměry oběžné dráhy Měsíce kolem Země (řádově 10^8 m) jsou velmi malé ve srovnání se vzdáleností systému Země–Měsíc od Slunce (řádově 10^{11} m). V takové situaci se ale terminátor po povrchu Měsíce nepohybuje, a proto můžeme v rychlosti uzavřít, že oběh Měsíce kolem Země nemá na náš problém vliv.

Konečně je třeba započítat oběh systému Země–Měsíc kolem Slunce. Zastavíme-li rotaci Měsíce vzhledem ke hvězdám, vidíme, že se Slunce na měsíční obloze pohybuje s periodou T_{rok} (úhlovou rychlostí $\omega_{\text{rok}} = 2\pi/T_{\text{rok}}$), ale v opačném směru, než když Měsíc pouze rotoval kolem vlastní osy. Složíme-li tyto pohyby, bude se Slunce po měsíční obloze pohybovat úhlovou rychlostí $\omega_{\text{syn}} = \omega_{\text{sid}} - \omega_{\text{rok}}$ ve směru ω_{sid} .⁷ Propojením úvah o pohybu terminátoru a pohybu Slunce na obloze pak vidíme, že se terminátor v selenografické délce pohybuje úhlovou rychlostí $\omega_{\text{ter}} = \omega_{\text{syn}}$, což se na rovníku přepočte na absolutní rychlost $v_{\text{ter}} = \omega_{\text{ter}}R$, kde $R = 1738$ km je rovníkový poloměr Měsíce.

Pro obecnou selenografickou šířku λ dostaneme $v_{\text{ter}}(\lambda) = \omega_{\text{ter}}R \cos \lambda$, protože se terminátor pohybuje po rovnoběžce, jejíž obvod se mění s $\cos \lambda$. Čím více se však blížíme rotačním pólům, tím větší bude vliv ročního pohybu terminátoru a uvedený vztah pro výpočet $v_{\text{ter}}(\lambda)$ nám bude dávat nepřilíš přesné hodnoty.

Po dosazení číselných hodnot máme pro rychlost terminátoru na rovníku $v_{\text{ter}} = 15,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, čehož klusem snadno dosáhneme. Je však třeba poznamenat, že díky nenulové úhlové velikosti Slunce na Měsíční obloze nebude terminátor zdaleka

⁶Selenografické souřadnice (ze starořeckého *selenē* – Měsíc) máme definované podobně jako zeměpisné souřadnice na Zemi, tj. vzhledem k rotačním pólům.

⁷ ω_{syn} je odvozena ze *synodické* periody $T_{\text{syn}} = 2\pi/\omega_{\text{syn}}$ (ze starořeckého *syn hodō* – s cestou [Slunce]). Pokud by ω_{syn} vyšla záporně, znamenalo by to opačný směr pohybu Slunce po měsíční obloze.

tak ostrý jako ten ve Futuramě, nicméně bude určitě ostřejší než terminátor na Zemi, a to díky absenci atmosféry, ve které by se Sluneční světlo mohlo rozptylovat.

Úloha I.3 ... bublina v ropovodu

Máme malou kulatou bublinku plynu v kapalíně, která teče nějakou rychlostí vodorovným potrubím. Jak se změní její rozměry, když se dostane do místa, kde je potrubí zúžené? K čemu se to dá využít, nebo naopak kde to dělá problémy? Uvažujte laminární proudění.

Uvažujme nestlačitelnou kapalinu, za kterou můžeme vodu i ropu v našich úvahách směle prohlásit. Zároveň se kapalina nikam neztrácí (pokud není potrubí děravé). Objem, který proteče průřezem potrubí za jednotku času, zůstává tedy konstantní – to je rovnice kontinuity. Zúžením potrubí z původního průřezu S_0 na S dojde ke zvětšení rychlosti proudění z původní v_0 na v podle vztahu

$$Sv = S_0v_0.$$

Nyní víme, že kapalina bude mít po zúžení potrubí rychlost

$$v = v_0 \frac{S_0}{S}.$$

Bernoulliho rovnice, která vyjadřuje zákon zachování energie v kapalíně, nám dá do souvislosti změnu rychlosti se změnou tlaku v potrubí. Uvažujeme-li, že potrubí je vedeno vodorovně, pak můžeme Bernoulliho rovnici psát ve tvaru

$$\rho \frac{v^2}{2} + p = \rho \frac{v_0^2}{2} + p_0,$$

kde p_0 je tlak v potrubí o původním průřezu a

$$p = \rho \frac{v_0^2}{2S^2} (S^2 - S_0^2) + p_0$$

tlak ve zúženém potrubí.

K dalším úvahám o bublině chceme využít vhodnou rovnici popisující termodynamické chování plynu, kterým je tvořena. Řekněme, že naše bublina je koule o objemu V_0 resp. V po zúžení potrubí a je tvořena ideálním plynem. Platí pro ni tedy stavová rovnice ideálního plynu

$$pV = RnT,$$

kde T je absolutní teplota, n je látkové množství a R je molární plynová konstanta.

Doposavad jsme používali jednoduchých přiblížení, jako je dokonale nestlačitelná kapalina, ideální plyn nebo potrubí, ve kterém se nic neztrácí. A protože v jednoduchosti je krása, popišme si také pouze dva idealizované způsoby, kterými se plyn může dostat ze stavu s tlakem p_0 , kdy má objem V_0 , do stavu s tlakem p , kdy má objem V .

Bude-li zužování dostatečně pomalé (tak, aby se stihlo v každém okamžiku předat teplo a vyrovnat teploty), budeme moci děj považovat za izotermický a bude platit $p_0 V_0 = pV$. Bublina tedy zúžením potrubí změní objem na

$$V = V_0 \frac{p_0}{p} = V_0 \frac{p_0}{\rho \frac{v_0^2}{2S^2} (S^2 - S_0^2) + p_0}.$$

Protože šlo o zúžení průřezu $S_0 > S$, vidíme, že objem bubliny se zvětšil.

Druhým případem, který popíšeme, je rovnovážný adiabatický děj. Při něm platí Poissonův zákon

$$pV^\kappa = \text{konst}$$

a dostáváme, že objem se opět zvětší, avšak tentokrát dle vztahu

$$V = V_0 \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/\kappa} = V_0 \left(\frac{p_0}{\rho \frac{v_0^2}{2S^2} (S^2 - S_0^2) + p_0} \right)^{1/\kappa}.$$

Poissonova konstanta $\kappa = c_p/c_V$ je podílem tepelných kapacit při stálém tlaku a stálém objemu.

Mezi izotermickým a adiabatickým dějem leží rovnovážné procesy zvané polytropické, které lze popsat rovnicí

$$pV^a = \text{konst},$$

kde $a \in (1; \kappa)$.

Izotermická expanze bubliny bude v tomto případě reálnější model, neboť uvažujeme poměrně malé rychlosti (proudění má být laminární), a proces tedy bude probíhat dostatečně pomalu, aby se teploty vyrovnávaly průběžně. Pokud by proces probíhal rychle, izotermický by nebyl a o použitelnosti adiabatického děje by se dalo pochybovat, protože rychlý adiabatický děj není rovnovážný a popsáný vztah neplatí. To nás ovšem nemusí až tak trápit, protože při příliš rychlé expanzi by se bublina pravděpodobně rozpadla na menší.

Další věc, která hraje podstatnou roli, ale kterou uvážíme pouze formou diskuse, je povrchová energie rozhraní kapalina-plyn. Na změnu povrchu fázového rozhraní je zapotřebí energie $W = \sigma \Delta S$, kde σ je povrchové napětí. Při energetické bilanci, do které bychom zahrnuli energii spojené se změnou objemu i povrchu, bychom museli uvažovat absolutní velikost bubliny, nejenom relativní změnu objemu resp. poloměru. Při započtení kapilárního tlaku by nám vyšlo, že se bublina zvětší méně, než nám vyšlo původně. Kapilární tlak na bublinu je $p_{\text{kap}} = 2\sigma/R$. Povrchové napětí vody při 20 °C je $\sigma = 72 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Chceme-li, aby relativní chyba, kterou způsobí ve výpočtu zanedbání kapilárních efektů, byla menší než ε , musíme mít $p_{\text{kap}} < \varepsilon p$, kde p je tlak kapaliny v potrubí. Dosadíme-li za p_{kap} , dostáváme, že

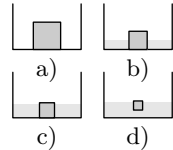
$$\frac{2\sigma}{R} < \varepsilon p_{\text{atm}} \cdot \frac{p}{p_{\text{atm}}},$$

kde p_{atm} je atmosferický tlak. Dostáváme tedy, že poloměr R studované bubliny musí být větší než $10^{-6}(p_{\text{atm}}/p)/\varepsilon$ m, kde $2\sigma/p_{\text{atm}} \approx 10^{-6}$ m. Vidíme, že při běžných tlacích v potrubích, které se mohou pohybovat v řádech desítek atmosfér, budou bublinky, u kterých se výrazněji projeví kapilarita, velké řádově desítky až jednotky mikrometrů. Pro takovéto bublinky převáží kapilární efekty a změny vnějšího tlaku jejich poloměr měnit nebudou.

Tento efekt může dělat problémy v plyno-/ropovodu, kde přítomností bublin proteče méně dopravovaného paliva – plynové sporáky můžou blafat. Větší bubliny ve vodě v topení můžou způsobovat nežádoucí zvuky. Daleko horší následky může mít bublina v hydraulických systémech – například zavzdušnění brzd. V cévním řečišti může zvětšená bublina ve zúžení uvolnit trombus, případně sama o sobě způsobit vzduchovou embolii. Na druhou stranu, tento efekt nám třeba umožňuje snadnější rozprašování.

Úloha I.4 ... kostka v bazénu

Na dně prázdného bazénu s dnem plochy S leží ledová kostka (z vody) o hraně délky a . Kostka se rozpouští ze všech stran stejnoměrně tak, že si je stále podobná. Jaká její část se rozpustí, než začne plovat?



Pýtáme sa na stav v rovnováhe, tj. kedy je vztlaková sila pôsobiaca na kocku rovnako veľká ako tiaž kocky. Označme teda pôvodný objem kocky ako a^3 , nový objem v stave rovnováhy ako b^3 .

Voda s hustotou ρ_v siaha kocke s hranou b a hustotou ρ_l do výšky h . Archimedov zákon vraví, že vztlaková sila pôsobiaca na kocku je rovná tiaži hmotnosti vody kockou vytlačenou

$$\rho_v h b^2 = \rho_l b^3 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\rho_l}{\rho_v} b. \quad (1)$$

Vidíme teda, že kocka sa začne vznášať až sa dostane pod hladinu približne 90 % jej objemu.

Všetka voda v bazéne plochy S okolo kocky vzišla z objemu ľadu $a^3 - b^3$. Platí teda

$$a^3 - b^3 = \frac{\rho_v}{\rho_l} (S - b^2) h,$$

kde s využitím rovnice (1) dostávame

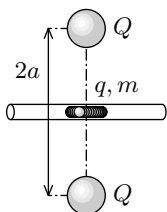
$$a^3 - b^3 = S b - b^3,$$

z čoho je zřejmé, že rozpustená část kocky je rovná

$$\frac{a^3 - b^3}{a^3} = 1 - \frac{b^3}{a^3} = 1 - \frac{a^6}{S^3}.$$

Patriło by sa povedať, že kocka neleží úplne na dne bazéna alebo napríklad, že predpokladáme, že dno bazéna nie je dokonale rovné a pod kockou sa nachádza tenká vrstvička vody. Ak by totiž ležala kocka priamo na dne, tak hydrostatický tlak na dolnej podstave by bol nulový a hydrostatický tlak na hornej podstave by kocku tlačil neustále nadol, čím by sa od dna neodlepila vôbec.

Úloha I.5 ... korálek



Bodový korálek o hmotnosti m a s nábojem q se pohybuje v rovné trubce bez tření. Trubka se nachází ve středu mezi dvěma nabitými koulemi, každá s nábojem $Q = -q$. Vzdálenost koulí je $2a$. Uvažujte elektrostatické působení a najděte frekvenci malých kmitů korálku okolo rovnovážné polohy.

Nápověda Uvědomte si, že velikost síly se při malých výchylkách mění pouze zanedbatelně.

Nejprve se podívejme, jak by problém vypadal bez jakýchkoli aproximací. Označme d okamžitou vzdálenost našeho korálku od každé nabitě koule. Pokud Δr označíme výchylku korálku z jeho rovnovážné polohy (na spojnici nabitých koulí), tak můžeme d vyjádřit jako

$$d = \sqrt{a^2 + \Delta r^2}.$$

Obě nabitě koule budou na korálek působit stejnou silou F_0 , která bude přitažlivá. Její velikost můžeme vyjádřit z Coulombova zákona elektrostatiky

$$F_0 = \frac{kq^2}{d^2} = \frac{kq^2}{a^2 + \Delta r^2}.$$

Pokud označíme α úhel, který svírá spojnice korálku s jednou z nabitých koulí a spojnice obou koulí, tak můžeme psát

$$\sin \alpha = \frac{\Delta r}{\sqrt{a^2 + \Delta r^2}}.$$

Pro velikost výsledné síly F působící na korálek můžeme z geometrie problému psát vztah

$$F = 2F_0 \sin \alpha.$$

Rovněž vidíme, že síla F působí proti směru výchylky korálku. Pak pro zrychlení korálku, které si označíme jako $\Delta \ddot{r}$ (označení pro druhou časovou derivaci Δr , tedy zrychlení), platí vztah

$$m\Delta \ddot{r} = -\frac{2kq^2\Delta r}{(a^2 + \Delta r^2)^{3/2}} = -\frac{2kq^2\Delta r}{a^3 \left[1 + \left(\frac{\Delta r}{a}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (2)$$

Díky tomu, že výchylka je velmi malá, můžeme rovnici (2) upravit, ve druhé mocnině se totiž Δr stane v poměru k a naprosto zanedbatelným. Například, pokud by poměr $\Delta r/a$ byl 10^{-2} (tedy 1%), tak poměr $(\Delta r/a)^2$ by byl 10^{-4} , což je již zanedbatelný zlomek. Z toho, že je výchylka malá, tedy víme, že $\Delta r/a$ je velmi malé číslo a $(\Delta r/a)^2$ lze ve jmenovateli oproti jedničce zanedbat. Rovnici pro zrychlení tedy můžeme upravit následovně

$$\Delta \ddot{r} = -\frac{2kq^2}{ma^3} \Delta r.$$

Tato rovnice nám připomíná rovnici pro harmonický oscilátor $a = -(k/m)\Delta x$, kde k je tuhost pružiny, m je hmotnost závaží, a je zrychlení závaží a Δx je jeho výchylka z rovnovážné polohy. Pro úhlovou frekvenci harmonického oscilátoru ω_h potom platí

$$\omega_h = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Tohoto řešení využijeme pro naši rovnici a můžeme psát, že frekvence kmitů při malé výchylce bude

$$\omega = \sqrt{\frac{2kq^2}{ma^3}}.$$

Úloha I.P . . . rychlost světa

Jaký by byl svět, ve kterém by byly stejné hodnoty fundamentálních fyzikálních konstant, jenom rychlost světla by byla pouze $c = 1\,000 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1}$? Jaký by byl takový svět pro život na Zemi, život lidí? A bylo by vůbec možné, aby v takovém světě existovali lidé?

Toto riešenie nebude vôbec úplné. Totiž rýchlosť svetla je konštanta, ktorá sa vyskytuje všade. A keď sa povie všade, tak sa to prejaví skutočne v toľkých aspektoch, že by sa na to dala napísať celá hŕba kníh. A veru to sa i stalo. Teoretický fyzik *George Gamow* sa snažil v sérii kníh *Pan Tompkins*. . . popularizovať modernú vedu verejnosti. V prvej knihe *Pan Tompkins v ríši divů* (1940) sa snaží priblížiť aspekty špeciálnej a všeobecnej teórie relativity vykreslením sveta pri zmene rýchlosti svetla o niekoľko rádov.

A práve to je prvá oblasť, ktorej aspekty by nás napadli, že sa objavia pri zmene rýchlosti svetla. Veď rýchlosť $c = 1\,000 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1} \approx 278 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ už je porovnateľná s rýchlosťami, s ktorými sa stretávame a dokonca niektoré ju prevyšujú. Auta na diaľnici dosahujú rýchlosti $130 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1}$ (povedzme si na rovinu, niektoré i viac), čo je zároveň aj priemerná rýchlosť oblačnosti nad krajinou. Rýchlosť zvuku je približne $1\,200 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1}$. Dopravné lietadlá dosahujú maximálne rýchlosti práve okolo $1\,000 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1}$, raketoplány dokonca $28\,000 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1}$. Geostacionárne družice oblietajú Zem rýchlosťou $11\,000 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1}$ a nižšie družice sa musia pohybovať rýchlejšie, aby sa udržali na dráhe, a to rýchlosťou približne $28\,000 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1}$. Rovnako rýchlosť rotácie Zeme na rovníku je približne $1\,700 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1}$ a Zem sa dokonca pohybuje okolo Slnka priemernou rýchlosťou $107\,000 \text{ km}\cdot\text{hod}^{-1}$.

Keďže podľa špeciálnej teórie relativity sa hmotné objekty nemôžu pohybovať rýchlejšie ako rýchlosť svetla, je jasné, že by to na Zemi nemohlo vyzeráť rovnako. Keď začnete zrýchľovať a približovať sa rýchlostiam porovnateľným rýchlosti svetla (napríklad jazdou v aute po diaľnici), začnú sa rozmery sveta v smere pohybu skracovať podľa vzťahu

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

kde l_0 je pôvodný rozmer v smere pohybu, v je rýchlosť pohybu a l je nový kratší rozmer. A zároveň bude sa vám ubiehať čas pomalšie, než ľuďom na Zemi a to cez vzťah

$$t = t_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

kde t_0 je čas ktorý ubehne ľuďom na Zemi a t je čas, ktorý prežijete v aute. Pre nášeho cestného piráta je to približne skrátenie rozmeru a času o 1 %.

Ďalším javom, ktorý bude pri takejto rýchlosti badateľný, je Dopplerov jav. Vravíte si, že veď Dopplerov jav je aj tak bežne pozorovať pri sanitkách a podobne? No ale tentokrát ho budete môcť pozorovať aj pri svetle. Veru tak, pri pohybu od zdroja svetla sa vám budú vlnové dĺžky predlžovať a smerom ku zdroju skracovať. Čo znamená, že sa bude meniť farba svetla, ktorú uvidíte. Vlnová dĺžka sa bude meniť podľa vzťahu

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{c - v}{c + v}},$$

kde λ je pozorovaná vlnová dĺžka svetla, λ_0 pôvodná vlnová dĺžka svetla a v rýchlosť pohybu ku zdroju. To znamená, že náš cestný pirát, ktorý ide rýchlosťou $v = 130 \text{ km} \cdot \text{hod}^{-1}$ smerom ku križovatke, na ktorej svieti jasná červená vlnovej dĺžky $\lambda_0 = 640 \text{ nm}$, tak vidí jasnú zelenú vlnovej dĺžky $\lambda = 560 \text{ nm}$ a cez križovatku v spokojnosti prejde. Asi väčšie prekvapenie budú mať šoféri, čo namiesto zelenej uvidia na semafore modrú farbu.

No ale keď sa už len pozrieme na rýchlosti makrosvetla i mikrosvetla, tak je naša nová hranica rýchlosti svetla mnohokrát prekračovaná a často i o niekoľko rádov. Preto bude svet vyzeráť inak. Má vôbec zmysel rozmýšľať, ako bude vyzeráť? Budeme tu môcť existovať? Nuž ani veľmi nie. Keď sa pozrieme na Schwarzschildov polomer R , ktorý vyjadruje kritický polomer, pri ktorom prechádza teleso v čiernu dieru. Ten závisí podľa vzťahu

$$R = \frac{2GM}{c^2},$$

kde G je gravitačná konštanta a M je hmotnosť telesa. Pre Zem hmotnosti $M_Z = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ dostávame približne polomer $R_Z = 1 \cdot 10^7 \text{ km}$, čo je poznateľne viac, než skutočný polomer Zeme. Naša planéta by bola čierna diera. A čoby len Zem, i Slnko by bolo čiernou dierou. Pomaly sa naskytá otázka, čo by nebolo čiernou dierou. Tak skúsime odhadnúť veľkosť objektov, ktoré sa nepremenia v čiernotu. Uvažujme teleso guľového tvaru polomeru R a odhadnutej hustoty $\rho \approx 5000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Hmotnosť takého telesa m teda bude

$$m = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho,$$

kde V je objem telesa, gule. Dosadíme do Schwarzschildovho vzťahu, položíme Schwarzschildov polomer polomeru telesa a vyjadríme polomer. Dostaneme

$$R = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi\rho G}} \approx 170 \text{ km},$$

čo znamená, že planéty, planétky, asteroidy a iné vesmírne skaly väčšie ako tento polomer sa premenia na čierne diery. I naša hviezda Slnko, čo by znamenalo, že by nebol ani zdroj svetla, ktorý je pre existenciu nášho života dôležitý.

Otázka je rovnako, ako by sa správal vesmír. Vývoj vesmíru sa dá predpovedať Einsteinovými rovnicami poľa zo všeobecnej teórie relativity. Samozrejme, to už je iná partia. Ako sme už videli v prípade čiernych dier, tak zmenšenie rýchlosti svetla sa dá chápať ako relatívne zvýšenie gravitačnej konštanty alebo skôr relatívne zvýšenie účinnosti gravitácie. Preto môžeme odhadnúť podobný efekt na vývoj vesmíru. Vo vesmíre so silnejším prejavom gravitácie, by sme sa mohli dostať ku uzatvorenému typu vesmíru, ktorý časom môže skončiť veľkým kolapsom.

Samozrejme zmena rýchlosti svetla by mala veľa prejavov v bežnom živote i existencii života. Preto pri hodnotení riešení som uznával rozumné množstvo javov, nápaditosť a jedinečnosť.

Úloha II.1 ... Twix

Tyčinka Twix obsahuje 32% polevy. Jde o váleček průměru 10 mm. Neuvažujte polevu podstavy. Jak je poleva tlustá?

Bonus *Uvažujte lepší model tyčinky.*

V úloze budeme počítat s objemovými procenty, ačkoliv údaj na obalu tyčinky bude spíše hmotnostní – výpočet by nebyl o moc složitější, jenom bychom museli znát (pravděpodobně změřit) hustotu použité čokolády, karamelu a sušenky.

Podle zadání má tyčinka poloměr $r = 5$ mm. Uvažujme, že tyčinka má délku h , poloměr vnitřku (tedy toho, kde není poleva) r_1 a poleva má tloušťku t (takže platí $r = r_1 + t$). Objem polevy se spočítá jako

$$V_p = h\pi(r^2 - r_1^2) = h\pi(r^2 - (r - t)^2),$$

objem celé tyčinky pak $V_T = h\pi r^2$. Mezi těmito objemy platí vztah $V_p = PV_T$, kde $P = 0,32$ je poměr, který máme zadán.

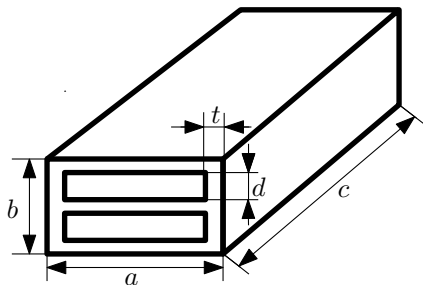
Dosadíme-li do tohoto vztahu objem polevy a tyčinky, dostaneme

$$r^2 - (r - t)^2 = Pr^2.$$

Odtud vyjádříme tloušťku polevy jako

$$t = (1 - \sqrt{1 - P})r = \left(1 - \sqrt{0,68}\right)r \doteq 0,88 \text{ mm}.$$

Pro vyřešení bonusu je nejlepší koupit si tyčinku a podívat se, jak vypadá, abychom věděli, co máme vylepšit. Pozorujeme, že tyčinka připomíná spíš kvádr než válec. Rozkrojíme-li tyčinku postupně podél všech os, všimneme si, že poleva není jen na povrchu tyčinky, ale dělí tyčinku na dvě části – sušenku a karamel. Jako vylepšený model tedy zvolíme tvar, jež můžeme, i s průřezem (a označením) vidět na obrázku. Uvažujme, že tyčinka je politá čokoládou celá (tedy ze všech stran), že tloušťka polevy je všude stejná a že tloušťka sušenky je stejná jako tloušťka karamelu. Zaoblené rohy a vlnky na polevě uvažovat nebudeme.



Obr. 2: Tyčinka Twix.

Objem celé tyčinky je $V_T = abc$, objem polevy je $V_p = abc - 2(a - 2t)(c - 2t)d$, kde $b = 2d + 3t$. Mezi těmito objemy platí výše uvedený vztah, do kterého dosadíme, po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici pro t

$$-8dt^2 + (3ac + 4ad + 4cd - 3acP)t - 2acdP = 0.$$

Odtud můžeme spočítat t pomocí známého vzorečku pro kořeny kvadratické rovnice (vybereme správný kořen)

$$t = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

kde $A = -8d$, $B = 3ac + 4ad + 4cd - 3acP$, $C = -2acdP$.

Když si tyčinku (přibližně) přeměříme, zjistíme, že $a = 17$ mm, $c = 140$ mm, $d = 5$ mm, a odtud můžeme spočítat tloušťku polevy jako $t \doteq 0,96$ mm, což opravdové tyčince vcelku odpovídá, nicméně výsledek není příliš odlišný od jednoduchého modelu.

Úloha II.2 ... létavé dřevo

Máme dřevěnou kuličku ve výšce $h = 1$ m nad Zemí o poloměru $R_Z = 6378$ km a hmotnosti $M_Z = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg. Kulička má poloměr $r = 1$ cm a je ze dřeva o hustotě $\rho = 550$ kg·m⁻³. Předpokládejte, že Země má náboj $Q = 5C$. Jaký náboj q by musela mít kulička, aby se mohla vznášet nad Zemí? Jak tento výsledek závisí na výšce h ?

Aby se kulička mohla volně vznášet, musí platit podmínka, že výslednice působících sil je nulová. Působící síly jsou v našem případě dvě – gravitační a elektrostatická. To, že Země rotuje, nás v tomto případě nijak neomezuje – předpokládáme-li, že Země je homogenní koule, kuličku nic nenutí setrvávat nad jedním místem na Zemi, nemusíme se tedy zamýšlet nad přítomností odstředivé síly. Dále je vhodné předpokládat, že náboj je na Zemi rozložen symetricky kolem středu.

Potom můžeme velikosti gravitační a elektrostatické síly položit sobě rovné

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{d^2} = G \frac{M_Z m}{d^2},$$

kde ε_0 je permitivita vakua, G je gravitační konstanta, Q resp. q je náboj Země resp. kuličky, M_Z resp. m je hmotnost Země resp. kuličky a d je obecně vzdálenost dvou těles, které na sebe silově působí.

Že na obou stranách rovnice opravdu vyjadřuje d stejnou veličinu, zjistíme ze slupkového teorému. Ten tvrdí, že gravitační pole vně tenké kulové slupky je stejné, jako kdyby veškerá její hmota byla soustředěna v jejím středu. Kouli si pak můžeme představit jako součet mnoha takových slupek. Podobný slupkový teorém platí i pro elektrostatické silové působení (přímo vyplývá z Gaussova zákona), což je velice výhodné – nemusíme řešit, jestli je náboj na Zemi rozložen rovnoměrně po povrchu nebo v celém objemu (a tedy zamýšlet se nad tím, jak dobrý je Země vodič), stačí nám předpokládat, že náboj je rozložen symetricky kolem středu. Vidíme, že obě strany rovnice jsou nepřímo úměrné d^2 . Výsledná hodnota q tedy jistě nebude závislá na d .

Z výše uvedené rovnice pak jednoduše vyjádříme

$$q = \frac{4\pi\varepsilon_0 GM_Z m}{Q}.$$

Zbývá dosadit za m

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho,$$

kde r je poloměr kuličky a ρ je její hustota. Pak dostaneme výsledný výraz

$$q = \frac{16\pi^2\varepsilon_0 GM_Z r^3 \rho}{3Q},$$

do kterého dosadíme $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ a $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$.

Správný výsledek je potom $q = 20,4 \text{ C}$.

Úloha II.3 ... týrání pístu

Máme nádobu o konstantním průřezu, která obsahuje ideální plyn a píst ve výšce h . Píst nejprve rychle (tzn. prakticky adiabaticky) stlačíme do výšky $h/2$, podržíme ho, než nastane tepelná rovnováha s okolím, a pak ho pustíme. Do jaké výšky píst vystoupá ihned? Do jaké výšky vystoupá za dlouhou dobu? Nakreslete pV diagram.

Najprv si uvedomíme celkom zjavnú vec. Keď má nádoba konštantný prierez S , tak jej aktuálny objem V_a je priamo úmerný aktuálnej výške piestu h_a

$$V_a = S h_a. \quad (3)$$

Stav plynu v nádobe budú charakterizovať stavové veličiny: objem V , tlak p a teplota T . Plyn prešiel nasledujúcim procesom. Na začiatku bol v stave 1 s piestom vo výške h . Potom prešiel adiabatickým stlačením do stavu 2 s piestom vo výške $h/2$ (objem sa zmenšil, tlak a teplota zvýšili). Potom sa izochoricky ochladil na okolitú (počiatočnú) teplotu do stavu 3 (objem sa nemenil, teplota i tlak klesli). Uvoľnením piesta sa adiabaticky rozťahol na okolitý tlak do stavu 4 (objem stúpil, tlak

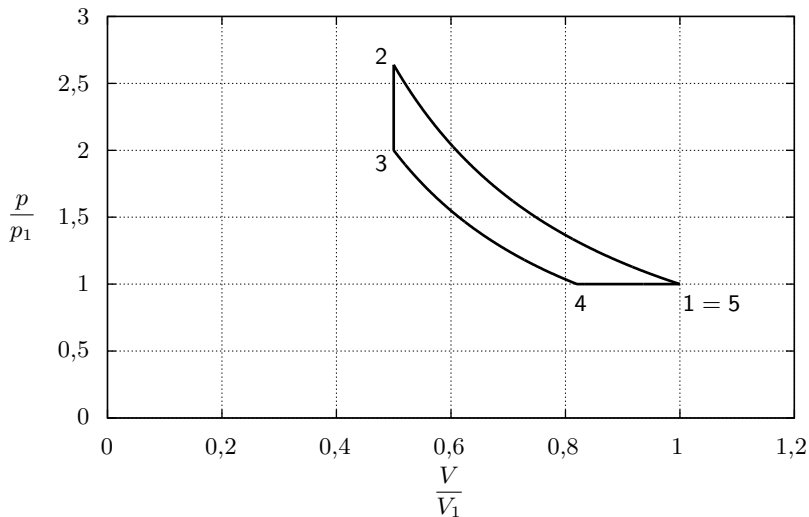
a teplota klesli). Nakoniec sa izobaricky zohrial na okolitú teplotu do stavu 5 (tlak sa nemienil, teplota a objem stúpili).

Ideálny plyn sa správa podľa stavovej rovnice

$$p_i V_i = nRT_i, \quad (4)$$

kde i je index pre rôzne stavy. Látkové množstvo plynu n sa v nádobe nemení, preto je pre všetky stavy rovnaké a nemusí sa špecifikovať indexom.

Najprv si ukážeme, že stavy 1 a 5 sú tie isté. V stave 1 mal plyn stavové veličiny p_1 , V_1 a T_1 a spĺňal stavovú rovnicu (4). Potom, čo plyn prešiel jeden vyššie popísaný proces, sa teplota plynu vyrovnala s okolím ($T_5 = T_1$) a tlak plynu bol rovnaký ako okolitý ($p_5 = p_1$). Podľa stavovej rovnice (4) musí teda byť aj objem rovnaký $V_5 = V_1$ a stavy 1 a 5 sú rovnaké. Vieme teda povedať, že po dlhom čase vystúpa piest na pôvodnú výšku h .



Obr. 3: Relatívny pV diagram cyklu plynu v nádobe pod piestom.

Aby sme zistili, do akej výšky vystúpi piest ihneď, potrebujeme vedieť, z akého stavu sa adiabaticky rozťahuje. V stave 3 je teplota rovnaká ako teplota okolia ($T_3 = T_1$) a piest držíme v polovičnej výške, preto bude aj objem polovičný oproti počiatočnému ($V_3 = V_1/2$). Použitím stavovej rovnice (4) vieme dopočítať, že tlak bude dvojnásobný oproti okolitému ($p_3 = 2p_1$).

Zo stavu 3 sa plyn adiabaticky rozopne na okolitý tlak ($p_4 = p_1$). Pri adiabatikom deji platí

$$p_3 V_3^{\kappa} = p_4 V_4^{\kappa},$$

kde κ je Poissonova konstanta plynu. Dosazením výrazov p_3 , V_3 a p_4 a vyjádřením V_4 dostaneme

$$V_4 = V_1 \cdot 2^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}.$$

Kedže sú objemy plynu a výšky priamoúmerné podľa (3), vieme povedať, do akej výšky h_4 piest vystúpa

$$h_4 = h \cdot 2^{\frac{1-\kappa}{\kappa}},$$

čo vychádza napríklad pre vzduch ($\kappa \approx 1,4$) približne 82% pôvodnej výšky h .

Keď si celý proces vykreslíme v pV diagrame, dostaneme cyklus ako na obrázku 3.

pV diagram je urobený pre dvojatómový plyn (vzduch). Tlak i objem sú vyjadrené relatívne vzhľadom na počiatkové podmienky.

Úloha II.4 . . . hvězdná velikost Měsíce

Je známo, že Měsíc v úplňku má zdánlivou hvězdnou velikost přibližně -12 mag a Slunce na denní obloze zase -27 mag. Pokuste se odhadnout, jakou hvězdnou velikost má Měsíc těsně před zatměním Slunce, pokud víte, že albedo Země činí 0,36 a albedo Měsíce 0,12. Předpokládejte, že světlo se po odrazu rozptýluje stejným způsobem na povrchu Země i Měsíce.

Prvně si musíme uvědomit, jakým mechanismem je vlastně Měsíc těsně před zatměním Slunce, tedy v novu, osvětlen. Kdo už slyšel o tzv. popelavém svitu, ten ví, že je to způsobeno světlem odraženým od Země.

Světelný tok dopadající na Zemi od Slunce je

$$L_1 = \frac{L_S \pi R_Z^2}{4\pi a^2},$$

kde L_S je světelný tok jdoucí od Slunce, a je vzdálenost Země od Slunce a R_Z je poloměr Země.

Teď nastává další zádrhel. Pro určení světelného toku dopadajícího na Měsíc musíme vědět, s jakým albedem máme počítat. V astronomii se používají dvě albeda:

- Bondovo albedo – udává poměr mezi celkovou odraženou a dopadající intenzitou světla
- geometrické albedo – udává poměr mezi jasností tělesa při nulovém fázovém úhlu⁸ a jasností disku o stejném průměru, který je natočen kolmo k pozorovateli a světlo rozptýluje Lambertovsky⁹.

Bondovo a geometrické albedo se liší pouze o multiplikatívni konstantu, která závisí na typu rozptylu. Navíc se o (jinou) multiplikatívni konstantu liší i světelný tok dopadající na Lambertovský disk a světelný tok od něj rozptýlený do určitého směru. Protože je v našem případě fázový úhel nulový jak v případě Země, tak

⁸Úhel mezi směrem dopadajícího paprsku a směrem k pozorovateli.

⁹Rozptyl je Lambertovský tehdy, když se světlo odráží izotropně a jeho intenzita je úměrná kosinu fázového úhlu.

i Měsíce, a u obou těles nastává stejný typ rozptylu, můžeme veškeré tyto konstanty shrnout do jedné, která bude stejná pro Zemi i pro Měsíc a bude nám v dalších výpočtech jedno, jestli je zadané albedo geometrické, nebo Bondovo. Tuto konstantu si označme k .

Pak bude světelný tok dopadající na Měsíc

$$L_2 = \frac{A_Z k L_1 \pi R_M^2}{2\pi r^2},$$

kde A_Z je albedo Země, R_M poloměr Měsíce a r vzdálenost Měsíce od Země. V čitateli je povrch polokoule, protože „za Zemi“ se světlo nerozptýlí, v zásadě jsme tam ale mohli dát klidně povrch koule, nebo čtvrtkoule, ona dvojka by se akorát zahrnula do k . Pak ho ale musíme ve všech výpočtech používat stejně.

Světelný tok dopadající od Měsíce znovu na Zem je

$$L_3 = \frac{A_M k L_2 \pi R_Z^2}{2\pi r^2} = L_1 \frac{A_M A_Z k^2 R_M^2 R_Z^2}{4r^4}.$$

Z Pogsonova vztahu určíme výslednou hvězdnou velikost Měsíce těsně před zatměním

$$\begin{aligned} m - m_S &= 2,5 \log_{10} \frac{L_1}{L_3}, \\ m &= m_S - 2,5 \log_{10} \frac{A_M A_Z k^2 R_M^2 R_Z^2}{4r^4}, \end{aligned} \quad (5)$$

kde m_S je zdánlivá hvězdná velikost Slunce.

Zbývá určit konstantu k . Musíme najít situaci, kde známe výslednou hvězdnou velikost, kde vystupují odrazy pouze u Země nebo Měsíce a všechny fázové úhly jsou nulové. Nabízí se hvězdná velikost Měsíce v úplňku

$$m_M - m_S = 2,5 \log_{10} \left(\frac{L_S \pi R_Z^2}{4\pi a^2} \frac{4\pi (a+r)^2 2\pi r^2}{L_S k A_M \pi R_Z^2 \pi R_M^2} \right).$$

Oprávněně můžeme položit $(a+r)^2 \approx a^2$, pak máme

$$\begin{aligned} m_M - m_S &= 2,5 \log_{10} \frac{2r^2}{k A_M R_M^2}, \\ k &= \frac{2r^2}{A_M R_M^2} 10^{0,4(m_S - m_M)}. \end{aligned}$$

Pokud dosadíme zpět do vztahu (5), dostaneme výsledný vzorec

$$m = 2m_M - m_S - 2,5 \log_{10} \frac{A_Z R_Z^2}{A_M R_M^2}.$$

Po dosazení vyjde $m = -1,0$ mag.

Úloha II.5 . . . kelímek na vodě

Kužel obrácený podstavou vzhůru může držet ve vzduchu na stříkajícím proudu vody, který vychází ze země s konstantním hmotnostním průtokem a počáteční rychlostí v_0 . V jaké výšce nad zemí se bude kužel v rovnováze vznášet?

Bonus Vyšetřete stabilitu kužele v této poloze.

Označme hmotnost kužele jako M , poloměr podstavu kužele r , jeho výšku h a jeho vrcholový úhel 2α , kde $\operatorname{tg} \alpha = r/h$.

Zaměříme se nejdříve na proud vody stříkající ze země. Aby byla úloha jednoduše řešitelná, zavedeme následující předpoklady.

- Proud má u země horizontální řez ve tvaru kruhu. Z axiální symetrie problému je potom zřejmé, že průřez proudu zůstane kruhový ve všech výškách nad zemí.
- Osa kužele souhlasí s osou symetrie vodního proudu.
- Rozměry kužele jsou dostatečně malé, abychom si mohli dovolit položit horizontální složku rychlosti proudu v okolí kužele rovnu nule.¹⁰
- Tlak v celém proudu vody je přibližně konstantní.¹¹

Označíme-li v_0 rychlost vodního proudu u země, vidíme ze zákona zachování energie (připomeňme, že tlak vody v celém proudu považujeme přibližně za konstantní), že jeho rychlost ve výšce H nad zemí v okolí osy proudu bude

$$v(H) = \sqrt{v_0^2 - 2Hg},$$

a tedy, že jednotkou vodorovné plochy ve výšce H proteče za jednotku času hmotnost $\mu(H) = \varrho v(H)$, kde ϱ jsme označili hustotu vody (zde pro změnu uplatňujeme předpoklad o nulové horizontální složce rychlosti proudu). Rovněž vidíme, že pro

$$H_m = \frac{v_0^2}{2g}$$

máme $v(H_m) = 0$. Voda ale někam odtéct musí, takže pro místa při vrcholu proudu náš předpoklad o nulové horizontální složce selhává. Budeme tedy uvažovat pouze případ, kdy se kužel nenachází v blízkosti vrcholu proudu.

Dále si musíme zvolit model srážky proudu s kuzelem. Poslouží nám přiblížení, kdy budeme požadovat zachování složky rychlosti proudu, která je tečná k povrchu kužele (tedy žádné tření). Pro normálovou složku pak uvážíme obecný případ nepružné srážky, kdy $v'_\perp = ev_\perp$ (v'_\perp resp. v_\perp značí normálové rychlosti před srážkou resp. po srážce a $0 \leq e \leq 1$ je koeficient restituace). Ve skutečnosti je to skoro jisté o hodně složitější a museli bychom se ponořit do studia mechaniky kontinua,

¹⁰Jelikož očekáváme, že vertikální složka rychlosti proudu bude s rostoucí výškou klesat, bude se dle rovnice kontinuity proud rozšiřovat a rychlosti elementů vody budou obecně mít nenulovou horizontální složku. Tato horizontální složka však zřejmě bude klesat směrem k ose symetrie, kde musí být nulová.

¹¹Pokud bychom se rozhodli řešit problém exaktně pomocí rovnic pro nestlačitelnou tekutinu v homogenním gravitačním poli, mohli bychom zjistit podmínky, za kterých je tento předpoklad splněn. To zde ovšem dělat nebudeme, neboť je to vysoce nad rámec toho, co by i šikovný středoškolař měl zvládnout.

abychom se mohli následně vypořít s realističtějším modelem obtékání kužele. Proto se ani nebudeme snažit započítávat jiné síly působící na kužel (hydrostatickou, vztlakovou apod.) než tíhovou sílu a reakci na srážkou s proudem vody.

Při výpočtu síly, kterou proud vody působí na kužel, postupujeme tak, že si plochu pláště rozsekáme na koaxiální prstýnky o poloměru $x = y \operatorname{tg} \alpha$, kde projekce jejich šířky do vodorovné roviny (aneb účinný průřez ve vertikálním směru) je $\operatorname{tg} \alpha dy$. Za jednotku času potom na plochu jednoho prstýnku dopadne element vody o hmotnosti

$$dm = 2\pi x \mu(H + y) \operatorname{tg} \alpha dy dt = 2\pi y \mu(H + y) \operatorname{tg}^2 \alpha dy dt,$$

jehož rychlost se při srážce v normálovém směru změní o $(1 + e)v(H + y) \sin \alpha$. Z druhého Newtonova zákona pak ihned víme, že na plochu prstýnku působí v normálovém směru síla o velikosti

$$dF_{\perp} = 2\pi(1 + e) \sin \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha \mu(H + y)v(H + y)y dy.$$

Integrujeme-li tuto sílu po povrchu kužele, zjistíme, že horizontální složky se nám vyruší a zbude nám pouze celková vertikální síla působící na kužel, jejíž velikost vyjde (dosazujeme za $\mu(H + y)$ a $v(H + y)$)

$$F_{\text{vert}} = 2\pi \varrho(1 + e) \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha \int_0^h (v_0^2 - 2gH - 2gy) y dy,$$

kde předpokládáme, že se kužel nenachází poblíž vrcholu proudu a tedy, že voda dopadá na celý jeho plášť. Po triviální integraci pak dostáváme

$$F_{\text{vert}} = 2\pi \varrho h^2(1 + e) \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha \left(\frac{v_0^2}{2} - gH - \frac{2}{3}gh \right).$$

Pro rovnovážnou výšku nad zemí H_{eq} platí (porovnáme F_{vert} s tíhovou silou působící na kužel Mg , ze symetrie je rovněž zřejmé, že výsledný moment síly působící na kužel je automaticky nulový)

$$H_{\text{eq}} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{2}{3}h - \frac{M}{2\pi \varrho h^2 (1 + e) \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

neboli po dosazení $H_m = v_0^2/2g$ a $S_{\text{eff}} = \pi r^2 = \pi h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ (účinný průřez kužele ve vertikálním směru),

$$H_{\text{eq}} = H_m - \frac{2}{3}h - \frac{M}{2\varrho S_{\text{eff}} (1 + e) \sin^2 \alpha}. \quad (6)$$

Selský rozum nám říká, že H_{eq} by měla růst s rostoucí v_0 (ekvivalentně s rostoucí H_m), klesat s rostoucí M , růst s rostoucím e , růst s rostoucím S_{eff} a také že $H_{\text{eq}} \leq H_m$. Všechny tyto vlastnosti vztah (6) splňuje, což je pro nás znamením, že jsme na správné cestě.

Skutečně, pokud nevychází $H_{\text{eq}} \approx H_m$, je náš předpoklad, že se kužel nenachází poblíž vrcholu proudu, validní a vztah (6) můžeme považovat za náš konečný výsledek. Zvolíme-li přibližné kritérium platnosti této podmínky jako $H_{\text{eq}} \lesssim H_m - h$, pak tato podmínka přestává platit pro

$$h \gtrsim \frac{3M}{2\rho S_{\text{eff}}(1+e)\sin^2\alpha}.$$

Tuto nerovnost můžeme vyčíst pomocí předem definovaných parametrů problému. Pokud zjistíme, že neplatí, selže náš předpoklad o nulovosti horizontální složky rychlosti proudu a my musíme přistoupit k exaktnímu řešení problému. Jak jsme ale napsali výše, to zde provádět nebudeme.

Na závěr se pokusme adresovat otázku stability takovéto rovnovážné polohy (předpokládáme zjednodušující podmínky zmíněné výše).

Nejdříve, z předpokládané symetrie vůči horizontálnímu posunutí, je zřejmé, že rovnovážná poloha je indiferentní vůči horizontálním výchylkám translačního charakteru.¹² Stejně tak je poloha indiferentní vůči malým pootočením kolem osy kužele (axiální symetrie problému).

Dále, vychýlíme-li kužel o malou vzdálenost η ve vertikálním směru, máme velikost výslednice sil působících na kužel

$$F = M\ddot{\eta} = 2\rho S_{\text{eff}}(1+e)\sin^2\alpha \left(gH_m - gH_{\text{eq}} - g\eta - \frac{2}{3}gh \right) - Mg,$$

což po dosazení za H_{eq} dává

$$M\ddot{\eta} = - \left[2g\rho S_{\text{eff}}(1+e)\sin^2\alpha \right] \eta,$$

kde $k = 2g\rho S_{\text{eff}}(1+e)\sin^2\alpha > 0$, takže síla je namířena proti výchylce a rovnovážná poloha je tedy stabilní. Rovnou můžeme rovněž odečíst úhlovou frekvenci kmitů kužele kolem rovnovážné polohy $\omega = \sqrt{k/M}$, kde k je definované výše.

Konečně, fixujeme těžiště a pootočíme kužel o malý úhel kolem libovolné osy kolmé na osu kužele (úhel měříme od směru vzhůru). Nakreslíme-li si přehledný obrázek, na kterém si pootočený kužel rozdělíme vertikální rovinou kolmou na pootočení a procházející těžištěm kužele, jasně vidíme, že pro dostatečně malé úhly (tak, aby plášť kužele na opačné straně od pootočení ještě nebyl rovnoběžný s vertikálou) je účinný průřez té části kužele, který se od těžiště nachází ve směru pootočení, větší než účinný průřez opačné části (navíc, ve směru pootočení dopadá proud na kužel více kolmo, takže se vertikální složka hybnosti přenáší efektivněji). Výsledný moment síly je tedy namířen proti směru pootočení a poloha je tedy *stabilní* vůči výchylkám tohoto druhu (při pootočení rovněž mírně klesne celkový účinný průřez, takže kužel klesne ve vertikálním směru, ale jak jsme ukázali výše, poloha je ve vertikálním směru stabilní). Pro větší výchylky pak předpokládáme přítomnost druhé, *labilní*, rovnovážné polohy.

¹²Přestaneme-li ignorovat horizontální složku rychlosti, tato symetrie nám zmizí a je navíc zřejmé, že takovéto výchylky budou labilní, neboť ve směru posunutí budou vektory rychlosti proudu natočené více od kolmice k povrchu pláště kužele (a hybnost se bude přenášet méně efektivněji, viz faktor $\sin^2\alpha$ v (6)) a naopak, na druhé straně budou vektory rychlosti proudu natočené více ke kolmici, takže se hybnost bude přenášet efektivněji. Výsledná horizontální síla na kužel tedy bude podporovat výchylku v růstu.

Úloha II.P ... Temelínská

Odhadněte, kolik jaderného paliva se spotřebuje v jaderné elektrárně na 1 MWh elektrické energie, kterou spotřebují lidé až v domácnosti. Srovnajte to se spotřebou paliva v tepelné elektrárně. Nezapomeňte uvažovat všechny možné ztráty.

Bonus Uvažte i energii, která se spotřebuje při těžbě a přepravě potřebných surovin.

Úlohu si rozdělíme na tři části: výrobu energie, rozvod energie a bonus – příprava a přenos paliva. Úlohu budeme řešit pro Českou republiku a zanedbáme propojení sítě se sousedními zeměmi.

Nejdřív zjistíme, kolik jaderného paliva je potřeba na dodání jednoho MWh do elektrické sítě. Jaderná elektrárna Dukovany ročně vyrábí zhruba 14,4 TWh, v každém ze 4 jejích bloků se nachází zhruba 42 t paliva a ročně se jedna pětina vyměňuje.¹³ Spotřeba paliva s_j je tedy

$$s_j = \frac{\text{roční spotřeba paliva v kg}}{\text{roční výroba v MWh}} \doteq 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{MWh}^{-1}.$$

Můžeme předpokládat, že tato hodnota bude obdobná i pro JET, takže tato hodnota bude platit pro veškerou jadernou energii v ČR. Je ale nutno mít na paměti, že se jedná o energii dodanou do sítě, ne do domácností (což je předmětem úlohy).

Pro odhad spotřeby paliva na 1 MWh v tepelných (uhelných) elektrárnách vyjdeme z údajů pro rok 2010, kdy se v uhelných elektrárnách společnosti ČEZ spotřebovalo $2,7 \cdot 10^{10}$ kg hnědého i černého uhlí¹⁴ a vyrobilo zhruba 29 TWh elektrické energie.¹⁵ Potom je spotřeba na megawatt

$$s_u \doteq 1100 \text{ kg}\cdot\text{MWh}^{-1}.$$

Rozvodnou síť si rozdělíme na dvě části: síť přenosovou a síť distribuční. Přenosová soustava *přenáší* elektrickou energii na velké vzdálenosti do rozvodu. Funguje zpravidla na napětích řádově stovky kV a v ČR ji provozuje zejména společnost ČEPS, a. s. Distribuční síť zajišťuje *distribuci* elektřiny koncovým uživatelům. V ČR pracuje na hladinách 110 kV, 20 kV a 0,4 kV, provozují ji zejména společnosti ČEZ, E.ON a PŘEdistribuce (Pražská energetická).

Než se pustíme do odhadování ztrát přenosové soustavy, ujasněme si několik faktů. Elektrony jako částice nemají vlastní identitu a tím méně ji můžou mít jejich gradienty generující napětí. Protože je přenosová síť spojitá, nelze říci, energie z které elektrárny dorazila kam, nebo kolik energie z dané elektrárny se přeměnilo na Jouleovo teplo. Odhady ztrátovosti *jaderné* či *uhelné* elektřiny jsou tedy pouze připodobnění.¹⁶ Vytvořme si tedy zjednodušující model přenosové soustavy. Proud

¹³http://cs.wikipedia.org/wiki/Jaderná_elektrárna_Dukovany

¹⁴<http://www.cez.cz/edee/content/micrositesutf/odpovednost2011/cs/environment/vyroba-tezba-a-vystavba.html>

¹⁵http://cs.wikipedia.org/wiki/Seznam_tepelných_elektráren_v_Česku

¹⁶Spíše je tím myšleno, jak by se změnilly ztráty přenosové sítě v poměru k výkonu elektrárny, kdyby tato elektrárna byla ze sítě vyjmuta a v určitém okruhu okolo elektrárny by došlo ke snížení odběru odpovídajícímu výkonu elektrárny.

v této soustavě se řídí pravidlem nejmenšího odporu, tzn. rozdělí se tak, aby měřitelný odpor (pro AC impedance) byl co nejmenší¹⁷ Dále předpokládáme dokonale symetrickou a dostatečně hustou přenosovou síť a homogenní rozdělení spotřeby energie. Vyjdeme-li z tohoto, dostali bychom rozdělení spotřebitelů energie z dané elektrárny, kde by vzdálenější spotřebitelé spotřebovali méně. V našem modelu toto rozdělení nahradíme kruhem, kde energii dodává výhradně daná elektrárna, kde celková spotřeba se rovná výkonu elektrárny.

Na stránkách ČEPSu¹⁸ lze nalézt množství zajímavých údajů a informací včetně aktuálních dat týkající se dodávání, rozvodu a regulace energie. K odhadnutí ztrátovosti *jaderné*, resp. *uhelné* energie v síti je více, prezentovat tu budu pouze jeden. Mj. se z těchto stránek dá zjistit, kolik energie bylo celkově přeneseno a kolik ztraceno.¹⁹ Tato data odpovídají procentuální ztrátovosti přenosové sítě $p \doteq 0,0131 = 1,31\%$, což je reálná hodnota. Tím ale nemáme vyhráno, protože hustota produkce energie není homogenní a mezi jadernými a uhelnými elektrárnami jsou v tomto směru velké rozdíly. Konkrétně je tím myšleno, že jaderných elektráren je méně, za to jsou výkonnější (ve smyslu 1 JE vs. 1 UE). Aplikujme tento poznatek na náš model přenosové sítě. Procentuální ztrátovost vedení je přímo úměrná délce vedení. Z toho ale vyplývá, že ztrátovost naší přenosové soustavy pro danou elektrárnu je přímo úměrná váženě-průměrné vzdálenosti jejího odběratele. Platí tedy

$$p_i \sim \frac{\int_0^{r_i} 2\pi r^2 dr}{\pi r_i^2} = \frac{2}{3} r_i,$$

kde p_i je procentuální ztrátovost přenosové sítě pro elektrárnu i . Zároveň ale platí

$$\pi r_i^2 \sim P_i,$$

kde P_i je výkon elektrárny i . Důsledkem tohoto

$$p_i \sim r_i \sim \sqrt{P_i}.$$

Procentuální ztrátovost určité skupiny N elektráren p_N potom bude

$$p_N = \frac{P_{\text{ztráty}}}{P_{\text{clk}}} = \frac{\sum_i^N p_i P_i}{\sum_i^N P_i} \sim \frac{\sum_i^N P_i^{\frac{3}{2}}}{\sum_i^N P_i}.$$

Dále vyjdeme z tabulky.²⁰ Tabulka představuje 80 % instalovaného výkonu tepelných elektráren v ČR. Značná část zbývajících tepelných i netepelných elektráren nemusí přenosovou soustavu vůbec využívat. Dále velkou část výkonu netepelných elektráren tvoří přečerpávací vodní elektrárny, které jsou v našem modelu zanedbány. Proto v dostatečném přiblížení můžeme tuto tabulku považovat za kompletní

¹⁷ Jedná se pouze o jinou interpretaci Ohmova zákona pro paralelní zapojení.

¹⁸ <http://www.ceps.cz>

¹⁹ <http://www.ceps.cz/CZE/Media/Stranky/Zajimava-cisla.aspx>

²⁰ http://cs.wikipedia.org/wiki/Seznam_tepelných_elektráren_v_Česku

seznam dodavatelů do přenosové sítě. Tato data nyní vložíme do tabulkového editoru a numericky spočítáme poměry procentuálních ztrátových a celkových produkcí jaderných a tepelných-nejaderných elektráren:²¹

$$\frac{p_u}{p_j} \doteq 0,45, \quad \frac{P_u}{P_j} \doteq 1,63.$$

Z definice potom určitě platí:

$$p = \frac{\text{celkové ztráty}}{\text{celkový výkon}} = \frac{p_u P_u + p_j P_j}{P_u + P_j} = p_j \frac{1 + \frac{p_u}{p_j} \frac{P_u}{P_j}}{1 + \frac{P_u}{P_j}},$$

odkud

$$p_j = p \frac{1 + \frac{P_u}{P_j}}{1 + \frac{p_u}{p_j} \frac{P_u}{P_j}}, \quad p_u = p_j \frac{p_u}{p_j},$$

z čehož nám po dosazení vyjde $p_j \doteq 0,020 = 2,0\%$, $p_u \doteq 0,009 = 0,9\%$.²²

Co se týče distribuční sítě, na stránkách příslušných společností lze opět zjistit řadu zajímavých věcí, bohužel ale ne počet uzlů vedení jednotlivých napěťových úrovní. Bez tohoto údaje nejsme schopni provést kvalifikovaný kvantitativní odhad ztrát a přímo údaje o ztrátách v distribučních vedeních pro ČR nebo jednotlivé provozovatele nelze jednoduše dohledat. Naštěstí můžeme předpokládat, že na transformační stanice z přenosové sítě přichází energie z jaderných i z uhelných elektráren společně, tudíž ztrátovost distribuční sítě d_j , resp. d_u pro energii z jaderných, resp. z uhelných elektráren bude stejná.

Podle serveru <http://www.indexmundi.com> činila celková procentuální ztrátovost přenosové i distribuční sítě ČR z v roce 2010 5,2%. Pro ztrátovost d distribuční sítě tedy bude platit:

$$1 - (1 - d)(1 - p) = z \quad \Rightarrow \quad d = 1 - \frac{1 - z}{1 - p} \doteq 0,04 = 4\%.$$

Abychom dostali požadované hodnoty a_i množství paliva na energii spotřebovanou v domácnosti, musíme hodnoty s_i podělit účinnostmi jednotlivých sítí. Konkrétně

$$a_j = \frac{s_j}{(1 - p_j)(1 - d)} \doteq 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{MWh}^{-1},$$

$$a_u = \frac{s_u}{(1 - p_u)(1 - d)} \doteq 1200 \text{ kg} \cdot \text{MWh}^{-1}.$$

Je vidět, že se hodnoty liší o téměř šest řádů, 2 g jaderného paliva odpovídají zhruba tuně uhlí.

²¹K tomuto se nejlépe hodí sloupec roční výroba energie. Můžeme vypočítat pouze poměry, protože neznáme konstanty úměrnosti zkoumaných závislostí.

²²Předpokládáme hustou, stromovitou rozvodnou síť. Další vadou v našich výpočtech je fakt, že ve ztrátách přenosové sítě jsou započteny i ztráty při transformacích, ale počet transformací neroste lineárně s délkou vedení. Tento fakt přiblíží obě ztrátovosti blíže průměrné ztrátovosti.

Tyto hodnoty udávají, kolik kg paliva musíme spotřebaovat, abychom do domácností dodali 1 MWh. Chceme-li ale zjistit skutečné množství paliva, které zvýší přísun energie do domácností o 1 MWh, musíme hodnoty a_i upravit podle množství energie, která bude spotřebaována při získávání, přípravě a přepravě paliva. Platí

$$\frac{1}{b_i} = \frac{1}{a_i} - e_i \Rightarrow b_i = \frac{a_i}{1 - a_i e_i},$$

kde b_i jsou množství paliv i , které je třeba použít, aby se přísun energie do domácností zvýšil o 1 MWh; e_i je množství energie, která se spotřebuje získáváním, přípravou a přepravou 1 kg paliva i .²³

Nicméně toto není jednoduchý úkol. V případě uhlí by se jednalo o zejména energetickou náročnost těžby a přepravy, pro jaderné palivo se jedná o těžbu, několikanásobný přesun (častokrát na vzdálenosti tisíců kilometrů), filtrace a obohacování, nemluvě o energii spotřebaované na bezpečnostní opatření a následné uložení použitého paliva. Během všech těchto procesů dojde ke spotřebě široké škály druhů energií od elektrické až po lidské zdroje. Značnou část těchto energií budou tvořit všemožná paliva na bázi ropy. Na výrobu a přepravu těchto paliv bylo kromě ropy zapotřebí opět bohatého spektra dalších typů energií. Většina potřebných dat je těžko dohledatelná a i poté by to byl téměř nadlidský úkol. Způsobů, jak se s tímto vypořádat, je opět několik, předvedeme tu jeden z nich.

Za zamýšlení rovněž stojí náklady (energie + suroviny) na stavbu elektráren (které se pro různé typy elektráren různí). Zde již záleží na pochopení zadání. Dle našeho názoru je úloha pouze o provozu elektráren, nicméně započítání těchto nákladů rozhodně není chyba.

V lidské společnosti existuje jedna univerzální entita, která slouží k měření různě uložených energií, totiž peníze. Pro srovnání energetické náročnosti jednotlivých paliv použijeme tedy jejich cenu.

Průměrná cena c_e 1 MWh se v českých domácnostech v posledních letech pohybovala okolo hodnoty 4 600 Kč. Cena uhlí či jaderného paliva se liší v závislosti na mnoha parametrech (množství, vzdálenost, dodavatel. . .). Počítejme tedy cenu jaderného paliva přibližně $60\,000 \text{ Kč} \cdot \text{kg}^{-1}$ a cenu hnědého uhlí zhruba $2 \text{ Kč} \cdot \text{kg}^{-1}$. Za náklady na uskladnění vyhořelého jaderného paliva budiž počítáno $50 \text{ Kč} \cdot \text{MWh}^{-1}$, které musí jaderné elektrárny odvádět do státem řízeného tzv. *jaderného účtu*. Částku odváděnou na JÚ za MWh přepočítejme na kilogram pomocí poměru s_j jaderného paliva na energii dodanou do sítě. Cena jednoho kg jaderného paliva c_j je zhruba 81 000 Kč. Platí:

$$\begin{aligned} e_i &= \frac{1}{a_i} - \frac{c_i}{c_e}, \\ b_i &= \frac{c_e}{c_i}, \\ b_j &= \frac{c_e}{c_j} \doteq 5,7 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{MWh}^{-1}, \\ b_u &= \frac{c_e}{c_u} \doteq 2\,300 \text{ kg} \cdot \text{MWh}^{-1}. \end{aligned}$$

²³ Jedná se o 1 kg výsledného paliva.

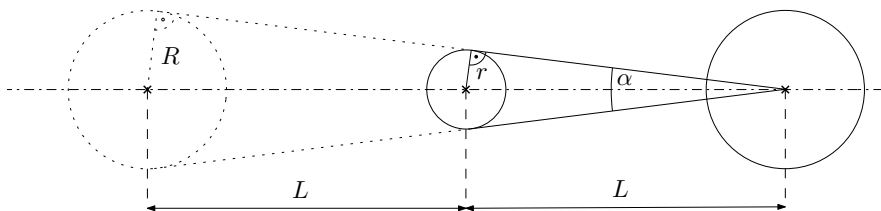
Je vidět, že na hmotnost paliva na 1 kWh v domácnosti jsou stále jaderné elektrárny asi o pět řádů účinnější.

Na závěr bychom chtěli zdůraznit, že cest, jak se dostat k výsledku, je mnoho a netvrdíme, že tato je optimální. Dále je důležité si povšimnout, že většina ztrát, které jsme vypočítávali, se v důsledku projeví méně, než je nepřesnost kvůli odhadům vstupních veličin. Tyto chyby tedy teoreticky lze zanedbat, ale je potřeba argumentovat proč, což většinou nelze o moc snadněji než kvalifikovaným odhadem-výpočtem.

Úloha III.1 ... zatmění

Kolem hvězdy obíhá po kruhové dráze planeta a kolem ní obíhá taktéž po kruhové dráze měsíc, a to v rovině jejího oběhu. Víme, že při zatmění slunce je úhlová velikost měsíce stejná jako úhlová velikost slunce, pozorováno z planety (tj. měsíc slunce přesně zakryje). Dále ještě víme, že při zatmění měsíce naopak planeta přesně zakryje měsíc. Určete, jaký je poměr poloměrů planety R a měsíce r , jestliže je vzdálenost planety od hvězdy mnohem větší než vzdálenost měsíce od planety L a ta je zase řádově větší než rozměry R , r .

Podstatou úlohy je nakreslit si s využitím údajů ze zadání vhodný obrázek, z něž bude hodnota hledaného poměru ihned patrná. Jelikož jsou dráhy planety i měsíce přesně kruhové a leží v jedné rovině, lze geometrii obou případů zatmění popsat z této roviny v pohledu kolmém na spojnici slunce – planeta – měsíc.



Obr. 4: Zatmění slunce (plná čára) a zatmění měsíce (tečkovaná čára).

Dále víme, že rozměry planety a měsíce jsou zanedbatelné vůči jejich vzájemné vzdálenosti. V případě zatmění slunce tedy můžeme nakreslit stínový kužel měsíce tak, že jeho vrchol leží ve středu planety. Úhel u vrcholu označme α . Poloměr měsíce pak můžeme vyjádřit pomocí úhlu α a vzdálenosti L jako

$$r = L \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (7)$$

Druhou situaci, zatmění měsíce, můžeme nakreslit do stejného obrázku tak, že zafixujeme polohu měsíce a planetu nakreslíme v opačné poloze. Úhlová velikost hvězdy se tímto zjednodušením změní pouze zanedbatelně, protože její vzdálenost

od planety je mnohem větší než L . Potom je vrcholový úhel stínového kuželu planety přibližně roven vrcholovému úhlu stínového kužele měsíce a tyto dva kužely, resp. trojúhelníky, v obrázku splynou. Pak vyjádříme poloměr planety

$$R \approx 2L \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (8)$$

a ze vztahů (7) a (8) již velmi přímočaře plyne

$$R \approx 2r.$$

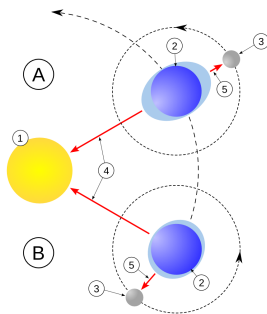
Poloměr planety tedy musí být přibližně roven dvojnásobku poloměru její družice. Výše popsany geometrický rozbor je znázorněn na obrázku 4.

Úloha III.2 . . . Středozemní moře

Jak rychle v průměru teče voda Giblartarským průlivem, když umožňuje stídání přílivu a odlivu ve Středozemním moři? Potřebné údaje si najdete na internetu a nezapomeňte citovat!

Slapové jevy (tedy příliv a odliv) vznikají v důsledku působení tzv. slapových sil, které jsou druhotným efektem gravitační síly.

Nejjednodušší model je na obrázku 5. Situace A představuje tzv. skočné dmutí, kdy Slunce, Měsíc a Země jsou v jedné přímce, a výška přílivu, resp. odlivu, je vyšší než v případě situace B, tzv. hluchého dmutí. Z obrázku je patrné, že slapové síly Slunce jsou slabší než slapové síly Měsíce.



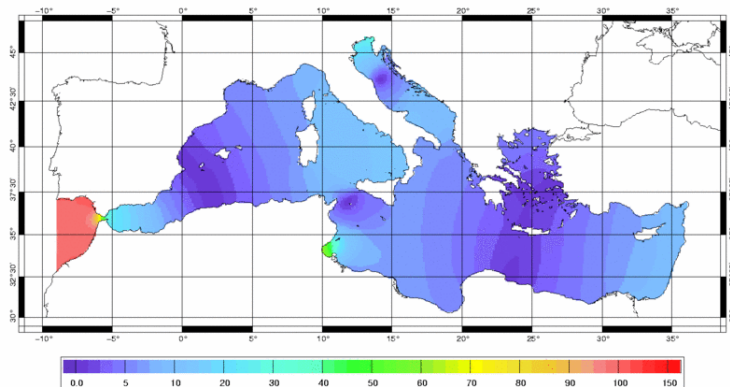
Obr. 5: Slapové jevy. A – skočné dmutí, B – hluché dmutí.

Zdroj: http://cs.wikipedia.org/wiki/Slapové_jevy.

Rozloha Středozemního moře²⁴ je asi $2,6 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$, přičemž změna rozlohy mezi přílivem a odlivem je zanedbatelná. Průměrná hloubka Giblartarského průlivu²⁵ je 365 m, široký je (odhadneme např. z mapy) asi 15 km. Vynásobením dostaneme průřez asi $5,5 \cdot 10^6 \text{ m}^2$.

²⁴http://cs.wikipedia.org/wiki/Středozemní_moře

²⁵<http://www.britannica.com/EBchecked/topic/233262/Strait-of-Gibraltar>



Obr. 6: Průměrné amplitudy přílivu na různých místech Středozemního moře.

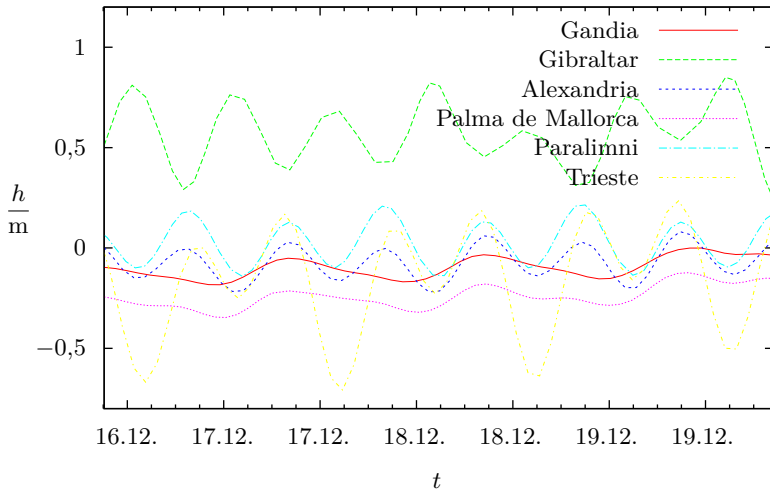
Zdroj: <http://www.avisioceanobs.com/en/applications/ocean/tides/tides-around-the-world.html>.

Budeme předpokládat, že k přílivu a odlivu dochází pouze s dvojnásobkem frekvence odpovídající průchodu Měsíce nad příslušným poledníkem, tj. každých 12 hodin 25 minut a 14 sekund, tedy zanedbáme vliv Slunce. Předpokládejme, že příliv nastává na celé ploše Středozemního moře v jeden okamžik a rozdíl mezi výškou hladiny při přílivu a při odlivu odhadneme dle mapy na obrázku 6 na 20 cm (je-li průměrná amplituda 10 cm, pak rozdíl mezi maximem a minimem je dvojnásobek). Vynásobením plochy vodní hladiny a této výšky zjistíme, že od odlivu do přílivu (tedy za polovinu periody, tj. za asi 6 hodin 12 minut) se objem vody ve Středozemním moři zvedne o $5,2 \cdot 10^{11} \text{ m}^3$. Průměrný průtok Gibraltarským průlivem by pak byl asi $2,3 \cdot 10^7 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Zajímá nás průměrná velikost rychlosti vody, tu dostaneme vydělením průměrného průtoku průřezem a dostaneme asi $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

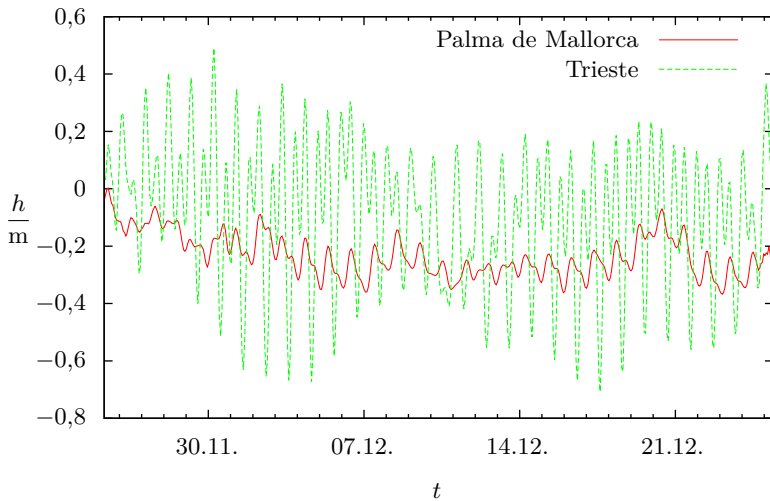
Pokusme se dále alespoň kvalitativně popsat některá zjednodušení, která jsme v odhadu udělali. Kvantitativní vyjádření těchto jevů by však bylo obtížné, jedinou možností by byla numerická simulace.²⁶

Prvním zjednodušením byl předpoklad, že příliv nastává na všech místech Středozemního moře v jeden okamžik. Rozdíl zeměpisné délky nejvýchodnějšího a nejzápadnějšího bodu Středozemního moře je (např. dle mapy na obrázku 6) asi 37° . Proto v případě, kdy uvažujeme pouze působení Měsíce (tedy rozdíl zeměpisných délek místa s přílivem a odlivem je 90°), nikdy nenastane situace, že by v celém Středozemním moři byl příliv. Bude-li na jednom konci příliv, na druhém konci bude hladina přibližně odpovídat výšce mezi přílivem a odlivem. Na obrázku 7 je závislost výšky vodní hladiny v čase pro několik různých míst Středozemního moře. Můžeme si povšimnout, že rozdíl fáze (tedy vzájemný časový posun maxim) mezi

²⁶Podrobnější výpočet najdeme např. na <http://www.pik-potsdam.de/news/public-events/archiv/greencyclesii/programme/18.5.2011/artale/Tidal-exchange-gibraltar-strait.pdf>



Obr. 7: Časová závislost výšky přílivu na několika místech Středozemního moře koncem roku 2013. Zdroj dat: <http://www.ioc-sealevelmonitoring.org>.



Obr. 8: Časová závislost výšky vodní hladiny během jednoho měsíce koncem roku 2013.

stanicemi Alexandria (Egypt) a Paralimni (Kypr) je malý, jejich zeměpisné šířky jsou blízké, kdežto je-li na Kypru příliv, na druhém konci Středozemního moře, v Gibraltaru, je odliv. Voda se tedy v rámci Středozemního moře přesouvá, a tudíž průtok Gibraltarským průlivem je značně menší než výše odhadnutý.

Na obrázku 7 si též můžeme povšimnout další skutečnosti, kterou jsme při odhadu nebrali v potaz. Příliv a odliv se neprobíhají vždy s frekvencí asi 12,5 nebo 12 hodin, nicméně též s frekvencí 24 hodin. Například na stanici Gandia (Španělsko) je perioda jednoho dne dobře viditelná. Na Mallorce jsou v závislosti dobře patrné obě složky – denní i půldenní. Na obrázku 8 vidíme závislost výšky hladiny na dvou místech po delší časový interval. Na obou spatřujeme kromě půldenní periody i periodu denní. Z grafu je též patrné, že amplituda půldenních slapových jevů je menší než denních a během měsíce se mění.

Úloha III.3 ... pohárkovo vanová

Vezměme prázdný válcový kelímek. Otočme ho dnem vzhůru a tlačme ho pod klidnou vodní hladinu. Jak vysoký bude vzduchový sloupec v kelímku v závislosti na jeho ponoření?

Uvažujme, že kelímek má plochu podstavy S a výšku h , a rovněž, že teplota okolního vzduchu T_a je stálá a rovná teplotě vody, do které kelímek tlačíme. Z hlediska jednoduchých termodynamických modelů můžeme tlačit kelímek dvěma způsoby: buď velmi rychle (tak, aby nestíhala probíhat výměna tepla mezi vzduchem v kelímku a okolím) anebo velmi pomalu (tak, aby teplota vzduchu v kelímku byla vždy rovna teplotě okolí, neboli, aby se teploty okolí a kelímku vždy stihly vyrovnat).

Uvažme nejdříve druhý scénář (*isotermický* model). Označme x vzdálenost okraje ponořeného kelímku od hladiny a $y(x)$ výšku vzduchového sloupce v kelímku. Těsně před ponořením byl objem vzduchu v kelímku $V_0 = Sh$ a jeho tlak byl atmosferický p_a . Ponoříme-li okraj kelímku do hloubky x , bude objem vzduchu v kelímku roven $V(x) = Sy(x)$. Přetlak uvnitř kelímku spočteme jako hydrostatický tlak v úrovni hladiny vody v kelímku, neboli $p(x) = p_a + \rho_v g(x + y - h)$. Můžeme potom psát Boyleův-Mariottův zákon

$$p_a Sh = p(x)V(x) = [p_a + \rho_v g(x + y - h)] Sy.$$

Už odtud můžeme snadno vyčíst, že máme $y(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \infty$: na levé straně rovnice máme konstantu a pokud jdeme s x do nekonečna, přičtením žádného relevantního y toto nekonečno nezrušíme, neboť $y > 0$. Můžeme toho docílit akorát tak tím, že pošleme y k nule. To souhlasí s našimi fyzikálními představami (ve velké hloubce je tlak vzduchu velký a tedy objem malý).

Vztah dále můžeme jednoduše upravit na

$$\rho_v g y^2 + [p_a + \rho_v g(x - h)] y - p_a h = Ay^2 + By + C = 0,$$

kde jsme označili

$$A = \rho_v g, \quad B = [p_a + \rho_v g(x - h)], \quad C = -p_a h.$$

Dosažením do vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice máme y jako funkci x

$$\begin{aligned} y_{1,2}(x) &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \\ &= \frac{-[p_a + \varrho_v g(x-h)] \pm \sqrt{[p_a + \varrho_v g(x-h)]^2 + 4\varrho_v g p_a h}}{2\varrho_v g}, \end{aligned}$$

jejíž nejednoznačnost se nám příliš nelíbí. Nahlédneme ale, že vždy $A > 0$ a $C < 0$, což nám za požadavku $y > 0$ říká, že musíme zvolit znaménko plus. Máme tedy řešení

$$y(x) = \frac{-[p_a + \varrho_v g(x-h)] + \sqrt{[p_a + \varrho_v g(x-h)]^2 + 4\varrho_v g p_a h}}{2\varrho_v g}$$

nebo také

$$y(x) = \frac{2p_a h}{[p_a + \varrho_v g(x-h)] + \sqrt{[p_a + \varrho_v g(x-h)]^2 + 4\varrho_v g p_a h}}$$

pro všechna $x > 0$. Z posledního tvaru je dobře vidět, že $y(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \infty$, jak jsme již odhalili výše.

Zde bychom s výpočty mohli skončit a spokojit se s výsledkem výše. To my ale neuděláme, protože chceme vědět, co se stane v případě *skutečného kelímku* (tedy kromě toho, že máme k výsledku jisté výhrady z hlediska estetiky). Výška typického kelímku totiž nepřesahuje řád desítek centimetrů, což je přibližně stokrát méně, než $H = p_a/(\varrho_v g) \doteq 10$ m, takže $h \ll H$. Tušíme tedy, že pro $x \ll H$ se budou dít zajímavé věci.

Abychom k výsledku došli rychle a relativně bezbolestně, povíme si o velmi užitečném nástroji, totiž *Taylorově větě*: je-li funkce $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ n -krát diferencovatelná a má spojitých prvních $n - 1$ derivací na nějakém okolí bodu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, pak pro všechna \mathbf{t} z tohoto okolí platí²⁷

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{t}) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (\mathbf{t} \cdot \nabla)^k f(\mathbf{x}) + O(|\mathbf{t}|^{n+1}),$$

kde $\nabla \equiv (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ a $\partial/\partial x_i$ značí *parciální derivaci* podle proměnné x_i (což je to stejné jako normální derivace podle x_i , kdy všechny ostatní proměnné považujeme za konstanty). Jak se ukáže, nám bude stačit případ $n = 2$ a $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, pro který máme

$$\begin{aligned} f(\mathbf{t}) &= f(\mathbf{0}) + t_1 \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} + t_2 \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} + \frac{1}{2} t_1^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} + \frac{1}{2} t_2^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} + \\ &+ t_1 t_2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} + O(|\mathbf{t}|^3). \end{aligned} \quad (9)$$

²⁷Zde použijeme notaci, která se běžně používá a určitě stojí za to si ji osvojit: pro funkci $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ píšeme, že $f(\mathbf{x}) = O(g(\mathbf{x}))$ pro $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$, pokud se f na nějakém okolí \mathbf{a} chová nejhůře jako g (až na vynásobení nenulovou konstantou). Přesněji, máme $f(\mathbf{x}) = O(g(\mathbf{x}))$ pro $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$, pokud existuje $M > 0$ takové, že $|f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})| \leq M$ pro všechna \mathbf{x} v nějakém okolí \mathbf{a} .

Jelikož nás zajímá tvar y pro $x, h \ll H$, bude vhodné pro účely následujícího rozboru uvažovat o y jako o funkci x a h a zavést si nové proměnné $\xi = x/H$ a $\eta = h/H$. Budeme pak zkoumat limitu $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$. Přepíšeme si nejdříve y jako funkci ξ a η . Po jednoduché manipulaci dostáváme

$$y(\xi, \eta) = \frac{H}{2} \left(\eta - \xi - 1 + \sqrt{(\xi - \eta + 1)^2 + 4\eta} \right).$$

Nahlédneme, že $y(\xi, \eta)$ splňuje v bodě $(0, 0)$ podmínky Taylorovy věty výše, a po rutinním cvičení z derivování odmocnin zjistíme, že $y(0, 0) = 0$, $\partial_\xi y|_{(0,0)} = 0$, $\partial_\eta y|_{(0,0)} = H$, $\partial_{\xi\xi} y|_{(0,0)} = 0$, $\partial_{\eta\eta} y|_{(0,0)} = 0$ a $\partial_{\xi\eta} y|_{(0,0)} = -H$. Dosazením do (9) pak dostaneme

$$y(\xi, \eta) = H\eta(1 - \xi) + O(|(\xi, \eta)|^3).$$

My ale předpokládáme $h \ll H$ (tedy $\eta \ll 1$) a jak jsme již avizovali výše, zajímá nás teď chování $y(x)$ pro $x \ll H$ (tedy $\xi \ll 1$). Potom ale můžeme zanedbat členy vyšších řádů a máme elegantní výsledek

$$y(x) \approx h \left(1 - \frac{x}{H} \right) \quad \text{pro } x, h \ll H.$$

Nemusíme snad připomínat, že podmínky $x, h \ll H$ jsou pro platnost této aproximace životně důležité a koneckonců, dostaneme-li se do oblasti $x \approx H$, vztah očividně selže pro $x > H$.

Pokud bychom se vrátili k prvnímu (*adiabatickému*) scénáři, došli bychom (analogicky jako výše) k rovnosti

$$p_a h^\kappa = [p_a + \rho_v g(x + y - h)] y^\kappa, \quad (10)$$

ze které pro hodnotu Poissonovy konstanty $\kappa \approx 1,4$ pro vzduch nelze analyticky vyjádřit y jako funkci x . Můžeme z ní ale snadno vyčíst, že opět máme $y(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \infty$, neboť stále $y > 0$ a navíc $\kappa > 0$, takže y jde k nule, právě když y^κ jde k nule.

Rovněž můžeme opět uvážit případ $x, h \ll H$. Musíme zde ale rovnou aproximovat rovnici (10), protože přesný výsledek neznáme.²⁸ Přepíšeme nejdříve rovnici (10) do tvaru

$$y = \left(1 + \frac{x + y - h}{H} \right)^{-\frac{1}{\kappa}} h.$$

Máme ale $x + y - h < x$, takže $x + y - h \ll H$ a tedy

$$y \approx \left(1 - \frac{x + y - h}{\kappa H} \right) h,$$

odkud jednoduše vyjádříme y a za pomoci dalších přímočarých aproximací dostaneme přibližný výsledek

$$y(x) \approx h \left(1 - \frac{x}{\kappa H} \right) \quad \text{pro } x, h \ll H.$$

Všimněme si, že pro $\kappa = 1$, což by mělo odpovídat izotermickému ději, opravdu dostaneme výsledek, který jsme pro izotermický děj odvodili výše.

²⁸Podobně jsme mohli postupovat i v případě isotermického děje a dostali bychom se ke stejnému výsledku jako výše.

Úloha III.4 . . . Ani k stáru, ani k stáru. . .

Balón i s košem má hmotnost M . Koš balónu se ponoří do přehrady a nateče do něj voda. Nyní trochu přitopíme a zvýšíme vztlak balónu na $Mg + F$. Koš má tvar hranolu se čtvercovou podstavou o hraně a a je ponořený do hloubky H . Otvory v koši tvoří $p \ll 1$ z celkové plochy koše, o kterém předpokládáme, že je prázdný (kromě vody). Zanedbejme viskozitu vody a vlastní objem koše. Jak rychle se bude koš vynořovat v závislosti na hloubce ponoření?

Bonus Za jak dlouho se vynoří?

Nápověda Střední rychlost výtoku vody z části koše nad hladinou je rovna $2/3$ maximální rychlosti výtoku.

Označme si x výšku vynoření koše balónu a y výšku hladiny v koši měřenou od hladiny přehrady. Rychlost vynořování odpovídá časové změně délky x . Množství vody, která vytéká je úměrné časové změně výšky hladiny v koši. Označíme-li H_0 výšku koše, pak výška hladiny v koši je

$$h = H_0 - x + y.$$

Dále označíme rychlosti odpovídající po řadě x , y a h jako v_x , v_y , v_h . Je zřejmé, že platí

$$v_h = v_y - v_x \quad \Rightarrow \quad v_x = v_y - v_h. \quad (11)$$

Pro průtok vody skrz plášť koše platí

$$Q = a^2 v_h \quad \Rightarrow \quad v_h = Q a^{-2}, \quad (12)$$

kde a^2 je plocha podstavy koše, viz zadání.

Nyní se zaměříme na síly působící v systému, abychom mohli vypočítat Q a v_y , což nám stačí pro nalezení výsledku. Na vodu v koši působí jednak tíhová síla, jednak vztlaková síla. Vztlaková síla má velikost $F_{vz} = a^2(H_0 - x)\rho g$, kde $a^2(H_0 - x)$ je objem ponořené části balónu. Vidíme, že se přesně vyrovná tíhové síle vody v koši, jenž je pod hladinou přehrady. Proto součet tíhové a vztlakové síly je $a^2 y \rho g$, a protože uvažujeme systém téměř v rovnováze,²⁹ tak musí s velkou přesností platit

$$F = a^2 y \rho g \quad \Rightarrow \quad y = \frac{F}{a^2 \rho g}. \quad (13)$$

A protože síla F je konstantní, tak je i $y = \text{konst}$ a proto je $v_y = 0$. Rozdíl výšky hladiny v balónu a hladiny přehrady je po celou dobu konstantní. Rovnice pro rychlost vynořování (11) spolu s rovnicí pro průtok z koše (12) dávají

$$v_x = -Q a^{-2},$$

kde průtok Q bude záporný, protože voda vytéká. Nyní tedy stačí jej určit.

²⁹ Jelikož $p \ll 1$, bude balón při vynořování klást velký odpor a proto očekáváme, že se systém velmi rychle přiblíží rovnováze.

Pro určení průtoku Q_1 z části pod hladinou se podíváme na rozdíl tlaků uvnitř a vně koše. Budeme-li totiž znát rozdíl tlaků, tak (z důvodu zanedbání viskozity) můžeme určit rychlost průtoku vody v_k skrz koš z Bernoulliho rovnice

$$\frac{1}{2} \rho v_k^2 = \Delta p \quad \Rightarrow \quad v_k = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}.$$

Rozdíl tlaků na vnitřní a vnější straně koše je $\Delta p = y\rho g$. Plocha ponořené části koše je $S = a^2 + 4a(H_0 - x)$. První člen odpovídá ploše podstavy. Proto pro celkový výtok z části pod hladinou platí

$$Q_1 = -p(a^2 + 4a(H_0 - x)) \sqrt{\frac{2y\rho g}{\rho}} = -p(a^2 + 4a(H_0 - x)) \sqrt{2yg},$$

kde za y budeme dosazovat z (13).

Zbývá ještě určit průtok Q_2 z vynořené části koše. Z nápovědy víme, že střední rychlost výtoku bude rovna $2/3$ maximální výtokové rychlosti. Maximální výtoková rychlost těsně nad hladinou bude $v_{nh} = \sqrt{2yg}$. Proto pro průtok Q_2 platí

$$Q_2 = -\frac{2}{3} \cdot 4p a y \sqrt{2yg}.$$

Rychlost zdvihu je tedy

$$v_x(x) = -a^{-2} (Q_1 + Q_2) = \frac{p\sqrt{2yg}}{a} \left(a + 4H_0 + \frac{8}{3}y - 4x \right),$$

kde y je dáno vztahem (13).

Vidíme, že rychlost vynořování lineárně klesá v závislosti na výšce vynořování. Můžeme tedy rovnici přepsat do tvaru

$$v_x(x) = B - Ax,$$

kde A a B jsou konstanty určitelné ze zadání. Jde o diferenciální rovnici. Podívejme se prvně na případ, kdy $B = 0$. Pak nám rovnice přejde do tvaru $v_x(x) = -Ax$, což je rovnice naprosto stejná, jako ta, která popisuje radioaktivní rozpad. V tomto případě víme, že řešením je

$$x(t) = x_0 e^{-At}, \quad v_x(t) = -Ax_0 e^{-At},$$

kde x_0 je libovolná konstanta. Když ale k funkci $x(t)$ přičteme libovolnou konstantu, tak se nám rychlost nezmění. Když přičteme B/A , dostaneme

$$x(t) = \frac{B}{A} + x_0 e^{-At} \quad \Rightarrow \quad Ax(t) = B + Ax_0 e^{-At} \quad \Rightarrow \quad B - Ax(t) = -Ax_0 e^{-At}.$$

což je přesně výraz pro rychlost, takže máme splněnu naši rovnici. Konstantu x_0 určíme tak, aby platilo $x(t=0) = H_0 - H + y$. Tedy $H_0 - H + y = B/A + x_0 \Rightarrow x_0 = H_0 - H + y - B/A$. A získali jsme závislost výšky vynořování na čase. K úplnému vynořování dojde pro $x(t) = H_0$. Tj.

$$H_0 = \frac{B}{A} + x_0 e^{-AT} \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{1}{A} \ln \frac{H_0 - \frac{B}{A}}{x_0},$$

kde jsme označili T čas úplného vynořování.

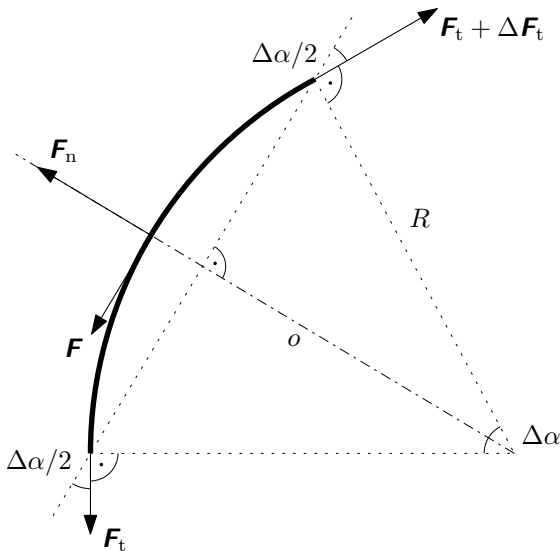
Úloha III.5 ... mig-mig!

Chudák hladový kojot chce ulovit proradného ptáka Uličníka a přichystal na něj následující past: na pevné lano přiváže 500tunovou kovadlinu, přehodí ji přes větev tak, aby visela nad silnicí, a bude čekat. Kolikrát musí lano kolem větve obtočit, jestliže chce kovadlinu udržet ve vzduchu pouze vlastní vahou? Předpokládejte, že hmotnost lana je vůči hmotnosti kojota zanedbatelná.

Je jasné, že musí existovat nějaký fyzikální jav, který umožní udržet lano s nákovou obmotané okolo konára. Týmto javom je trenie medzi lanom a konárom. Označme si príslušný koeficient statického trenia f . Ešte si označme hmotnosť nákovy M , hmotnosť kojota m a polomer konára R .

Uvažujme veľmi malý kúsok lana dĺžky Δl , ktorý je obmotaný okolo konára a vymedzený uhlom $\Delta\alpha = \Delta l/R$ ako vidno na obrázku. Tento kúsok lana susedné kúsky napínajú silami veľkosti F_t a $F_t + \Delta F_t$ (bez ujmy na všeobecnosti môžeme teraz predpokladať, že $\Delta F_t > 0$). Konár naň pôsobí výslednou normálovou silou s veľkosťou F_n .

Na náš kúsok lana pôsobí okrem toho výsledná trecia sila s veľkosťou $F = fF_n$. Ak by neexistovala, lano by sa odtáčalo v smere sily $F_t + \Delta F_t$ (lebo proti smeru tohto pohybu pôsobí iba sila F). Ak si volíme Δl veľmi malé, bude situácia prakticky symetrická, teda výsledná normálová aj trecia sila budú pôsobiť v strede nášho kúska.



Obr. 9: Rozbor síl pôsobiacich na malý kúsok lana.

Aby sa náš kúsok nehýbal, musí byť naňho pôsobiaci výsledný moment síl

nulový. Keďže konár má tvar valca, stačí, aby bola výslednica síl pozdĺž obvodu konára nulová. Vplyv gravitačnej sily na lano môžeme zanedbať. Platí teda

$$(F_t + \Delta F_t) - F_t - F = 0. \quad (14)$$

Lano je pevne navinuté, preto aj výslednica síl v smere osi o nášho kúska je nulová

$$F_n - (F_t + \Delta F_t) \sin \frac{\Delta\alpha}{2} - F_t \sin \frac{\Delta\alpha}{2} = 0. \quad (15)$$

Pre malé uhly $\Delta\alpha$ približne platí $\sin(\Delta\alpha/2) \approx \Delta\alpha/2$ a sily $F_t + \Delta F_t$ a F_t sú približne rovnaké. Preto môžeme z (15) vyjadriť

$$F_n = (2F_t + \Delta F_t) \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \approx 2F_t \frac{\Delta\alpha}{2} = F_t \Delta\alpha$$

a dosadením do (14) dostaneme

$$\Delta F_t = F = f F_n = f F_t \Delta\alpha = \frac{f F_t}{R} \Delta l.$$

Táto rovnica nám hovorí, ako sa zmení napätová sila v lane na vzdialenosti Δl .

Konce lana s kojotom, resp. nákovou sú napínané tiažovou silou $F_{g,1} = mg$, resp. $F_{g,2} = Mg$. Môžeme teda čakať, že pri minimálnej dĺžke lana L_0 bude sila F_t postupne od kojota po nákovu rásť.³⁰ A ako vlastne bude rásť? Ak sa Δl blíži k nule, prechádza zlomok $\Delta F_t / \Delta l$ na deriváciu

$$\frac{dF_t}{dl} = \frac{f F_t}{R},$$

z čoho integrovaním dostaneme

$$\int_{F_{g,1}}^{F_{g,2}} \frac{1}{F_t} dF_t = \int_0^{L_0} \frac{f}{R} dl,$$

$$\ln \frac{M}{m} = \frac{f L_0}{R}.$$

Konce lana budú visieť dole, preto bude v skutočnosti lano navinuté k -krát o uhol 2π okolo celého konára a ešte raz o π okolo jeho vrchnej polovice. My potrebujeme aspoň také k , pre ktoré je dĺžka lana $(2k+1)\pi R \geq L_0$. Počet prehodení lana bude potom

$$N = k + 1 = \frac{1}{2} \left\lceil 1 + \frac{L_0}{\pi R} \right\rceil = \frac{1}{2} \left\lceil 1 + \frac{1}{f\pi} \ln \frac{M}{m} \right\rceil.$$

Dosadením rozumných hodnôt $m = 10 \text{ kg}$ a $f = 0,5$ dostaneme $N = 4$. Teda kojotovi stačí prehodiť lano okolo konára štyrikrát a nákovu udrží aj vlastnou, oveľa menšou, váhou.

³⁰To, že kojot je ľahší ako nákova, snáď netreba spomínať.

Úloha III.P . . . solární pohon

Mohlo by letadlo létat na solární pohon?

Kdybychom chtěli být struční stejně jako v zadání, stačilo by do řešení napsat „ano“, protože aniž bychom cokoliv museli rozebírat, stačí strávit chvíli se svým oblíbeným vyhledávačem a najdeme mimo jiné projekt *Solar Impulse*,³¹ který má za cíl dokonce cestu kolem světa ve Sluncem poháněném letadle, jehož první testovací let již proběhl v roce 2009 a v loňském roce letadlo už zvládlo přeletět Atlantický oceán.

Podívejme se nyní na praktičnost takového letadla. *Solar Impulse* je pouze testovací stroj, který má za úkol demonstrovat možnosti této technologie, a tak je veškerá jeho stavba podřízena tomu, aby létal. Je to velmi lehké a velmi pomalé letadlo (jeho maximální vzletová hmotnost je 2 000 kg, z toho je užitečný náklad 400 kg, a maximální rychlost je $70 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$) při poměrně velkém rozpětí křídel (63 m) a délce trupu (22 m). Z toho je jasné, že s takovými parametry by na něm žádné aerolinky nevydělaly. Zamysleme se nad tím, jestli by solárním pohonem šlo pohánět nějaké standardní dopravní letadlo, a nad tím, jaký pokrok je nutný, aby se vyvážily případné nedostatky.

Naším modelovým letadlem budiž Boeing 787-8 *Dreamliner*. Parametry, které budeme uvažovat, jsme našli na Wikipedii:³² Důležité hodnoty jsou následující: plocha křídel $S_k = 325 \text{ m}^2$, maximální hmotnost paliva $m_p = 102 \text{ t}$ a výkon motorů $P_s = 71 \text{ MW}$ (při vzletu – při samotném letu je výkon nižší, ale letadlo, které nevzletí, neletí). Za poznámku stojí také, že co do rozpětí křídel jsou si obě letadla, která tu zmiňujeme, velmi podobná.

Už jen z toho výkonu motorů je evidentní, že pohánět *Dreamliner* solárními panely bude nejspíš utopie. Proč? Víme,³³ že na Zemi dopadá sluneční záření, jehož plošná hustota výkonu je přibližně $1\,000 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. I kdyby solární panely měly 100% účinnost, nikdy bychom se na požadovaných 71 MW nedostali. Museli bychom znásobit plochu celého letadla řádově aspoň 10^2 krát. Budiž nám útěchou aspoň to, že v operačních výškách dopravních letadel bude tok slunečního záření vyšší než na úrovni moře. Jak bychom tomu, aby letadlo létalo, mohli pomoci? Protože jsme mohli vypustit všechno palivo, naše letadlo teď unese 102 t baterií, které si na zemi před letem můžeme pomoci solárních článků dobít. Lehké lithium-iontové baterie (ty lepší) mají poměr uskladněné energie ke hmotnosti asi³⁴ $0,8 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ (pro srovnání benzin asi $45 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$). Kdybychom celý prostor využili na baterie, měli bychom k dispozici asi 82 GJ elektrické energie. To už zní lépe, ale při plném výkonu je to asi 20 min. Jenže v tuto chvíli jsme zanedbali to, že baterie se při takovémto odběru budou rychle přehřívat, což by si vyžádalo náročné chlazení. *Dreamliner* jsme zvolili jako ukázkou také proto, že jako moderní letadlo spoléhá na

³¹<http://www.solarimpulse.com>

³²http://en.wikipedia.org/wiki/Boeing_787_Dreamliner

³³[http://en.wikipedia.org/wiki/Air_mass_\(solar_energy\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Air_mass_(solar_energy))

³⁴http://en.wikipedia.org/wiki/Energy_density

složitou elektronickou avioniku, která si vyžaduje velký (sice stále řádově menší) elektrický výkon a stejně se v něm baterie přehřívají.³⁵

Je také potřeba zmínit to, že letadla za svoje vlastnosti vděčí právě proudovému motoru, který se nedá jen tak nahradit motorem elektrickým – bylo by nutné se vrátit k vrtuli, což by snížilo účinnost, a tudíž i dolet a další vlastnosti, které bychom od dopravního letadla očekávali.

Zdá se, že v tuto chvíli není možné postavit dopravní letadlo, které by poháněla pouze sluneční energie. Co s tím může věda udělat? Limity jsou jasné – letadlo samo o sobě nemůže vyrábět víc energie, než mu Slunce a jeho rozměry dovolí. Tento výkon sám o sobě dostatečný na pohon velkých letadel nejspíš nikdy nebude. Materiáloví inženýři by mohli přinést nové lehčí konstrukční prvky, ale cesta k letadlu poháněnému elektřinou vede spíše přes výkonné a energeticky husté baterie, které budou dobíjeny elektřinou (třeba ze solárních článků) na zemi.

Úloha IV.1 . . . zase jedna neořezaná

Čerstvě ořezaná tužka 6B má hrot tvaru kužele s poloměrem podstavy $r = 1$ mm a výškou $h = 5$ mm. Jak dlouhou čáru s ní dokážeme udělat, jestliže vzdálenost dvou grafitových vrstev je $d = 3,4$ Å a stopa tuhy obsahuje takovýchto vrstev v průměru $n = 100$?

Než začneme úlohu řešit, zavedeme dva předpoklady. První se týká držení tužky. Pokud bychom během psaní stále měnili sklon a rotaci tužky, mohli bychom využívat hran plošek, které na tuze vznikají, čímž bychom její stopu nedefinovaně prodloužili. Předpokládejme proto, že tužku držíme stále pod stejným úhlem, a sice kolmo k papíru. Kdyby byl sklon menší, nevyužili bychom při psaní celý objem čnicí tuhy a opět bychom se dostali do problémů při popisování otěrů zbylého objemu. Zadruhé budeme předpokládat, že se jedná o tuhu z čistého grafitu a jeho jednotlivé vrstvy jsou neporušené a rovnoběžné s rovinou papíru.³⁶

S těmito předpoklady dokážeme využít informace o vzdálenosti jednotlivých grafitových vrstev a jejich průměrném počtu ve stopě tuhy. Průměrný počet chápeme tak, že kolmý řez skutečnou stopou má stejný obsah jako řez stopou tloušťky nd . Je zřejmé, že délka stopy l je nepřímě úměrná tloušťce nd . Dále je určité přímo úměrná výšce hrotu h a přímě úměrnost mezi r a l již plyne z rozměrové analýzy. Délka čáry je tedy dána vztahem

$$l = c \frac{rh}{nd}, \quad (16)$$

kde c je zatím neznámá kladná konstanta, kterou musíme určit. Zkusme nejprve naivně předpokládat, že zkrácení hrotu je přímo úměrně aktuální šířce stopy. Potom má stopa půdorys rovnoramenného trojúhelníku a její objem je

$$V_1 = ndr l_1.$$

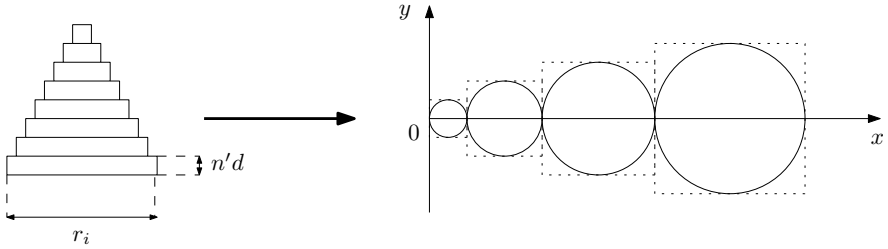
³⁵<http://www.ft.com/cms/s/0/4369c0d8-7dd9-11e3-95dd-00144feabdc0.html>

³⁶Ve skutečnosti se pro výrobu tužek používá směs rozemletých jíílů a grafitu, protože čistý grafit je příliš měkký.

Porovnáním s objemem hrotu³⁷ dostaneme

$$l_1 = \frac{\pi r h}{3 n d} \doteq 154 \text{ m},$$

což můžeme považovat za horní odhad délky čáry.



Obr. 10: Model otráení tuhy.

Nyní použijme model znázorněný na obrázku 10, v němž se hrot tužky skládá z disků o poloměru r_i a tloušťce $n'd$. Kužel takto aproximovat můžeme, neboť $n'd \ll h$. Nová veličina n' označuje počet vrstev v jednom disku, zřejmě $n' > n$, protože ve stopě se vrstvy z disků musí „rozprostřít do mezer“. Délku čáry můžeme zapsat pomocí sumy jako

$$l_2 = 2 \sum_{i=1}^N r_i, \tag{17}$$

kde N je počet disků. Ten je dán vztahem

$$N = \frac{h}{n'd}. \tag{18}$$

Dále můžeme vyjádřit

$$r_i = \frac{i}{N} r \tag{19}$$

a dosazením (18) a (19) do (17) získáme

$$l_2 = \frac{r h}{n'd}. \tag{20}$$

Při pohledu na (20) a (16) vidíme, že jsme na dobré cestě. Zbývá určit $c = n/n'$. Platí

$$\frac{n}{n'} = \frac{S'}{S},$$

³⁷Pro zajímavost – při dané tloušťce stopy čáry pokryjeme tímto objemem asi 2,5 stran formátu A4.

kde S' je obsah disku a S obsah čtverce, kterému je disk vepsaný – viz tečkové čtverce v 10. Potom

$$\frac{n}{n'} = \frac{S'}{S} = \frac{\pi r_i^2}{4r_i^2} = \frac{\pi}{4}. \quad (21)$$

Čtverce jsou aproximací lichoběžníků vzniklých při kreslení společných tečen disků, neboť pro $i \gg 1$ platí

$$\frac{S'}{S_{\text{lich}}} \approx \frac{\frac{\pi}{2}(r_i^2 + r_{i+1}^2)}{(r_i + r_{i+1}) \frac{2r_i + 2r_{i+1}}{2}} = \frac{\pi}{2} \frac{r_i^2 + r_{i+1}^2}{(r_i + r_{i+1})^2} \approx \frac{\pi}{4}.$$

Dosažením za n' z (21) do (20) dostaneme

$$l_2 = \frac{\pi r h}{4 n d} \doteq 115 \text{ m}.$$

Podle očekávání vychází $l_2 < l_1$, jelikož se stopa ze začátku rozšiřuje rychleji, než jsme předpokládali v prvním případě.

Úloha IV.2 ... zkumavky

Zkumavky o objemu 3 ml a 5 ml jsou spojeny krátkou tenkou trubičkou, v níž je pórovitá tepelně nevodivá přepážka, která umožňuje dosažení tlakové rovnováhy v systému. Obě zkumavky původně obsahují kyslík při tlaku 101,25 kPa a teplotě 20 °C. První zkumavku (3 ml) ponoříme do nádoby s rovnovážnou soustavou ledu a vody a druhou (5 ml) do nádoby s párou. Jaký bude tlak v soustavě obou zkumavek po dosáhnutí mechanické rovnováhy? Jakého tlaku by se dosáhlo, pokud by ve zkumavkách byl za stejných podmínek dusík místo kyslíku?

Před ponořením do příslušné nádoby má první zkumavka objem $V_1 = 3 \text{ ml}$, tlak v ní je $p_0 = 101\,250 \text{ Pa}$, teplota v ní je $T_0 = 293,15 \text{ K}$ a obsahuje n_1 molů kyslíku. Druhá zkumavka má objem $V_2 = 5 \text{ ml}$, stejný tlak a teplotu a $n - n_1$ molů kyslíku, neboť celkově je v soustavě n molů kyslíku.

Pro obě zkumavky si můžeme napsat stavové rovnice ideálního plynu (kyslík považujeme za ideální plyn). Pro první zkumavku platí $p_0 V_1 = n_1 R T_0$, z čehož lze vyjádřit

$$n_1 = \frac{p_0 V_1}{R T_0},$$

pro druhou zkumavku platí obdobný vztah $p_0 V_2 = (n - n_1) R T_0$, zde pouze počet molů vyjadřujeme jako výše uvedený rozdíl mezi celkovým počtem molů a počtem molů v první zkumavce. Po úpravě a dosažení za n_1 můžeme psát

$$n = \frac{p_0 (V_2 + V_1)}{R T_0}.$$

Po ponoření do nádoby s ledem bude v první zkumavce teplota $T_1 = 273,15 \text{ K}$, druhá zkumavka ponořená do nádoby s párou bude mít teplotu $T_2 = 373,15 \text{ K}$ a po

vyrovnání tlaků bude v obou zkumavkách tlak p_1 .³⁸ Aby se tlaky mohly vyrovnat, musí dojít ke změně rozložení látkového množství v jednotlivých zkumavkách, což umožňuje pórovitá přepážka. V první zkumavce tedy bude n'_1 molů a v druhé $n - n'_1$ molů, protože celkový počet molů n zůstane stejný. Objemy obou zkumavek zůstávají stejné.

Napišeme si stavovou rovnici pro první zkumavku za této situace $p_1 V_1 = n'_1 R T_1$, z ní jsme znovu schopni vyjádřit vztah pro to, jaký je v ní počet molů

$$n'_1 = \frac{p_1 V_1}{R T_1},$$

stejně tak si lze napsat stavovou rovnici pro druhou zkumavku $p_1 V_2 = (n - n'_1) R T_2$ a vyjádřit z ní vztah pro celkový počet molů (při dosazení za n'_1)

$$n = \frac{p_1 V_2}{R T_2} + \frac{p_1 V_1}{R T_1}.$$

Z obou situací jsme získali výrazy pro celkové látkové množství plynu n , které je stále stejné, takže pokud tyto výrazy spojíme a upravíme, jsme schopni z nich vyjádřit, čemu se rovná tlak p_1 a dopočítat jeho číselnou hodnotu.

$$p_1 = \frac{p_0 T_1 T_2 (V_2 + V_1)}{T_0 (T_1 V_2 + T_2 V_1)} \doteq 113\,320 \text{ Pa}.$$

Po dosažení mechanické rovnováhy bude v obou zkumavkách tlak asi 113 320 Pa. Pro výpočty jsme používali stavovou rovnici pro ideální plyn, takže na výsledný tlak nemá vliv, zda byl ve zkumavkách kyslík, nebo dusík, protože obojí bychom považovali za ideální plyn.

Nicméně při výpočtech s reálným plynem by pravděpodobně rozdíl mezi tlakem ve zkumavkách při použití kyslíku nebo dusíku nebyly zanedbatelné. Pro výpočet použijeme van der Waalsovou rovnici³⁹

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT.$$

Jedná se o kubickou rovnici v proměnné n . Při požadované přesnosti nelze tuto rovnici aproximovat tak, aby byla úloha snadno analyticky řešitelná. Budeme ji proto řešit jako soustavu rovnic v proměnných n , n'_1 a p_1 . Koeficienty pro dusík a kyslík jsou v jednotkách SI $a_N = 0,1427 \text{ m}^3 \cdot \text{Pa} \cdot \text{mol}^{-2}$, $b_N = 3,913 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$, $a_O = 0,1396 \text{ m}^3 \cdot \text{Pa} \cdot \text{mol}^{-2}$, $b_O = 3,183 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$. Tlak po ustanovení mechanické rovnováhy má hodnotu $p_{N1} \doteq 112\,220 \text{ Pa}$ pro dusík a $p_{O1} \doteq 114\,700 \text{ Pa}$ pro kyslík. Při použití dusíku by tedy výsledný tlak byl o 2 480 Pa menší.

³⁸Teplota ledu a páry není zadána, předpokládáme tedy, že jsou rovny teplotě tání ledu a teplotě varu vody, tlak v okolí uvažujeme normální $p = 101,325 \text{ kPa}$.

³⁹Koeficienty a , b pro molekulární kyslík a dusík najdeme na [http://en.wikipedia.org/wiki/Van_der_Waals_constants_\(data_page\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Van_der_Waals_constants_(data_page)).

Úloha IV.3 . . . racek

Naproti sobě plují dvě lodě, první rychlostí $u_1 = 4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a druhá rychlostí $u_2 = 6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Ve chvíli, kdy jsou od sebe vzdáleny $s_0 = 50 \text{ km}$, vzlétne z první lodi racek a letí směrem ke druhé. Letí proti větru, jeho rychlost je $v_1 = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Když dorazí k druhé lodi, obrátí se a letí zpět, nyní po větru rychlostí $v_2 = 30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Takto létá tak dlouho, dokud se obě lodi nesetkají. Jakou celkovou dráhu racek urazí?

Úlohu vyřešíme v soustavě první lodi (rackovy „domovské“ lodi). Z pohledu této soustavy se druhá loď přibližuje rychlostí o velikosti $w = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, racek vylétává rychlostí o velikosti $w_1 = 16 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a vrací se rychlostí o velikosti $w_2 = 34 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Jelikož racek letí přesně polovinu své cesty rychlostí w_1 a polovinu rychlostí w_2 , je jeho průměrná rychlost na všech úsecích „tam a zpět“ stejná a rovna

$$\bar{w} = 2 \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2}.$$

Jelikož víme, že druhá loď dorazí k první za čas $t = s_0/w$, můžeme (z definice průměrné rychlosti) pro celkovou dráhu, kterou racek ve vztažné soustavě spojené s lodí urazí, psát

$$x_{\text{loď}} = \bar{w}t = 2 \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2} \frac{s_0}{w}.$$

Číselně pak máme $x_{\text{loď}} \doteq 109 \text{ km}$. Ač se zdá, že jsme v cíli, opravdu nesmíme na tomto místě zapomenout, že se pořád nacházíme v soustavě první lodi, ve které racek nalétá jinou vzdálenost než v soustavě, ve které máme zadané původní rychlosti.⁴⁰ Vzdálenost, kterou racek uletěl vzhledem k původní soustavě, potom zřejmě bude rovna $x = x_{\text{loď}} + u_1 (T_1 - T_2)$, kde T_2 je celkový čas, po který se racek k první lodi přibližuje a T_1 je celkový čas, po který se racek od první lodi vzdaluje. Zároveň ale víme, že $T_1 + T_2 = s_0/w$ a $T_1/T_2 = w_2/w_1$, takže můžeme přímočaře vyjádřit $T_{1,2}$ a psát

$$x = \left(2 \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2} + u_1 \frac{w_2 - w_1}{w_1 + w_2} \right) \frac{s_0}{w}.$$

Číselně pak máme $x = 116 \text{ km}$.

Úloha IV.4 . . . vybitý puding

Modelů atomu vodíku bylo nespočetné množství a mnohé z nich už jsou překonané, ale my máme rádi puding a tak se vrátíme k tzv. pudinkovému modelu vodíku. Atom tvoří koule o poloměru R s rovnoměrně rozloženým kladným nábojem („puding“), v kterém se nachází jeden elektron („rozinka“). Samozřejmě nejlépe je elektronu v místě s nejnižší energií, tak sedí ve středu pudingu. Celkově je soustava elektricky neutrální. Jakou energii musíme dodat elektronu, abychom ho dostali do nekonečna? Jaký by musel být poloměr pudingu, aby se tato energie

⁴⁰Triviálně, i kdyby racek v soustavě lodi seděl na místě, z hlediska původní soustavy se bude pohybovat rychlostí u_1 .

rovnala Rydbergově energii (excitační energie elektronu v atomu vodíku)? Poloměr vyjádřete v násobcích Bohrova poloměru.

Najprv si určíme hustotu elektrického náboja ρ kladne nabitej gule s polomerom R . Náboj elektrónu je $-e$ a keďže je atóm celkovo neutrálny, tak kladne nabitá guľa má náboj $+e$. Pre homogénne rozloženie náboja v guli je hustota v nej všade rovnaká. Dá sa teda vypočítat ako podiel celkového náboja e a objemu gule V

$$\rho = \frac{e}{V} = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3e}{4\pi R^3}.$$

Budeme chcieť vypočítat elektrické pole, ktoré vytvára kladná časť atómu (v jej poli sa bude elektrón pohybovať). Nato nám bude užitočná *Gaussova veta*. Tá vraví, že ak vezmeme ľubovoľnú uzavretú plochu⁴¹ S , tak tok elektrickej intenzity⁴² Φ plochou S je úmerný náboju Q_{in} vymedzenému plochou S , tj.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0}.$$

Vo vzťahu ešte vystupuje konštanta ϵ_0 , aby sedeli jednotky (naschvál si to môžete vyskúšať pre guľu a jeden bodový náboj v jej strede). Využijeme symetriu našej situácie a zvolíme za uzavretú plochu povrch gule $K(r)$ s polomerom r a so stredom v strede nabitej gule. Jednak zo symetrie vieme, že vektor elektrickej intenzity smeruje od stredu, teda je vždy kolmý na povrch gule (bude sa ľahko rátať skalárny súčin), a po druhé vieme, že jeho veľkosť je na povrchu gule rovnaká a označíme ju $E(r)$. Dostaneme tak

$$\oint_{K(r)} E(r) dS = \frac{Q_{\text{in}}(r)}{\epsilon_0}.$$

Veľkosť intenzity je v rámci integrácie konštanta, takže ju môžeme vybrať pred integrál. Zvyšný integrál je integrál povrchu gule, teda výsledkom integrálu je povrch gule $4\pi r^2$. Dostaneme tak

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{\text{in}}(r)}{\epsilon_0}.$$

Teraz si rozdelíme výber gule na dva prípady. Ak je polomer gule r väčší/rovný polomeru R alebo ak je polomer gule r menší/rovný polomeru R . V prvom prípade

⁴¹Uzavretá plocha v trojzmernom priestore znamená plocha, ktorá nemá hranicu, okraj. Napríklad povrch gule nemá hranicu, preto je to uzavretá plocha. Ale ak by sme povrch gule rozrezali rovinou na dva guľové vrchlíky, tak tieto vrchlíky majú hranicu – kružnicu v mieste rezu – a preto nie sú uzavreté plochy.

⁴²Tok vektorového poľa \mathbf{A} plochou je analógiou toku vody plochou, kde vektormi sú vektory rýchlosti. Tok cez celú plochu sa získa spočítaním/integráciou malých tokov $d\Phi$ cez jednotlivé malé plochy dS . Ak vektor \mathbf{A} smeruje kolmo na plochu dS , tak je veľkosť toku $d\Phi = A dS$. Ak vektor \mathbf{A} smeruje v rovine plochy dS , tak cez plochu nič "netečie" a tok je nulový. Tok teda závisí od orientácie vektora \mathbf{A} a plochy. Preto sa definuje *vektor plochy* $d\mathbf{S}$, ktorý má veľkosť dS a má smer normály plochy $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$. Tok je potom skalárny súčin vektorov \mathbf{A} a $d\mathbf{S}$, $d\Phi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$.

je náboj vo vnútri gule polomeru r rovný celkovému náboju kladnej gule e . V druhom prípade je náboj vo vnútri gule polomeru r rovný súčinu hustoty kladného náboja a objemu gule polomeru r . Dostaneme tak

$$Q_{\text{in}}(r) = \begin{cases} e, & r \geq R, \\ e \frac{r^3}{R^3}, & r \leq R. \end{cases}$$

A pre veľkosť elektrickej intenzity $E(r)$ dosadením dostaneme

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2}, & r \geq R, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{er}{R^3}, & r \leq R. \end{cases}$$

Všimnime si, že pre $r \geq R$ rovnomerne nabitá guľa vytvára rovnaké pole ako bodový náboj rovnakej veľkosti umiestnený v jej strede. Vo vnútri gule elektrická intenzita lineárne rastie z nuly v strede po maximum na povrchu gule.

A teraz vypočítame energiu/prácu W potrebnú na prenesenie náboja zo stredu gule do nekonečna. Na elektrón pôsobí sila veľkosti $F(r) = eE(r)$ smerujúca do stredu gule. Najprv ukážeme surový postup integrovania. Práca je

$$W = \int_0^{+\infty} F(r) dr.$$

Rozdelíme si integrál na dva integrály na dvoch intervaloch

$$W = \int_0^R F(r) dr + \int_R^{+\infty} F(r) dr,$$

dosadíme vzťah pre silu a elektrickú intenzitu

$$W = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 r}{R^3} dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} dr,$$

vyberieme konštanty pred zátvorku a zintegrujeme funkcie

$$W = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^R + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{+\infty},$$

dosadíme medze a dostaneme výsledok

$$W = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Teraz ukážeme postup bez integrovania (integrovanie za nás urobili ľudia pred nami). Prácu na presun do nekonečna môžeme rozdeliť na prácu zo stredu na povrch W_1 a z povrchu do nekonečna W_2 .

V prvom prípade pôsobiaca sila závisí lineárne od vzdialenosti od stredu, čo nám pripomína pružinu s určitou tuhosťou k

$$F(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r,$$

$$k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Vieme, že potenciálna energia pružiny je⁴³ $E_p = kx^2/2$. Z toho vieme zistiť prácu W_1 ako rozdiel potenciálnych energií v R a 0:

$$W_1 = E_p(R) - E_p(0) = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} R^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

V druhom prípade, ako sme už spomenuli, sa pole správa ako pole bodového náboja. Teda prácu W_2 vypočítame z rozdielu potenciálnych energií bodových nábojov v nekonečnej vzdialenosti a vo vzdialenosti R . Potenciálna energia bodových nábojov opačnej polaroty je

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}.$$

Potom práca W_2 je

$$W_2 = E_p(+\infty) - E_p(R) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Dokopy práca W je

$$W = W_1 + W_2 = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Teraz túto energiu položíme rovnú Rydbergovej energii (energia základného stavu atómu vodíka, ionizačná energia elektrónu), ktorej vzťah si môžeme nájsť/odvodiť:

$$\frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 R} = W = \frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2}.$$

Vyjadríme si polomer R

$$R = \frac{3h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2},$$

porovnáme so vzťahom pre Bohrov polomer R_B (polomer dráhy elektrónu v základnom stave v Bohrovom modeli, vzdialenosť od jadra vodíka v základnom stave s najväčšou elektrónovou hustotou)

$$R_B = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2},$$

a dostaneme

$$R = 3R_B.$$

Úloha IV.5 ... kulky

O kolik se zvýší teplota stejných ocelových kulek po jejich vzájemné srážce? Pohybují se stejným směrem rychlostmi $v_1 = 0,7c$ a $v_2 = 0,9c$, kde c je rychlost světla. Uvažujte konstantní tepelnou kapacitu a uvažujte, že kulky jsou stále v pevném skupenství.

⁴³Veličina r by v pružine prislúchala výchylke x .

Vieme, že pri zrážke sa zachová energia a hybnosť, len ich obe musíme chápať relativisticky. V relativite sa používa takzvaný γ faktor popisujúci „relativistickosť“ častice s rýchlosťou v . Je definovaný ako

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Energia častice s pokojovou hmotnosťou⁴⁴ m je potom γmc^2 . Jej hybnosť je jej klasická hybnosť vynásobená γ , teda hybnosť s relativistickou hmotnosťou. Faktory γ dvoch častíc očísľujeme dolnými indexmi ako zo zadania a smelo môžeme písať zákony zachovania. Nesmieme zabudnúť, že výsledná častica môže mať všeobecne hmotnosť M , jej rýchlosť označíme v_0

$$\gamma_0 M c^2 = E_1 + E_2 = \gamma_1 m c^2 + \gamma_2 m c^2 = m(\gamma_1 + \gamma_2) c^2.$$

Častice letia rovnakým smerom. Príslušná zložka hybnosti má teda rovnaké znamienko

$$\gamma_0 M v_0 = p_1 + p_2 = \gamma_1 m v_1 + \gamma_2 m v_2.$$

Z týchto dvoch rovníc môžeme napríklad jednoducho vyjadriť

$$v_0 = \frac{\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2}{\gamma_1 + \gamma_2}.$$

Odtiaľ ľahko spočítame

$$M = m \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_0} = m(\gamma_1 + \gamma_2) \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2} = m \sqrt{(\gamma_1 + \gamma_2)^2 - (\gamma_1 v_1/c + \gamma_2 v_2/c)^2}$$

a ak roznásobíme výraz pod odmocninou a využijeme definíciu γ , dostaneme

$$M = m \sqrt{2 + 2\gamma_1 \gamma_2 (1 - v_1 v_2/c^2)}.$$

Po dosadení by sme dostali

$$\frac{M}{m} = \sqrt{2 + \frac{74}{\sqrt{969}}} \doteq 2,092.$$

Vidíme, že výsledná pokojová hmotnosť bude väčšia ako súčet pokojových hmotností pôvodných gúľ — asi o 5 %. Teraz sa musíme zamyslieť, čo to v skutočnosti znamená.

To, že sa spojená guľa zohreje je zrejme už z našich klasických predstáv. Pri klasickej zrážke (pomalých) gúľ väčšinou zanedbávame energiu, ktorá unikne v podobne zvukovej energie, rovnako urobme aj tu (aj keď by to bola poriadna rana). Pri relativistických rýchlostiach nastáva ešte ďalšia možnosť, a to rozpad alebo fúzia jadier. Túto možnosť tiež nebudeme uvažovať. Takýto proces totiž nevieme dobre popísať (unikalo by podstatné množstvo energie).

⁴⁴Značiť relativistickú hmotnosť, teda γm , nejako špeciálne vedie iba k zmätkom.

Ak teda zrazíme rovnaké gule, každá s N atómami, výsledná guľa bude mať presne $2N$ atómov — tu samozrejme nie sú žiadne relativistické korekcie. Presnejšie povedané, bude to pravda práve, ak neuvažujeme jadrové reakcie. Každý z týchto atómov má samozrejme rovnakú pokojovú hmotnosť ako tie v pôvodnej guli, pretože pokojová hmotnosť je vlastnosť konkrétneho izotopu. To sa ale nedá povedať o zotrvačnosti týchto atómov. Práve pri zrážke sa rapídne zrýchlia. Toto zrýchlenie teda spôsobí zmenu nameranej hmotnosti spojeného telesa.⁴⁵

Zrýchlenie pohybu častíc sme už ale videli aj v klasickej fyzike, tam ho interpretujeme práve ako ohrievanie. Dodané teplo je teda práve rovné pridanej energii častíc, ktorá je jednoducho $(M - 2m)c^2$. Už len potrebujeme tepelnú kapacitu ocele⁴⁶ $c_m = 466 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ a získanú energiu na kilogram

$$u = \frac{(M - 2m)c^2}{2m} = \left(\frac{1}{2} \frac{M}{m} - 1\right) c^2 = \left(\frac{\sqrt{2 + \frac{74}{\sqrt{969}}}}{2} - 1\right) c^2 \doteq 4,1 \text{ PJ}\cdot\text{kg}^{-1}.$$

Nakoniec len podelíme energetický prírastok kapacitou a získame

$$\Delta T = \frac{u}{c_m} \doteq 8,9 \text{ TK}.$$

Takýto výsledok si zaslúži krátky komentár, terakelviny nestretávame každý deň. Ukazuje to na naše predpoklady, ktoré sú veľmi nefyzikálne: aj keby pri zrážke nastala jadrová reakcia, každopádne by sme namiesto pevného objektu pozorovali oblak častíc rozlietajúci sa na všetky strany.

Úloha IV.P . . . to pravé gravitační zrychlení

Faleš chtěl v Praze (V Holešovičkách 2 v přízemí) určit hodnotu gravitačního zrychlení z experimentu, kdy pouštěl kulatý míček z výšky pár metrů na Zemi. Rozmyslete si, jaké korekce musel při zpracování měření zahrnout. Poté navrhnete vlastní experiment na stanovení gravitačního zrychlení a diskutujte jeho přesnost.

Nejdůležitější chyby, které musí vzít Faleš v úvahu, jsou chyby způsobené neideálností jeho přístrojů a neideálností jeho samotného. Jeho stopky totiž nedokáží přesně změřit čas a přesto, že má rychlost reakcí jako buddhistický mnich, nedokáže přesně určit, kdy míček doopravdy spadl. Posudte sami, zda byste dokázali vypnout stopky například do tisíciny sekundy po pádu. Obvykle můžeme uvažovat, že stopky jsme schopni zastavit s přesností na 0,2s, což je, jak ještě uvidíme, pro zahrnutí korekcí docela dlouhý časový úsek.

⁴⁵Teraz by ste sa mali spýtať otázku, prečo meriame relativistickú a nie pokojovú hmotnosť atómov v látke? Odpoveď je v spôsobe merania hmotnosti: väčšinou položíme teleso na váhu a meriame tlak, ktorým na ňu pôsobí. Ak sa teda zvýši relativistická hmotnosť častíc, rovnako sa zvýši aj ich hybnosť, a teda aj hybnosť, ktorú budú predať váhe. Dobrá otázka je, ako do toho vstupuje gravitácia. Odpoveď je, že gravitácia pôsobí na celkovú energiu, práve vďaka čomu sa teleso zohriatím neodrazí od svojej podložky.

⁴⁶http://en.wikipedia.org/wiki/Heat_capacity#Table_of_specific_heat_capacities

Musíme si nejprve uvědomit, co Faleš ve skutečnosti měří a co je to gravitační zrychlení. Gravitační zrychlení je zrychlení způsobené gravitací Země na jejím povrchu. Když ale měříme pád míčku, hrají roli i jiné efekty než hmota planety. Nejdůležitější je odstředivá síla na povrchu Země. Kombinaci odstředivého a gravitačního zrychlení se říká tíhové zrychlení. Faleš tedy změří zrychlení tíhové.

Vypočteme nyní vliv rotace naší planety. Země se otočí 1,00krát za 24 hodin (skutečná hodnota není přesně 1,00, nýbrž spíše 1,0027krát, nám ovšem stačí takto zaokrouhlená hodnota), což odpovídá úhlové rychlosti $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Souřadnice MFF UK V Holešovičkách jsou zhruba $50^{\circ}6' S$, $14^{\circ}26' V$, my ovšem budeme potřebovat pouze zeměpisnou šířku. Dále bychom potřebovali co nejpřesněji určit vzdálenost tohoto místa od středu Země. Zemi budeme považovat za homogenní kouli (přestože ve skutečnosti se jedná o nehomogenní elipsoid) a vzhledem k tomu, jak náročné by bylo zahrnout do úvah veškeré nehomogenity, smíříme se s tím, že korekce nebude úplně přesná. Vzdálenost od středu jsme schopni určit s přesností zhruba na 10 km, což při uvažovaném poloměru Země 6378 km není ani setina a vzhledem k tomu, že korekce bude také maximálně v řádu setin, tak nám tato nepřesnost (která by ve výsledku byla jedna desetitisícina) nebude vadit. Pro vypočtení odstředivého zrychlení potřebujeme určit vzdálenost od osy otáčení Země, což, pokud budeme zeměpisnou šířku brát jako úhel φ , bude $R_Z \cos \varphi$. Ještě zbývá udělat průmět tíhového zrychlení do směru gravitace, jelikož takto vypočtené zrychlení bude mířit směrem od osy rotace. Pro průmět musíme hodnotu opět vynásobit členem $\cos \varphi$. Odstředivé zrychlení nyní můžeme tedy vypočítat jako

$$a_{\text{od}} = \omega^2 (R_Z \cos^2 \varphi) = 0,0140 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Aby tíhové zrychlení přepočítal na gravitační, musí tedy připočíst tuto hodnotu a_{od} .

Dále musí samozřejmě uvažovat odpor prostředí. Ač to často pro zjednodušení uvažujeme, nepohybujeme se ve vakuu. Proti míčku působí odpor vzduchu. Odpor prostředí lze určit pomocí Newtonova vztahu. V tomto vztahu se celkem rozumně očekává, že pro překonání odporové síly musí těleso vykonat stejnou práci, jako je kinetická energie vzduchu, kterou vzduch získal od prolétajícího tělesa. Odporovou sílu tedy určíme ze vzorce

$$F_{\text{odp}} = C \frac{1}{2} \rho v^2 S,$$

kde C je součinitel odporu (pro kouli je roven 0,5) a S obsah průřezu kolmého na směr pádu. Pro přesné vyřešení musíme vyřešit pohybovou rovnici

$$ma = -mg + C \frac{1}{2} \rho v^2 S,$$

jejíž řešení s počátečními podmínkami $v(0) = 0$, $y(0) = h$ je

$$y(t) = h - \frac{v_{\infty}^2}{g} \ln \left(\cosh \left(\frac{gt}{v_{\infty}} \right) \right), \quad (22)$$

kde jsme substituovali za limitní rychlost

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho C S}}.$$

Toto je již ovšem poměrně náročná matematika.

My známe dobu pádu, tedy čas t_0 , pro který platí $y(t_0) = 0$. Z rovnice (22) pak dokážeme po vrácení substituce vyjádřit zrychlení

$$g = \frac{2m}{\rho C S t_0^2} \operatorname{argcosh}^2 \left(e^{(h\rho C S)/(2m)} \right).$$

Při tíhovém zrychlení $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ by míček o hmotnosti 100 g a průměru 5 cm při hustotě vzduchu $1,29 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ padal ze dvou metrů 0,6399 s. Kdyby gravitační zrychlení počítal se zanedbáním odporu vzduchu podle vzorce

$$g = \frac{2h}{t_0^2},$$

získal by výsledek $9,769 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, což se celkem znatelně liší od skutečného v uvažované situaci. Pokud tedy Faleš chce počítat s přesností na více než dvě desetinná místa, měl by počítat i s odporem vzduchu.

Přítomnost atmosféry nám přináší i další problémy – například působící vztlaková síla. Ta bude po celou dobu konstantní a dle Archimédova zákona je rovna tíze kapaliny tělesem vytlačené, tedy

$$F_{vz} = V \rho g.$$

Pohybová rovnice přejde na tvar

$$ma = -mg \left(1 - \frac{V \rho}{m} \right) + C \frac{1}{2} \rho v^2 S.$$

To znamená, že výsledný vzorec pro g je potřeba vydělit hodnotou $1 - V \rho / m$. Pro představu je toto pro náš míček zhruba 0,999. Uvědomme si ale, že pokud zvážíme míček na vzduchu, bude samotné vážení zatíženo chybou vážení na vzduchu (kilo peří bude na váhách „lehčí“ než kilo železa). Ve vahách je vždy malé vlastní závaží – etalon. Jelikož i na etalon působí vztlaková síla, naměřená hmotnost je závislá na hustotě tohoto etalonu. Pro skutečnou hmotnost m poté platí vzorec:

$$m = \frac{1 - \frac{\rho_a}{\rho_c}}{1 - \frac{\rho_a}{\rho}} W,$$

kde ρ je hustota našeho závaží, ρ_a je hustota vzduchu a ρ_c je hustota etalonu. Předpokládejme ale, že Faleš si míček zvážil v některé z laboratoří MFF UK a zná hmotnost s vysokou přesností (mohl ho například změřit pod vývěvou ve vakuu).

Zanedbatelný vliv může mít i Slunce, Měsíc a ostatní planety Sluneční soustavy, ale tento vliv je opravdu pouze zanedbatelný. Koho by výpočet této korekce zajímal, může se podívat na vzorové řešení úlohy III.1 z 26. ročníku.

UVědomme si také, že gravitační zrychlení se mění z výškou, ve které ho měříme. Pro ilustraci si spočítáme, jak rychle se gravitační zrychlení mění dle Newtonova gravitačního zákona. Zrychlení dle Newtonova gravitačního zákona bude

$$F_G = G \frac{M}{R^2},$$

kde $G \approx 6,67384 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ a R je vzdálenost od středu planety (tento vzorec můžeme použít pouze nad povrchem planety, nikoliv v jejím nitru). Pokud budeme počítat s poloměrem Země 6 378 km, tak nám je asi hned zřejmé, že 1 nebo 2 metry nebudou hrát výrazný rozdíl, ten bude zhruba $3 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Celkově tedy můžeme říci, že zdaleka největší vliv mají na měření gravitačního zrychlení odporové síly působící na padající míček. Pak následují korekce z tíhového zrychlení na zrychlení gravitační. Ostatní vlivy jsou zanedbatelné.

Klasickým experimentem pro měření tíhového zrychlení je měření periody kyvadla. Mějme závaží kmitající s malými výchylkami a periodou T . Pro tuto periodu platí vztah $T = 2\pi\sqrt{J/(mgR)}$, kde J je moment setrvačnosti tělesa vůči ose otáčení, R je vzdálenost těžiště od osy otáčení a m je hmotnost tělesa.

Při výpočtu momentu setrvačnosti ovšem může být zanesena relativně velká chyba. Proto se například v praxi u nás na Matfyzu měří tíhové zrychlení pomocí takzvaného reverzního kyvadla. Pro objasnění potřebujeme zavést veličinu $l_r = J/(mR)$ a budeme jí říkat *redukovaná délka kyvadla*. Po zavedení této veličiny můžeme psát

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}.$$

Redukovanou délku můžeme ovšem určit i bez znalosti momentu setrvačnosti kyvadla. V případě, že těleso kmitá kolem dvou rovnoběžných os se stejnou periodou, tak vzdálenost těchto dvou os je právě naše redukovaná délka. Tíhové zrychlení bychom poté mohli doložit ze vzorce

$$g = l_r \frac{4\pi^2}{T^2}.$$

Jak takové reverzní kyvadlo vypadá si můžete prohlédnout například na videu.⁴⁷ Nejprve se kyvadlo otáčí kolem jedné osy a poté je otočeno. Čočky na kyvadle jsou následně nastaveny tak, aby perioda kmitů kolem obou os byla stejná.

Za běžných podmínek jsme schopni redukovanou délku kyvadla určit s přesností zhruba $\pm 0,1$ cm. Pokud bude redukovaná délka například 0,5 m, je tedy chyba 0,2 %. Dobu kmitu jsme schopni určit velmi přesně, použijeme-li světelnou závorku pro zapnutí a vypnutí stopky. Světelná závorka je mechanismus, který kontroluje, zda jde do detektoru světlo. Světlo umístíme tak, aby svítilo do detektoru skrz rovnovážnou polohu kyvadla. Ve chvíli, kdy kyvadlo projde touto rovnovážnou polohou, dráha paprsků jdoucích do detektoru je přerušena a světelná závorka spustí stopky. Počkáme na deset period kyvadla a ve chvíli, kdy kyvadlo znovu projde rovnovážnou polohou, stopky se zastaví. Je důležité, že čas měříme v rovnovážné poloze.

⁴⁷http://youtu.be/6wFIxz2p_Cs

V rovnovážné poloze má totiž kyvadlo největší rychlost. Tím pádem dokážeme velmi přesně vždy určit, že je kyvadlo ve stejné poloze. Kdybychom chtěli měřit od okamžiku, kdy má kyvadlo největší výchylku, bude kyvadlo bránit paprskům v průchodu po mnohem delší čas. Bude tedy možné, že se stopky budou spouštět v různých polohách. Světelná závora čas změří poměrně přesně, ale kdybychom měřili ručně, bylo by opravdu obtížné určit, zda se kyvadlo opravdu nachází v té samé poloze, ve které jsme stopky spustili.

Pokud měříme veličinu g závislou na veličinách l_r a T , určíme celkovou chybu měření podle vzorce

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l_r} \sigma_{l_r}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} \sigma_T\right)^2},$$

kde σ vždy značí chybu veličiny, která je uvedena v dolním indexu. Po vypočtení získáme vzorec

$$\sigma = \sqrt{\frac{16\pi^4}{T^4} \sigma_{l_r}^2 + l_r^2 \frac{64\pi^4}{T^6} \sigma_T^2}.$$

S pomocí světelné závory budeme schopni určit T s přesností zhruba na tisícinu sekundy. Doba kmitu bude zhruba 1,5 s. Dosadíme tedy do vzorce pro výpočet chyby a dostaneme

$$\sigma \doteq 0,02 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2},$$

přičemž pouze minimum chyby je způsobeno nepřesností určení času (pokud bychom čas měřili úplně přesně, byla by chyba $0,017 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$). Vidíme, že největší problém nám tvoří nepřesnost způsobená určením l_r . Pokud bychom měřili čas ručně, můžeme očekávat, že stopky zastavíme s přesností na jednu desetinu sekundy (0,1 s). Pokud změříme 10 period, rozloží se chyba mezi jednotlivé periody a jednu periodu tedy budeme schopni určit s přesností 0,01 s. V tuto chvíli již přestane být chyba způsobená nepřesností měření času zanedbatelná – celkově budeme schopni g určit s přesností $\pm 0,12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Úloha V.1 ... natlakovaná žirafa

Porovnejte krevní tlak v hlavě dospělé žirafy a dospělého člověka. Systolický tlak na úrovni srdce je u člověka $p_{h1} = 120 \text{ mmHg}$ a u žirafy $p_{g1} = 280 \text{ mmHg}$, hustota krve obou živočichů je $\rho = 1050 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Uvažujte pouze případ, kdy člověk i žirafa stojí. Rychlost proudění krve v těle považujte za konstantní.

Krevní soustava savců je velmi hustě rozvětvená, nicméně pro zjednodušení budeme předpokládat, že celým tělem člověka/žirafy vede pouze jedna velká céva. Na základě Bernoulliho rovnice by pro tlak u srdce a v hlavě měl platit vztah⁴⁸

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + h_1 \rho g = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + h_2 \rho g,$$

⁴⁸Ve skutečnosti bychom ještě měli zohlednit viskozitu krve, jejíž účinky jsou popsány Poiseuilleovým zákonem.

kde indexem 1 značíme veličiny příslušející srdci a indexem 2 značíme veličiny příslušející hlavě. Pro rozdíl tlaků mezi srdcem a hlavou máme díky předpokladu o konstantní velikosti rychlosti proudění (aneb $v_1 = v_2$)

$$p_1 - p_2 = \Delta p = (h_2 - h_1) \rho g = \Delta h \rho g.$$

Nyní potřebujeme odhadnout Δh . Výška dospělého muže je v průměru 180 cm, srdce je zhruba ve výšce 130 cm, takže $\Delta h_h = 50$ cm. Žiraf je několik různých druhů dosahujících výšek od 4 m do 6 m, vezmeme průměrnou hodnotu 5 m; srdce žirafy je zhruba v polovině její výšky, takže $\Delta h_g = 250$ cm. Ze znalosti hodnot $p_h = = 120$ mmHg $\doteq 16\,000$ Pa, $p_g = 280$ mmHg $\doteq 37\,300$ Pa ze zadání nyní můžeme určit tlak v hlavě člověka

$$p_{h,2} = p_{h,1} - \Delta h_h \rho g = 10\,850 \text{ Pa}$$

a tlak v hlavě žirafy

$$p_{g,2} = p_{g,1} - \Delta h_g \rho g = 11\,700 \text{ Pa}.$$

Vzhledem k tomu, že jsme Δh pouze hrubě odhadovali, můžeme obě hodnoty $p_{h,2}$, $p_{g,2}$ považovat za přibližně stejné (liší se o méně než 10 %). To znamená, že srdeční tlak žirafy dobře kompenzuje výšku jejího krku. Můžete si pro zajímavost sami zkusit dopočítat, zda to platí i pro jiné živočichy.

Úloha V.2 . . . uranová hvězda

Představme si, že ve hvězdách neprobíhá termojaderná fúze, nýbrž štěpná jaderná reakce. Odhadněte, jak dlouho by taková hvězda dokázala vyzařovat, jestliže na počátku svého životního cyklu sestává pouze z uranu 235, její hmotnost i zářivý výkon jsou přibližně konstantní a odpovídají současným hodnotám pro Slunce.

Uran 235 je nuklid, který podléhá štěpné reakci, přičemž energie, která se uvolní štěpením jednoho atomu ^{235}U , činí asi⁴⁹ $E_a = 200$ MeV. Produkty této reakce jsou sice také nestabilní, ale jejich energetický příspěvek by byl malý a lze jej zanedbat. Hmotnost hvězdy M odpovídá hmotnosti Slunce, takže má hmotnost⁵⁰ $M = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg. Pokud tuto hmotnost vydělíme hmotností jednoho atomu ^{235}U , která je $m_a = 235m_u = 3,9 \cdot 10^{-25}$ kg, kde m_u je atomová hmotnostní konstanta, pak zjistíme, kolik atomů ^{235}U hvězdu tvoří, a tím, že celková energie E , která by se z takto hmotné hvězdy mohla štěpením uranu uvolnit, je

$$E = \frac{M}{m_a} E_a = 1,6 \cdot 10^{44} \text{ J}.$$

Předpokládáme-li, že má hvězda přibližně konstantní zářivý výkon $L = 3,8 \cdot 10^{26}$ W odpovídající Slunci,⁵¹ pak můžeme určit dobu života hvězdy, tedy dobu, po kterou

⁴⁹<http://cs.wikipedia.org/wiki/Uran-235>

⁵⁰<http://cs.wikipedia.org/wiki/Slunce>

⁵¹Tato informace v zadání nám ulehčuje práci, neboť s určitou aproximací bychom měli být schopni ze známých údajů zářivý výkon uranové hvězdy dopočítat.

bude vyzařovat, jako podíl celkové energie, která se uvolní štěpením uranu, a jejího zářivého výkonu.

$$t = \frac{E}{L} = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ let.}$$

Naše hypotetická uranová hvězda by zářila asi 14 miliard let, což je doba řádově srovnatelná se skutečnou délkou života hvězd (například pro Slunce je odhadovaná délka života kolem 10 miliard let). Nebylo zjištěno, že by existovaly hvězdy, ve kterých by probíhaly štěpné reakce, a nepravděpodobnost tohoto jevu podporuje extrémní vzácnost výskytu prvků těžších než železo ve hvězdách (fúze prvků může probíhat při výbuchu supernovy, a tyto prvky se pak mohou dostat do nové hvězdy při jejím tvoření). Asi nejzásadnějším problémem takovéto konkrétní uranové hvězdy by bylo, že množství uranu v ní by bylo nadkritické, takže by velice rychle vybuchla.

Úloha V.3 . . . ta jemná nádoba

Mějme válcovou nádobu, jež zaujímá objem $V = 11$. Nádoba je uzavřena vzduchotěsným pohyblivým pístem, který má nezanedbatelnou hmotnost M . Dále víme, že nádoba je vodorovnými přepážkami rozdělena na n komor a v i -té komoře (číslováno odshora) je $2^i a$ částic, kde a je blíže neurčená konstanta. Přepážky nejsou k nádobě připevněny, přesto nedovolují, aby si komory, v nichž je ideální plyn, vyměňovaly teplo nebo částice. Celý systém je v rovnováze. Poté zdvojnásobíme hmotnost pístu a počkáme, až se náš systém opět ustaví v rovnováze. Jak se změní objem, který plyn v nádobě zaujímá? Atmosferický tlak neuvažujte.

Hned ze začátku musíme podotknout, že v zadání není specifikován jistý „detail“, který významně ovlivňuje správné řešení. Tímto prvkem je rychlost procesu přechodu mezi ustálenými stavy v nádobě. Jinými slovy, záleží na tom, jestli na píst ten druhý jen tak laxním způsobem upustíme, nebo naopak „šetrně“ položíme. V řeči zvyšování hmotnosti pístu pak mluvíme opět o rychlosti nárůstu jeho hmotnosti. První z případů lépe odráží praxi, avšak jeho kvantitativní rozbor nespadá do rámce středoškolské ani FYKOSí termodynamiky. Jde totiž o čistě dynamický problém, na nějž nejsou kladeny požadavky kvazistaticity, které nám třeba umožní definovat pojem teplota. Problematikou „rychlých“ procesů se zabývá nerovnovážná termodynamika, která by nám také odpověděla, že za těchto okolností k žádné rovnováze nedojde, píst bude okolo své rovnovážné polohy oscilovat. Intuitivně lze tuto skutečnost nahlédnout, když si rozmyslíme, že při vyrovnání tlaků bude mít píst nenulovou pohybovou energii, kterou ztratí až po opuštění tohoto rovnovážného stavu. Těm z vás, kteří si zadání upřesnili podle svého, a dle svého upřesnění úlohu i správně vyřešili, jsme udělovali plný počet bodů.

V dalším se již budeme zabírat jen kvazistatickou variantou, kdy se pístu „dostatečně pomalu“ zvyšuje hmotnost. Tím „dostatečně pomalu“ myslíme tak rychle, aby tlak pístem vyvíjený byl vždy roven tlaku plynu v horní komoře. Jedině tímto pomalým přechodem zajistíme, že vždy budeme přecházet mezi rovnovážnými stavy, bude nám po celý děj platit klasická stavová rovnice a podobně.

Takto formulovaná úloha tedy spadá do kategorie vyšetřování rovnovážných stavů v termodynamice. V tomto případě se jedná o rovnováhu mechanickou, kterou známe nejlépe z mechaniky. Pod mechanickou rovnováhou v termodynamice rozumíme silové vyrovnání působící na každou fyzickou, ale i imaginární plošku uvnitř našeho systému. To jinými slovy vynucuje vyrovnání tlaků. Přírozené je se ptáti, na jaké rovnovážné hodnotě se náš tlak v různých komorách ustálí. Můžeme to nějak určit rovnou? Není těžké si rozmyslet, že argument rovnováhy bude platit mezi každými dvěma sousedními komorami, což nás vede k závěru, že při dosažení rovnováhy bude nastolena rovnost tlaků napříč celou nádobou a hodnota tohoto tlaku bude rovna tlaku, který určují vnější podmínky – okamžitá hmotnost pístu. Při vyšetřování změny objemu se tak můžeme omezit na zkoumání změny objemu v jedné komoře, protože, jak jsme si rozmysleli výše, podmínky jsou v případě každé komory stejné. Pro výchozí a koncový stav tlaku v každé z komor tak můžeme s využitím stavové rovnice ideálního plynu psát

$$\frac{gM}{S} = p_0 = \frac{NkT_0}{V_0} = \frac{NkT_0}{Sd_0}, \quad (23)$$

kde 0 označuje počáteční, 1 koncový stav, p tlak v komoře, g tíhové zrychlení, M počáteční hmotnost pístu, S plochu pístu, N počet částic v komoře, k Boltzmannovu konstantu, T teplotu plynu, d výšku pístu. Podobně pro koncový rovnovážný stav platí

$$\frac{2gM}{S} = 2p_0 = \frac{NkT_1}{V_1} = \frac{NkT_1}{Sd_1}. \quad (24)$$

Jak ale souvisí změna teploty se změnou výšky komory? Lze to určit? Vraťme se zpět k otázce podstaty procesu, který se realizuje. Už víme, že děj probíhá za neustálé vyrovnanosti tlaku pístu s tlakem v komoře, navíc při ději do komory nepřichází žádné teplo. Takový děj je znám jako děj adiabatický. Přemostění mezi těmito dvěma rovnovážnými stavy nám podá energetická bilance procesu. K tomu potřebujeme kalorimetrickou rovnici pro ideální plyn a vztah pro práci při adiabatickém ději

$$\Delta U = \frac{f}{2} Nk(T_1 - T_0) = - \int_{V_0}^{V_1} \frac{p_0 V_0^{1+2/f}}{V^{1+2/f}} dV = p_0 V_0^{1+2/f} \left[\frac{f}{2} V^{-2/f} \right]_{Sd_0}^{Sd_1},$$

kde jsme pro obecnost předpokládali f stupňů volnosti plynových částic a rovnou dosadili za Poissonovu konstantu $\kappa = (f+2)/f$. Drobné úpravy s dosazením za p_0 a V_0 ze stavové rovnice vedou na vedou na

$$\frac{f}{2}(T_1 - T_0) = \frac{f}{2} T_0 \left[\left(\frac{d_1}{d_0} \right)^{-2/f} - 1 \right]. \quad (25)$$

Abychom mohli ze vztahu vyloučit teploty, využijeme sadu rovnic (23) a (24), z níž přímočaře plyne

$$2 \frac{d_1}{d_0} = \frac{T_1}{T_0}$$

a po dosazení do (25) máme

$$\frac{f}{2} \left(2 \frac{d_1}{d_0} - 1 \right) = \frac{f}{2} \left[\left(\frac{d_1}{d_0} \right)^{-2/f} - 1 \right].$$

Řešení této rovnice pro neznámou d_1/d_0 dává

$$\frac{d_1}{d_0} = 2^{-f/(f+2)} = 2^{-1/\kappa}.$$

Tím jsme získali poměr výšek komor na konci ku na začátku děje. K dobrání se konečné odpovědi na otázku zadání již vedou dvě jednoduché úvahy. Uvědomíme si, že byl spočten kompresní poměr pro libovolnou komoru, takže rovnou známe kompresní poměr pro celou nádobu, a navíc, protože se jedná o válcovou nádobu, je poměr výšek pístu nade dnem přímo roven poměru objemů plynu, který je pístem do nádoby uzavřen. Řešení naší slovní úlohy už postrádá pouze slovní odpověď. Po opatrném zdvojnásobení hmotnosti pístu bude plyn v nádobě zaujímat objem $2^{-1/\kappa}$ litrů.

Úloha V.4 . . . trojúhelníkový odporník

Určete odpor trojúhelníku vytvořeného z odporového drátu mezi svorkami A a B, které vidíte na obrázku. Jedna strana malého trojúhelníčku (ze kterých se skládá velký trojúhelník) má odpor R_0 . Odpor přírodních vodičů neuvažujte.

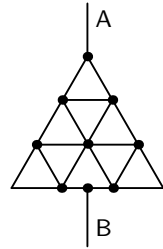
Zamysleme sa, čím vieme popísať elektrický obvod. Každému uzlu vieme priradiť potenciál φ a každému drôtu prúd I . Ak spája drôt s odporom r i -ty a j -ty uzol, potom ním tečie prúd

$$I_{ij} = \frac{\varphi_i - \varphi_j}{r}$$

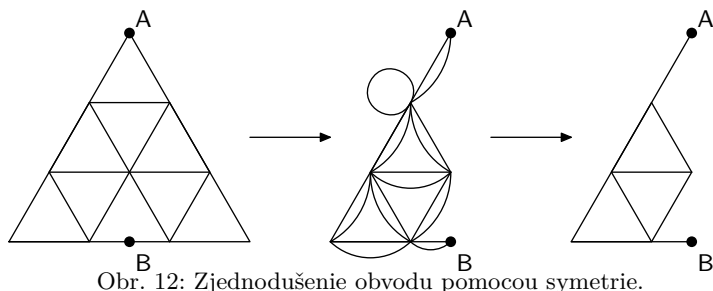
z i -teho do j -teho uzla (ak je záporný, znamená to len, že kladný prúd $-I_{ij} = I_{ji}$ tečie opačným smerom). Ide o obyčajný Ohmov zákon – napätie medzi uzlami je totiž rozdiel ich potenciálov a prúd tečie z väčšieho potenciálu na menší.

Ak teda pridáme medzi 2 uzly s rovnakými potenciálmi drôt s ľubovoľne malým odporom, nebude týmto drôtom tiecť žiadny prúd – ten ale netiekol ani pred tým, takže sa v obvode nič, vrátane odporu medzi bodmi A a B, nezmení. Potom môžeme tento drôt skracovať na ľubovoľne malú dĺžku, až kým sa naše 2 uzly spoja do jedného, tiež bez zmeny odporu medzi bodmi A a B. Pozor, pri takomto spojení uzlov stále existujú všetky pôvodné drôty!

Dvojíc s rovnakými potenciálmi sa dá ľahko nájsť dosť veľa. Obvod je totiž symetrický podľa osi AB, teda každé 2 uzly, ktoré sú si navzájom obrazmi v tejto osovej súmernosti, budú mať aj rovnaké potenciály. Spojme teda každé dva také uzly do jedného.



Obr. 11: Trojúhelník



Pri druhom zjednodušení na obr. 12 ešte zahodíme drôt, ktorý spájal jeden uzol sám so sebou (týmto drôtom žiadny prúd zjavne netečie) a nahradili každé 2 paralelne zapojené drôty s rovnakými odpormi r jedným drôtom s odporom $r/2$. Celá strana malého trojuholníčka bude potom mať odpor $R_0/2$ a jej polovica pri uzle A odpor $R_0/4$.

Transformácia trojuholník-hviezda

Predstavme si čiernu skrinku, do ktorej môžeme pripojiť drôty na niekoľkých miestach (tzv. termináloch), zvoliť potenciály na týchto termináloch a merať prúdy, ktoré cez tieto drôty tečú.

Ak by sme mali dve takéto čierne skrinky (T a S), pre ktoré nameráme pre rovnaké potenciály vždy rovnaké prúdy, potom môžeme v ľubovoľnom obvode vymeniť skrinku T za skrinku S (a naopak) bez toho, aby sa ľubovoľná veličina (odpory, prúdy, atď.) v obvode zmenila.

Dá sa dokázať⁵² že skrinky na obr. 13 (s terminálmi K, L a M) sú v tomto zmysle ekvivalentné. Zapojeniu v skrinke T hovoríme trojuholník, zapojeniu v skrinke S zasa hviezda.⁵³ Ekvivalentnú hviezdu vieme nájsť ľubovoľnému trojuholníku, vzťahy medzi odpormi v hviezde a v trojuholníku sú ale zložitejšie.

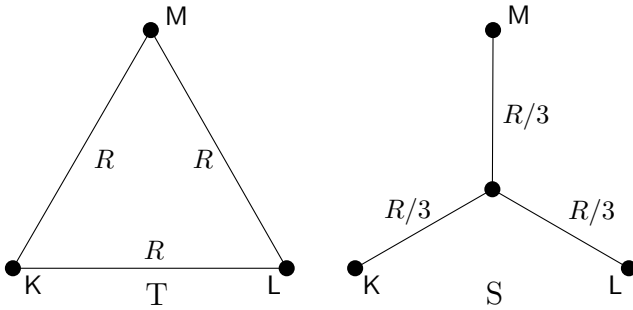
Všimnime si, že práve trojuholník zložený z drôtov s rovnakými odpormi sa v našom (už zjednodušenom) obvode nachádza. Môžeme ho teda nahradiť hviezdou ako na obr. 14.

Odpor R tohto obvodu už spočítame priamočiaro – už zo základnej školy predsa vieme, že sériovo zapojené rezistory s odpormi R_1 a R_2 sa správajú ako jeden rezistor s odporom $R_1 + R_2$ a pri paralelnom zapojení zasa ako rezistor s odporom

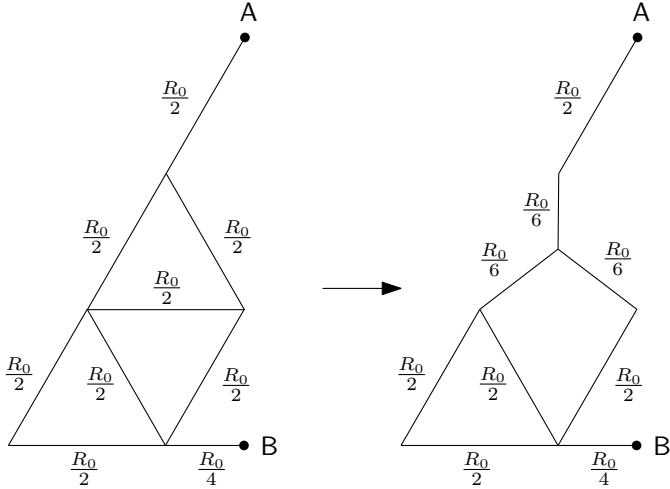
$$\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}.$$

⁵²Ide o veľmi známy trik pri počítaní odporov, dôkaz preto neuvádzame.

⁵³



Obr. 13: Ekvivalentné zapojenia do trojuholníka a do hviezdy.



Obr. 14: Zjednodušenie obvodu nahradením trojuholníka hviezdou.

Odpor mezi bodmi A a B teda bude

$$R = \frac{R_0}{4} + \frac{1}{\frac{\frac{R_0}{6} + \frac{R_0}{2}} + \frac{1}{\frac{R_0}{6} + \frac{1}{\frac{1}{R_0} + \frac{2}{R_0}}}} + \frac{R_0}{6} + \frac{R_0}{2} = \frac{101}{84} R_0.$$

Úloha V.5 ... hlídání dětí

Mějme houpačku zavěšenou na dvou svislých lanech délky $l = 1,5$ m na vodorovné tyči o poloměru $r = 4$ cm. Dítěti sedícímu na houpačce udělíme v dolní úvrati takovou rychlost v_0 , aby dítě vykonalo celou otočku kolem horizontální tyče a lana byla během namotávání stále napnutá. Zároveň chceme, aby počáteční rychlost byla nejmenší možná. Určete rozdíl úhlové rychlosti ω_1 houpačky s dítětem po návratu do dolní úvrati a počáteční úhlové rychlosti ω_0 .

Nápověda Pro výpočet odstředivého zrychlení můžete uvažovat, že se dítě pohybuje lokálně po kružnici.

V celé úloze budeme předpokládat, že lana mají zanedbatelnou šířku i hmotnost, a dítě s houpačkou budeme považovat za hmotný bod. Víme, že během rotace houpačky kolem tyče se budou lana postupně navíjet a tím se bude zkracovat poloměr rotace. Houpačka se tedy bude pohybovat po Archimédově spirále, tj. zkrácení lana bude přímo úměrné úhlu, o který se houpačka otočila.

Aby zůstala lana napnutá a dítě z houpačky nevypadlo, musí být v horní úvrati odstředivá síla větší nebo rovna síle tíhové.⁵⁴ Zároveň však musíme splnit podmínku, že počáteční rychlost houpačky musí být co nejmenší. Toho dosáhneme právě tehdy, když si budou odstředivá a tíhová síla přesně rovný. Pro zjednodušení zatím předpokládejme, že při otočení o malý úhel se změní délka lana pouze minimálně, a můžeme proto velikost odstředivé síly v daném bodě počítat ze vztahu $F = mv^2/d$, kde d je vzdálenost od osy otáčení (diskusi vlivu tohoto zanedbání viz níže).

Délka lana v horní úvrati je $l - \pi r/2$, protože lana se začnou navíjet až po otočení o $\pi/2$. Z úvah v předchozím odstavci nám plyne rovnost

$$\frac{v_u^2}{l - \pi r/2} = g, \quad (26)$$

kde v_u je rychlost houpačky v horní úvrati. Zároveň ze zákona zachování mechanické energie získáme vztah

$$\frac{1}{2} (v_0^2 - v_u^2) = gl \left(2 + \frac{r}{l} - \frac{\pi r}{2l} \right). \quad (27)$$

Z rovnice (26) vyjádříme v_u^2 , dosadíme do (27) a vyjádříme počáteční rychlost

$$v_0^2 = gl \left(5 + 2\frac{r}{l} - \frac{3}{2}\pi\frac{r}{l} \right). \quad (28)$$

⁵⁴Horní úvrati zde myslíme polohu, kdy je houpačka nejvýše, lana tedy směřují kolmo vzhůru. Správně bychom podmínku pro síly měli vyšetřovat v mírně odlišné poloze, viz níže.

Rychlost v_1 v dolní úvratí po otočení houpačky o plný úhel určíme opět na základě ZZME z rovnice

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{2}v_1^2 = gl \left(\frac{r}{l} + \frac{3}{2}\pi \frac{r}{l} \right), \quad (29)$$

kde nárůst potenciální energie je úměrný součtu délky namotaného lana a poloměru tyče (střed rotace je nyní právě o tento jeden poloměr výše než na počátku). Ze vztahů (28) a (29) dostaneme

$$v_1^2 = gl \left(5 - \frac{9}{2}\pi \frac{r}{l} \right). \quad (30)$$

Nyní už jsme schopni po odmocnění vztahů (28) a (30) vyjádřit rozdíl úhlových rychlostí

$$\omega_1 - \omega_0 = \frac{\sqrt{\frac{g}{l} \left(5 - \frac{9}{2}\pi \frac{r}{l} \right)}}{1 - \frac{3}{2}\pi \frac{r}{l}} - \sqrt{\frac{g}{l} \left(5 + 2\frac{r}{l} - \frac{3}{2}\pi \frac{r}{l} \right)} \doteq 0,61 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (31)$$

Při výpočtu úhlových rychlostí jsme (podobně jako v případě odstředivého zrychlení) použili přímo délku lana příslušející oběma polohám. Pokud ovšem budeme chtít zahrnout skutečnost, že se houpačka pohybuje přibližně po spirále, budeme muset poloměry použité ve výpočtu odstředivé síly a úhlové rychlosti nahradit poloměrem oskulační kružnice. To je taková kružnice, jejíž poloměr je roven převrácené hodnotě křivosti trajektorie ve zkoumaném bodu této trajektorie. Pro parametricky zadanou rovinnou křivku

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

je poloměr R oskulační kružnice definován vztahem

$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}, \quad (32)$$

kde \dot{x} je derivace x podle parametru t . Trajektorie houpačky leží na Archimédově spirále s počátkem rotujícím po kružnici, kterou v parametrizaci úhlem ϑ popíšeme rovnicí

$$a(\vartheta) = \begin{pmatrix} r \left(\sin \vartheta + \left(\frac{l}{r} - \vartheta \right) \cos \vartheta \right) \\ r \left(-\cos \vartheta + \left(\frac{l}{r} - \vartheta \right) \sin \vartheta \right) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Úhel ϑ je volen tak, aby byl nulový ve chvíli, kdy houpačka při otáčení poprvé dorazí do vodorovné polohy. Tato volba parametrizace je výhodná, protože se pro kladná ϑ vyhneme úseku na začátku pohybu, během kterého se houpačka pohybuje přesně po kružnici. Polože, kdy má lano délku $L(\vartheta)$, pak odpovídá hodnota

parametru $\vartheta = (l - L(\vartheta))/r$. Po dosazení (33) do (32) dostaneme velmi sympatický výraz

$$R = r \left(\frac{l}{r} - \vartheta \right).$$

Za ϑ nyní dosadíme hodnoty ϑ_1 , ϑ_2 odpovídající dolní úvrati po jedné otočce a horní úvrati, tedy

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{3}{2}\pi = \frac{l - L(\vartheta_1)}{r}, \\ \vartheta_2 &= \frac{\pi}{2} = \frac{l - L(\vartheta_2)}{r}. \end{aligned}$$

Tento zápis pomocí okamžité délky $L(\vartheta)$ nám nyní umožňuje kompaktně zapsat hledané poloměry oskulačních kružnic

$$R(\vartheta) = r \left(\frac{l}{r} - \frac{l - L(\vartheta)}{r} \right) = L(\vartheta).$$

Odtud je již vidět, že se při ztotožnění okamžité délky lana a poloměru rotace nedopouštíme žádné chyby.

Nyní se vrátíme k výpočtu počáteční úhlové rychlosti ω_0 , u něž jsme poznamenali, že podmínka na rovnost velikostí odstředivé síly a tíhové síly v horní úvrati (26) není zcela správná. Polohu, kde má tato rovnost nastat, určíme na základě zákona zachování energie. Jelikož se charakter pohybu houpačky změní při dosažení vodorovné polohy, budeme ji považovat za počáteční a popíšeme ji pomocí $\vartheta = 0$, $\dot{\vartheta} = \omega_h$. Používáme tedy stejnou parametrizaci jako při výpočtu poloměru oskulační kružnice. Potom můžeme pro kinetickou a potenciální energii psát

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mR(\vartheta)^2\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2}m(l - r\vartheta)^2\dot{\vartheta}^2, \\ V &= mg(r(1 - \cos \vartheta) + (l - r\vartheta) \sin \vartheta). \end{aligned}$$

Nulovou hladinu potenciální energie jsme přitom nastavili do vodorovné polohy, kinetická energie odpovídá pohybu po oskulační kružnici. Z volby nulové hladiny potenciální energie plyne, že celková mechanická energie systému je

$$E = \frac{1}{2}m\omega_h^2 l^2.$$

Ze zákona zachování $E = T + V$ jsme schopni vyjádřit kvadrát úhlové rychlosti

$$\dot{\vartheta}^2 = \frac{\omega_h^2 l^2 - 2gr(1 - \cos \vartheta) - 2g(l - r\vartheta) \sin \vartheta}{(l - r\vartheta)^2}.$$

Pro odstředivé zrychlení potom máme

$$a_d = (l - r\vartheta)\dot{\vartheta}^2$$

a požadujeme, aby stále platilo

$$a_d \geq g \sin \vartheta,$$

kde $g \sin \vartheta$ je složka tíhového zrychlení ve směru lana. Rovnost má nastat pouze v jednom jediném bodě blízkém horní úvrati – v něm musí mít rozdíl zrychlení minimum, které nalezneme derivací. Řešíme tedy soustavu rovnic

$$\frac{\omega_h^2 l^2 - 2gr(1 - \cos \vartheta) - 2g(l - r\vartheta) \sin \vartheta}{l - r\vartheta} - g \sin \vartheta = 0, \quad (34)$$

$$\frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{\omega_h^2 l^2 - 2gr(1 - \cos \vartheta) - 2g(l - r\vartheta) \sin \vartheta}{l - r\vartheta} - g \sin \vartheta \right) = 0 \quad (35)$$

pro proměnné ω_h , ϑ . Z rovnice (34) jsme schopni vyjádřit

$$\omega_h^2 l^2 = 2gr(1 - \cos \vartheta) + 3g \sin \vartheta (l - r\vartheta) \quad (36)$$

a po zderivování (35) a dosazení za $\omega_h^2 l^2$ z (36) dostaneme

$$3 \cos \vartheta (l - r\vartheta) - r \sin \vartheta = 0.$$

Získali jsme tak transcendentní rovnici pro ϑ , kterou nedokážeme analyticky řešit.

K poměrně přesnému výsledku bychom dospěli rozvinutím funkce $\sin \vartheta$ a $\cos \vartheta$ do Taylorovy řady kolem bodu $\vartheta = \pi/2$. Pokud bychom provedli rozvoj do druhého řádu,⁵⁵ řešili bychom kvadratickou rovnici pro ϑ . Výsledkem je $\vartheta \doteq 1,561\,52$ rad.

Větší přesnosti však můžeme dosáhnout numerickými metodami. Mezi nejrozšířenější metody řešení nelineárních soustav rovnic patří metoda bisekce (půlení intervalu), metoda tečen, metoda sečen a metoda regula falsi. Jejich podrobný popis a implementaci do programovacího jazyka C++ nalezneme např. v knize *Numerical Recipes in C*⁵⁶. My zde použijeme metodu tečen zvanou též Newtonova. Tato metoda aproximuje funkci $f(x)$ v okolí odhadu x_k prvním členem Taylorova rozvoje, tj. tečnou v bodě $[x_k, f(x_k)]$. Řešíme rovnici $f(x) = 0$ v aproximaci

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_k - x) = 0.$$

Řešení této rovnice označíme x_{k+1} a pokračujeme v iteraci až po dosažení konvergence, lépe řečeno dokud není splněna podmínka $|x_k - x_{k+1}| < \delta$, kde δ volíme podle požadované přesnosti. Metoda tečen konverguje obecně rychleji než ideově jednodušší metoda bisekce, ale na rozdíl od ní může selhat a divergovat. Nebudeme zde uvádět přesné předpoklady kladené na zkoumanou funkci, ale snadno si rozmyslíme, že problematická budou například okolí stacionárních bodů (derivace nulové, dělíme nulou).

Implementace základní verze metody tečen do některého z běžných programovacích jazyků není složitá, my jsme však raději zvolili odladěnou funkci NEWTON obsaženou v programovacím jazyce IDL. Pro odhad $\vartheta = 1,55$ jsme dostali výsledek $\vartheta \doteq 1,561\,52$ rad a z (36) jsme dopočetli $\omega_h \doteq 4,375\,82$ rad·s⁻¹. Hledaná poloha,

⁵⁵ $\cos \vartheta \approx \pi/2 - \vartheta + \sin \vartheta \approx 1 - (\pi/2 - \vartheta)^2/2$

⁵⁶Starší verze dostupné online na <http://www.nr.com/oldverswitcher.html>.

ve které má nastat rovnost sil, je od svislé polohy odchýlena o přibližně $0,5^\circ$. Ze ZZME triviálně dopočteme $\omega_0 \doteq 5,676\,95 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Zjednodušený výpočet ω_0 v (31) dává hodnotu $5,676\,87 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Lišíme se až na páté platné číslici, odhad kritické polohy $\vartheta = \pi/2$ je tedy velmi dobrý.

Úloha V.P . . . fyzika v plamenech

Na jakých fyzikálních (a chemických) parametrech závisí teplota, kterou hoří nějaká konkrétní látka? Jak? Určete tuto teplotu pro nějakou konkrétní látku.

V řešení se budeme zabývat hořením vodíku $2\text{H}_2 + \text{O}_2 \longrightarrow 2\text{H}_2\text{O}$, protože jde o nejjednodušší reakci hoření s nejvyšší dosahovanou teplotou. Budeme tak moci demonstrovat nejrůznější efekty.

V celé úloze budeme uvažovat, že plyn má stále atmosférický tlak a že případné zvýšení tlaku bude velmi rychle kompenzováno rozepnutím daného plynu. Protože uvažujeme model ideálního plynu, tak veškerá energie je uložena v kinetické energii jednotlivých atomů či molekul. Podívejme se podrobněji na to, jakým způsobem by mohl růst v plameni tlak. Tlak vzroste proto, že kinetická energie produktů reakce bude vyšší než kinetická energie reaktantů. Tyto atomy a molekuly se vlivem Brownova pohybu rozptýlí po okolí úplně stejně, jako když si otevřete v místnosti voňavku a ta vám zavoní celý pokoj. Důležité je to, že na produkty reakce nepůsobí žádná vnější síla a proto je správné uvažovat tepelnou kapacitu za konstantního objemu, nikoli tlaku (vnější síla – závaží na pístu je zodpovědné za větší tepelnou kapacitu). Poznamenejme, že jde o nevratný děj, tzn. produkty reakce z plamenu budou odcházet, ale nebudou se do něj samovolně vracet.

Ukážeme si nejprve první odhad teploty spalin vodíku na výbuchu směsi vodíku a kyslíku smíchaných ve slučovací poměru 2 : 1. Pak jej zobecníme na případ plamene, kde ukážeme, jaké všechny vlivy mohou snižovat jeho teplotu.

Pokud smícháme vodík s kyslíkem v poměru 2 : 1, tak se veškeré spalné teplo změní na kinetickou energii produktů. Uvážíme-li spalování jednoho molu vodíku a půl molu kyslíku, získáme po reakci jeden mol vody. Tato voda se přirozeně bude vyskytovat ve formě páry, proto musíme ještě od spalného tepla odečíst její skupenské teplo varu. Výsledná veličina se pak označuje jako výhřevnost (angl. lower heating value). Měrnou molární tepelnou kapacitu vody za konstantního objemu označme⁵⁷ $c_{\text{H}_2\text{O}} = 29,2 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, výhřevnost vodíku vztaženou k látkovému množství⁵⁸ $H_{\text{H}_2} = 240 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$. Podělením výhřevnosti vodíku a tepelné kapacity vody dostáváme výsledek $\Delta T_a = 8\,200 \text{ K}$, tedy produkty by měly mít teplotu vyšší o ΔT_a oproti reaktantům.

První z efektů, který jsme zanedbali, je změna velikosti tepelné kapacity vodní páry. Na základě vyhledaných dat⁵⁹ můžeme zkonstruovat závislost tepelné ka-

⁵⁷http://en.wikipedia.org/wiki/Heat_capacity, uvažujeme hodnotu za teploty 100°C .

⁵⁸Na <http://cs.wikipedia.org/wiki/Výhřevnost> najdeme, že výhřevnost je $120 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

⁵⁹http://www.engineeringtoolbox.com/water-vapor-d_979.html, od kterých musíme odečíst molární plynovou konstantu, abychom dostali tepelnou kapacitu za konstantního objemu.

pacuity vodní páry na teplotě, viz obr. 15. Vidíme, že není vůbec lineární, ale na rozsahu teplot (0, 2000) K jej můžeme aproximovat lineární závislostí

$$\frac{C_{\text{H}_2\text{O}}}{\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}} \approx 22,0 + 10,8 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1} \cdot T = A_1 + B_1 T \quad (37)$$

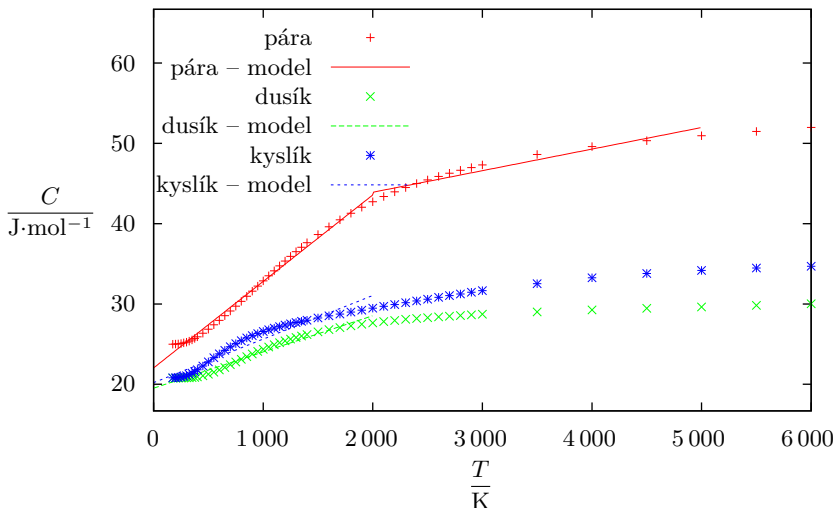
a na intervalu (2000, 5000) K lineární funkcí

$$\frac{C_{\text{H}_2\text{O}}}{\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}} \approx 38,5 + 2,7 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1} \cdot T = A_2 + B_2 T, \quad (38)$$

kde teplotu T dosazujeme v Kelvinech. Teplo potřebné k ohřátí plynu z pokojové teploty (skupenské teplo nemůžeme uvažovat, protože reaktanty jsou plyny a produkty též) odpovídá ploše pod křivkou, tedy, při použití první aproximační křivky, můžeme položit

$$H_{\text{H}_2} = A_1(T_2 - T_1) + \frac{B_1}{2}(T_2 - T_1)^2, \quad (39)$$

kde konstanty A_1 a B_1 jsou definovány vztahem (37). Dosazením $T_1 = 273$ K obdržíme kvadratickou rovnici pro T_2 s řešením $T_2 = 5200$ K, z čehož vyplývá, že nemůžeme použít pouze první vztah, protože nám vyšla teplota, která nespadá do rozsahu aproximace odpovídající vztahu (37). Musíme nejprve spočítat teplo nutné k ohřátí na teplotu 2000 K a následně určit finální teplotu páry T_b obdobným postupem, ale pro aproximaci (38).



Obr. 15: Graf závislosti molární tepelné kapacity vodní páry, dusíku a kyslíku na teplotě.

Vypočítáme nejprve energii E_1 potřebnou k ohřátí spalin na teplotu 2000 K, dosazením do (39) dostáváme $E_1 = 54,1 \text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$. Použitím obdobného postupu

jako v (39) dostáváme odhad na finální ohřátí⁶⁰ o $\Delta T_b = 6\,200\text{ K}$, kterou se též dostáváme mimo platnost našeho modelu, ale další data bohužel nemáme.

Spalování není ideální, takže budeme uvažovat další vlivy. Všechna dále uváděná procenta jsou objemová či molární.

- Aby mohlo jít o spalování, nikoli o výbuch, musí být koncentrace vodíku menší než 67%. Pro směs s kyslíkem musí být koncentrace vodíku menší než 15% a pro směs se vzduchem 18,3%, pak nemůže dojít k výbuchu.⁶¹
- Reakce spalování není dokonalá, takže mezi produkty zbuďe i nějaký nezreagovaný vodík. Tento příspěvek je již započtený v měrném spalném teple.⁶²
- Část energie se vyzaří infračerveným a optickým zářením, proto nepřispěje do teploty plamene.

Spočítáme si zde oba výše uvedené případy a pro případ spalování na vzduchu i v nevybušné směsi s kyslíkem.

Spalování směsi s kyslíkem

Je-li koncentrace vodíku 15%, tak v reaktantech bude 7,5% spáleného kyslíku a 77,5% nespáleného kyslíku. Tedy pro jeden mol spáleného vodíku vznikne jeden mol vody, ale také musíme ohřát 5,17 mol kyslíku. Pro kyslík jsou hodnoty⁶³ konstant $\{A\} = 20,2$ a $\{B\} = 5,4 \cdot 10^{-3}$, definice viz (37). Použitím vztahu (39), do kterého dosadíme vážené průměry molárních tepelných kapacit, dostaneme pro rozdíl teplot pouze $T_c = 1\,800\text{ K}$, pokud porovnááme s výbuchem.

Spalování směsi se vzduchem

Pokud budeme spalovat směs 18,3% vodíku ve vzduchu, tak spálíme 9,1 procentního bodu kyslíku ze vzduchu a budeme muset na každý spálený mol vodíku ohřát 3,96 mol vzduchu. Vzduch je především dusík a kyslík, z grafu⁶⁴ na obr. 15 zjistíme ale, že tepelná kapacita dusíku i kyslíku je podobná a bude tedy odpovídat tepelné kapacitě vzduchu. Dosazením odpovídajících hodnot do vztahu (39) dostaneme výsledek $\Delta T_d = 2\,100\text{ K}$, což je podezřele více než pro spalování s čistým kyslíkem, ale rozdíl je způsoben vyšší bezpečnou koncentrací vodíku.

Závěr

Nejprve jsme určili nárůst teploty spalin vodíku s kyslíkem pro model konstantní tepelné kapacity s výsledkem $T_a = 8\,200\text{ K}$, pak jsme model zobecnili pro případ lineárně se měnící tepelné kapacity a teplota klesla na 6 200 K. Dále jsem uvážili spalování „bezpečné“ směsi vodíku a kyslíku s teplotou plamene $T_c + T_0 \approx 1\,800\text{ K}$ a pro směs vodíku se vzduchem o teplotě $T_d + T_0 \approx 2\,100\text{ K}$. Poznamenejme, že např. pro případy sváření či tavení kovů se používají nižší koncentrace kyslíku,

⁶⁰Wikipedia <http://cs.wikipedia.org/wiki/Vodík> uvádí hodnotu přes 3 000 K. Nesoulad budeme diskutovat dále.

⁶¹http://www.odbornecasopisy.cz/index.php?id_document=31466

⁶²http://en.wikipedia.org/wiki/Heat_of_combustion

⁶³http://www.engineeringtoolbox.com/oxygen-d_978.html

⁶⁴http://www.engineeringtoolbox.com/nitrogen-d_977.html

kde je možnost výbuchu, ale dokud hoří směs plamenem, nemůže k výbuchu dojít. Ale snížením koncentrace kyslíku též vzroste teplota plamene, protože nemusíme „zbytečně“ ohřívát přebytečný kyslík.

Úloha VI.1 . . . antijádro

Máme dvě homogenní nerotující planety tvaru dokonalých koulí s vnějšími poloměry R_Z . První z nich je dokonalá koule o hustotě ρ a na jejím povrchu je gravitační zrychlení a_g . Druhá je dutá do poloviny jejího poloměru a až pak je plná.

- Pokud by obě planety byly ze stejného homogenního materiálu, na povrchu které planety bude větší gravitační zrychlení a jaký bude poměr mezi hodnotami gravitačního zrychlení na obou planetách?
- Pokud by i na povrchu druhé planety bylo gravitační zrychlení a_g , jaká by musela být hustota druhé planety?

Intenzita gravitačního pole, a tedy i zrychlení na volný objekt jím vytvářené, je stejná, ať už jsme vzdáleni od hmotného bodu s nějakou hmotností či jsme na povrchu tělesa, které je kulové, má sféricky symetricky rozloženou hustotu (tj. závisí pouze na vzdálenosti od jeho hmotného středu) a jeho poloměr je roven vzdálenosti od hmotného bodu v předchozím případě. Gravitační zrychlení na povrchu homogenní koule tedy můžeme vypočítat ze známého vztahu $a_g = Gm_i/R_Z^2$, kde m_i je hmotnost dané koule. Hmotnost plné koule ze zadání, kterou si označíme M_1 je tedy pevně dána jako $M_1 = a_g R_Z^2/G$.

- Hmotnosti koulí můžeme počítat z objemů, tedy $M_1 = \rho V_Z$ a $M_2 = \rho(V_Z - V_{in})$, kde ρ je hustota koulí, V_Z je objem plné koule a V_{in} je objem dutiny. Objem koule je obecně $V_i = (4/3)\pi r_i^3$, kde r_i je poloměr dané koule. Vyjádřeme si nyní hmotnost duté koule M_2 v závislosti na hmotnosti M_1

$$M_2 = \rho(V_Z - V_{in}) = \rho \frac{4}{3}\pi \left(R_Z^3 - \frac{R_Z^3}{8} \right) = \frac{7}{8} M_1.$$

Gravitační zrychlení na povrchu první, plné, planety by bylo

$$a_{g1} = \frac{GM_1}{R_Z^2}.$$

Gravitační zrychlení na povrchu druhé, duté, planety by bylo

$$a_{g2} = \frac{GM_2}{R_Z^2} = \frac{7GM_1}{8R_Z^2} = \frac{7}{8} a_{g1}.$$

Odpověď tedy je, že gravitační zrychlení na povrchu první planety by bylo větší, a to 8/7krát víc než na druhé planetě.

- Ponechme označení hustoty plné koule jako ρ a hustotu duté koule označme jako ρ_2 . Hmotnost obou planet má být stejná, takže hustota duté planety musí být o něco vyšší. Zapišme si vztahy pro gravitační zrychlení na povrchu obou planet v závislosti na hustotě:

$$\tilde{a}_{g1} = G \frac{\rho V_Z}{R_Z^2}, \quad \tilde{a}_{g2} = G \frac{\rho_2 (V_Z - V_{in})}{R_Z^2} = G \frac{7\rho V_Z}{8R_Z^2}.$$

Pokud má platit, že $\tilde{a}_{g1} = \tilde{a}_{g2}$, pak dostáváme výsledek

$$\rho_2 = \frac{8}{7}\rho.$$

Pokud dutá planeta bude mít hustotu 8/7krát tak velkou, co plná, pak budou mít obě planety na svém povrchu stejné gravitační zrychlení.

Úloha VI.2 ... go west

Již před více než sto lety měření geodetů potvrdila, že když plujeme lodí směrem na západ, ukazují gravimetry větší hodnoty tíhového zrychlení než při cestě na východ. Určete, jaký rozdíl naměříme na rovníku, jestliže nejprve provedeme měření v klidu a poté za konstantní rychlosti 20 uzlů v západním směru.

Tým geodetů ze zadání, vedený O. Heckerem z Geodetického institutu v Postupimi, měl za úkol proměřit gravitační pole Země v Atlantickém a Tichém oceánu. Měření probíhalo na lodích, které se během experimentu pohybovaly, čímž byla do experimentu zanesena systematická chyba, které si při čtení Heckerových výsledků povšiml maďarský fyzik Loránd Eötvös. Za příčinu chyby považoval rotaci Země, což se při dalších měřeních potvrdilo. Proto se dnes pokles či nárůst tíhového zrychlení v závislosti na východozápadním pohybu označuje jako Eötvösův jev.⁶⁵

Naměřený rozdíl v hodnotách tíhového zrychlení určíme čistě z rozdílu odstředivých zrychlení působících na loď v klidu a v pohybu, neboť hodnota gravitačního zrychlení je v dané malé oblasti v čase téměř konstantní. Vše vyšetřujeme v inerciální soustavě spojené se středem Země. Označme R_Z poloměr Země, ω_Z úhlovou rychlost rotace Země a ω_1 úhlovou rychlost lodí vzhledem k povrchu Země. Potom rozdíl odstředivých zrychlení pro oba pohybové stavy lodě vyjádříme jako

$$\Delta a = (\omega_Z - \omega_1)^2 R - \omega_Z^2 R.$$

Znaménka přitom volíme tak, aby záporná hodnota znamenala pokles odstředivého zrychlení, a tedy nárůst tíhového zrychlení. Závorku umocníme a odečteme člen $\omega_Z^2 R$, dostaneme vztah

$$\Delta a = -2\omega_Z\omega_1 R + \omega_1^2 R.$$

Za rychlost lodí v latitudinálním směru dosadíme $v_1 = \omega_1 R$ a upravíme vztah do výsledného tvaru

$$\Delta a = -2\omega_Z v_1 + \frac{v_1^2}{R}. \quad (40)$$

V prvním členu poznáváme složku Coriolisova zrychlení kolmou k povrchu (při pohybu po rovníku je to jeho jediná složka), druhý člen představuje odstředivé zrychlení pohybu po kružnici s poloměrem R . Z řádového odhadu je zřejmé, že druhý člen bude pro běžné rychlosti, kterých lodě běžně dosahují, zanedbatelný.

⁶⁵http://www.elgi.hu/museum/elatud_.htm

Vztah lze snadno zobecnit pro pohyb v libovolném směru na libovolné zeměpisné šířce, stačí do druhého členu zahrnout pohyb v longitudinálním směru v_2 a první člen přenásobit $\cos \varphi$, kde φ je zeměpisná šířka. Získáme tak vztah

$$\Delta a = -2\omega_Z v_1 \cos \varphi + \frac{v_1^2 + v_2^2}{R},$$

který se pro $\varphi = 0^\circ$, $v_2 = 0$ zřejmě redukuje na vztah (40).

Nyní už zbývá pouze správně dosadit. Rychlost lodi je zadána v uzlech, což je mezinárodní jednotka rychlosti definovaná jako jedna námořní míle za hodinu, v soustavě SI $1 \text{ kt} = 1,852 \text{ km/1 h} \doteq 0,514 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Dále potřebujeme znát poloměr Země $R_Z = 6370 \text{ km}$ a úhlovou rychlost rotace Země $\omega_Z = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (vypočteno z délky jednoho siderického dne $T_s = 23,93 \text{ h}$). Rovnice (40) dává výslednou hodnotu

$$\Delta a = -1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Tíhové zrychlení tedy bude při pohybu na západ o $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ větší, než když loď setrvává v klidu.

Úloha VI.3 . . . kule a šlupka

Máme měděnou plnou kouli a měděnou tenkou kulovou slupku (tak tenkou, že můžete zanedbat její tloušťku). Obě mají při pokojové teplotě stejný poloměr. Jak se bude jejich poloměr měnit, když je začneme ohřívat? (Zapište závislost poloměru na teplotě a okomentujte ji.) U měděné slupky uvažujte, že má v sobě malé otvory, které vyrovnávají vnitřní a vnější tlak vzduchu.

Máme-li při teplotě T_0 tyč délky l_0 , dokážeme malé změny její délky způsobené změnou teploty popsat pomocí koeficientu délkové teplotní roztažnosti α a teplotního intervalu ΔT vztahem

$$l(T_0 + \Delta T) = l_0 (1 + \alpha \Delta T). \quad (41)$$

Malou změnou se rozumí taková, že součin $\alpha \Delta T \ll 1$.

Co se ale děje s plošným nebo prostorovým útvarem? To samé. Představme si, že těleso, které zkoumáme, je složeno z atomů, které jsou navzájem spojeny vazbami, které podléhají stejné deformaci jako pružná tyč (tj. s teplotou se roztahují podle vztahu (41) – je jasné, že když se takto mění délka jedné vazby, při spojení více vazeb za sebe se celková délka tělesa bude měnit stejně). Ukažme si to na obdélníku (strany a , b ; plocha $S_0 = ab$), resp. kvádru (strany a , b , c ; objem $V_0 = abc$). Pokud uvažujeme, že teplotní roztažnost je izotropní (tj. do každého směru se zkoumaný předmět roztahuje stejně), dají se plocha, resp. objem vyjádřit jako

$$S(T_0 + \Delta T) = a(1 + \alpha \Delta T) \cdot b(1 + \alpha \Delta T) = S_0(1 + \alpha \Delta T)^2, \quad \text{resp.}$$

$$V(T_0 + \Delta T) = a(1 + \alpha \Delta T) \cdot b(1 + \alpha \Delta T) \cdot c(1 + \alpha \Delta T) = V_0(1 + \alpha \Delta T)^3.$$

Nyní využijeme předpokladu, že $\alpha\Delta T \ll 1$. Umocníme-li závorky, dostaneme

$$(1 + \alpha\Delta T)^2 = 1 + 2\alpha\Delta T + \alpha^2\Delta T^2,$$

$$(1 + \alpha\Delta T)^3 = 1 + 3\alpha\Delta T + 3\alpha^2\Delta T^2 + \alpha^3\Delta T^3.$$

Jestliže je koeficient α malý, jeho druhá nebo třetí mocnina je ještě menší. Můžeme tedy členy s vyššími mocninami zanedbat a dostáváme pouze lineární závislost.

$$S(T_0 + \Delta T) \approx S_0 (1 + 2\alpha\Delta T),$$

$$V(T_0 + \Delta T) \approx V_0 (1 + 3\alpha\Delta T).$$

Proč jsme se zabývali těmito vztahy? Odpověď souvisí se zadáním – zvětšuje-li se koule, děje se tak ve všech třech rozměrech. Roztahuje-li se zanedbatelně tenká kulová slupka, mění se rozměry jen dva (předpokládáme, že se všechno děje tak pomalu a rovnoměrně, že nedochází k žádným lokálním deformacím).

Pokud vyjádříme rozměry obou těles pomocí poloměru (první řádek bude odpovídat slupce, druhý plné kouli, bereme r_0 při původní teplotě T_0 , r při teplotě $T_0 + \Delta T$), dostaneme:

$$4\pi r^2 = 4\pi r_0^2 (1 + 2\alpha\Delta T), \quad \text{resp.}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 (1 + 3\alpha\Delta T).$$

Z těchto vztahů si už jednoduše můžeme vyjádřit poměr r/r_0 v závislosti na teplotním rozdílu ΔT .

$$\frac{r}{r_0} = \sqrt{1 + 2\alpha\Delta T}, \quad \text{resp.}$$

$$\frac{r}{r_0} = \sqrt[3]{1 + 3\alpha\Delta T}.$$

Což znamená, že kulová slupka bude při zahřátí zvětšovat svůj poloměr s druhou odmocninou teplotního rozdílu, zatímco pro plnou kouli bude platit závislost na odmocnině třetí. Protože v argumentu odmocniny ale není stejná závislost na α , je potřeba znovu využít toho, že $\alpha\Delta T$ je malá hodnota a rozepsat si odmocninu do Taylorova polynomu.⁶⁶ Dostaneme

$$\frac{r}{r_0} = \sqrt{1 + 2\alpha\Delta T} \approx 1 + \frac{1}{2}2\alpha\Delta T + \dots, \quad \text{resp.}$$

$$\frac{r}{r_0} = \sqrt[3]{1 + 3\alpha\Delta T} \approx 1 + \frac{1}{3}3\alpha\Delta T + \dots,$$

což se po pokračování zlomků redukuje pro oba případy na

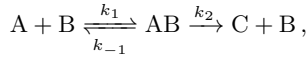
$$\frac{r}{r_0} = 1 + \alpha\Delta T.$$

Tento výsledek je identický se vztahem (41) a znamená to, že koule i kulová slupka se bude rozpínat s teplotou stejně.

⁶⁶Pro $x \ll 1$ platí, že $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x^2)$, kde $o(x^2)$ je velmi malý, až zanedbatelný zbytek závislý na x^2 .

Úloha VI.4 . . . nenasytný pavouk

V tmavém koutě číhá pavouk, který právě polapil mouchu a postupně ji tráví za předpokladu, že trávení probíhá podle rovnice



kde A je muší substrát, B jsou trávicí látky (neustále v dostatku) a C je produkt trávení. AB označuje nestabilní meziprodukt. Reakce je prvního řádu, tzn. rychlost je přímo úměrná koncentraci dané látky. Určete, za jak dlouho se pavouk vydá opět na lov, jestliže mu interoreceptory oznámí pocit hladu při poklesu koncentrace substrátu na 10% původní hodnoty.

Nápověda Použijte aproximaci stacionárního stavu meziproduktu.

Ze zadané reakce sestavíme dvě rovnice:

$$\frac{dc_C}{d\tau} = -\frac{dc_A}{d\tau} = k_2 c_{AB},$$

$$\frac{dc_{AB}}{d\tau} = k_1 c_A c_B - k_{-1} c_{AB} - k_2 c_{AB} = 0.$$

První rovnice nám říká, že koncentrace produktu C je přímo úměrná rychlostní konstantě k_2 a koncentraci meziproduktu AB, z něž C vzniká. Přírůstek C je zřejmě roven úbytku A. Druhá rovnice vychází z předpokladu, že se koncentrace meziproduktu v průběhu reakce ustálí, derivace c_{AB} tedy bude rovna nule. Člen $k_1 c_A c_B$ vyjadřuje nárůst koncentrace substrátu reakcí látek A a B, $-k_{-1} c_{AB}$ představuje úbytek meziproduktu zpětnou reakcí a $-k_2 c_{AB}$ označuje úbytek vlivem rozpadu na výsledný produkt C a enzym B.

Pokud si původní koncentraci trávicích látek označíme c_{B0} , můžeme jejich okamžitou koncentraci zapsat jako $c_B = c_{B0} - c_{AB}$ (kolik enzymu ubude, tolik meziproduktu vznikne). Z druhé rovnice můžeme po dosažení vyjádřit

$$c_{AB} = \frac{k_1 c_A c_{B0}}{k_{-1} + k_2 + k_1 c_A}$$

a z první rovnice potom dostaneme

$$\frac{dc_C}{d\tau} = \frac{k_2 c_{B0} c_A}{\frac{k_{-1} + k_2}{k_1} + c_A}.$$

Zavedeme konstanty $v_{\max} = k_2 c_{B0}$, která má význam maximální rychlosti tvorby produktu při maximální koncentraci enzymu, a $K = (k_{-1} + k_2)/k_1$. Úbytek koncentrace substrátu A označme x . Pro něj zřejmě platí $c_A = c_{A0} - x$ a z toho také

$$\frac{dc_C}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau}.$$

Užitím tohoto vztahu a dosazením zavedených konstant máme

$$\frac{K + c_{A0} - x}{c_{A0} - x} dx = v_{\max} d\tau.$$

Čas, za který klesne koncentrace A na 10 %, tj. $x = 0,9c_{A0}$, dostaneme integrací

$$v_{\max}\tau = \int_0^{0,9c_{A0}} \left(\frac{K}{c_{A0} - x} + 1 \right) dx = K \ln \left(\frac{c_{A0}}{c_{A0} - 0,9c_{A0}} \right) + 0,9c_{A0}$$

a konečně

$$\tau = \frac{1}{v_{\max}} (K \ln 10 + 0,9c_{A0}) .$$

Za účelem získání číselné hodnoty bychom museli odhadnout rychlostní konstanty, které se však měří experimentálně. Koncentrace reaktantů taktéž nelze dobře odhadnout, takže se musíme spokojit pouze s obecným výsledkem.

Úloha VI.5 . . . toaleták

Roli s papírem uchytníme do ložiska (bez tření) a necháme odmotávat konec papíru (zanedbáme lepení vrstev na sebe, tření v ložisku a hmotnost ložiska). Jakou úhlovou rychlostí se bude otáčet rulička potom, co se odmotá všechen papír? Známe poloměr a hmotnost ruličky, délkovou hustotu papíru, jeho celkovou hmotnost a délku. Uvažujte, že se papír bude odmotávat do nekonečné hloubky.

Bonus Uvažujte, že papír dopadne na zem dříve, než se celý odmotá.

Kdybychom se do řešení chtěli pouštět standardním postupem a počítat pohybovou rovnici odmotávajícího se pruhu papíru a rotujícího tlustého válce, sice bychom k výsledku došli, ale úloha by byla spíš cvičení na derivace a integrály. Podívejme se, jak úloha vypadá z energetického hlediska.

Pojmenujme si nejprve zadané veličiny. Nechť L je celková délka papíru, λ je jeho délková hustota (platí, že hmotnost celého papíru je $M = \lambda L$) a m je hmotnost ruličky. Prázdná rulička má poloměr R .

Potom, co se všechen papír odmotá, zůstane nám rotující dutý válec (rulička) a pruh papíru, který se v tuto chvíli dotýká válce už jen v jednom místě. Každá z těchto částí má určitou kinetickou energii, válec rotační (E_R), pruh papíru translační (E_T). Celková energie soustavy je

$$E_k = E_R + E_T = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 . \quad (42)$$

V tomto vztahu vystupuje moment setrvačnosti ruličky ($J = mR^2$), úhlová rychlost ruličky ω a rychlost pruhu papíru v okamžiku odmotání v . Protože sledujeme právě tento stav, můžeme psát $v = R\omega$, protože rulička i konec papíru se v tuto chvíli musí točit stejně rychle, jelikož mezi nimi ještě existuje pevné spojení. Když víme, že $M = \lambda L$, můžeme energii role a papíru přepsat na

$$E_k = \frac{\omega^2 R^2}{2} (m + \lambda L) . \quad (43)$$

Zamysleme se nyní nad tím, jakou hodnotu bychom napsali na druhou stranu energetické bilance. Odpověď je jasná – je to práce (označme ji W). Jediná síla,

kteřá v soustavě práci koná, je tíhová síla F , která urychluje padající pruh papíru. Protože je síla přímo úměrná délce papíru l ($F = \lambda l g$), nemůžeme ji napsat jednoduše jako součin její velikosti s délkou dráhy, po které působí, ale musíme si pomoci integrální berličkou, tj., že

$$W = \int F \, dl.$$

Budeme uvažovat, že síla působí po dráze L (tj. celé délce papíru), takže předchozí vztah můžeme přepsat a vyřešit

$$W = \int_0^L \lambda l g \, dl = \lambda g \left[\frac{l^2}{2} \right]_0^L = \frac{1}{2} \lambda g L^2. \quad (44)$$

Energetická bilance nám říká, že součet kinetických energií (43) musí být roven vykonané práci (44), tedy

$$\frac{\omega^2 R^2}{2} (m + \lambda L) = \frac{1}{2} \lambda g L^2.$$

Vyřešením této rovnice pro ω dostáváme vztah

$$\omega = \frac{L}{R} \sqrt{\frac{\lambda g}{m + \lambda L}}. \quad (45)$$

Zbývá jen vyřešit bonusovou část. Tam bohužel nelze použít energetický přístup, protože při dopadu na zem dochází k nepružným srážkám. Uvažujme, že jsou dokonale nepružné, tj. veškerá energie se pohltí při dopadu, a tudíž neexistuje síla, kterou by působila země přes papír na ruličku.

Zaměříme se nejdříve na okamžik, ve kterém se konec odmotávajícího se papíru právě dotkne země. Budou nás zajímat dvě veličiny, aktuální poloměr toaletního papíru r_{p0} a aktuální úhlová rychlost ruličky s papírem ω_{r0} . Dosud jsme se nemuseli zabývat tím, že papír má nějakou tloušťku – v našich úvahách ji bude reprezentovat počáteční poloměr papíru na roli r_0 . Také se bude hodit označit si hloubku role d a objemovou hustotu papíru ϱ . Pomocí počáteční hmotnosti papíru m_0 ji budeme moci svázat s dříve definovanou hustotou λ a délkou L . Z geometrie situace víme, že

$$\begin{aligned} m_0 &= \lambda L \\ m_0 &= \pi d \varrho (r_0^2 - R^2), \end{aligned}$$

z čehož vyplývá, že $\pi d \varrho = \lambda L / (r_0^2 - R^2) = A$. Tuto substituci budeme moci využít, když budeme určovat r_{p0} po odmotání papíru délky h .

$$\lambda L - \lambda h = \pi d \varrho (r_{p0}^2 - R^2),$$

což po úpravách dá

$$r_{p0} = \sqrt{R^2 + \frac{\lambda(L-h)}{A}}. \quad (46)$$

Úhlovou rychlost ω_{r_0} určíme podobně jako v hlavní části úlohy, z energetické bilance. Na levé straně bude opět stát součet kinetických energií (rotační a translační)

$$E_k = E_{\text{rot}} + E_{\text{trans}} = \frac{1}{2} (J_r + J_p) \omega_{r_0}^2 + \frac{1}{2} \lambda h v^2.$$

Stejně jako dříve víme, že $v = \omega r$, v tomto případě $v = \omega_{r_0} r_{p_0}$. Na pravou stranu rovnice dosadíme opět vykonanou práci podle vztahu (44), tentokrát ale jen po dráze rovné h , takže vyřešíme rovnici

$$\frac{1}{2} (J_r + J_p) \omega_{r_0}^2 + \frac{1}{2} \lambda h \omega_{r_0}^2 r_{p_0}^2 = \frac{1}{2} \lambda g h^2.$$

Pokud dosadíme za moment setrvačnosti ruličky, resp. papíru $J_r = mR^2/2$, resp.

$$J_p = \frac{1}{2} \lambda (L - h) (r_{p_0}^2 - R^2),$$

dostaneme výsledek

$$\omega_{r_0} = \sqrt{\frac{2\lambda g h^2}{mR^2 + \lambda(L-h)(r_{p_0}^2 - R^2) + 2\lambda h r_{p_0}^2}}. \quad (47)$$

Nyní se podíváme na situaci z hlediska druhé impulsové věty ($J\varepsilon = M_F$), ze které bychom mohli určit, jak se bude soustava chovat dál. Rozeberme si jednotlivé členy. Začneme momentem setrvačnosti J . Veličiny závislé na čase označme např. jako $b(t)$.

$$J = J_r + J_p = \frac{1}{2} m R^2 + \frac{1}{2} \lambda A (r_p(t)^2 - R^2)^2. \quad (48)$$

Zde jsme využili geometrie ruličky a vztahu pro moment setrvačnosti dutého válce. Dalším jednoduchým členem je moment síly M_F . Síla, která ruličku roztáčí, je totiž konstantní a rovná tíže papíru o délce h . Působíště síly se ovšem přibližuje ose otáčení, je vždy ve vzdálenosti $r_p(t)$ od ní.

$$M_F = \lambda h g r_p(t). \quad (49)$$

Zbývá už jen vyjádřit úhlové zrychlení ε . Zde si pomůžeme menším derivačním trikem trikem. Platí, že

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dr_p} \frac{dr_p}{dt}.$$

První část ($d\omega/dr_p$) využijeme později, zbývá zjistit, jak přepsat druhou (dr_p/dt). Víme, že z papíru každou chvíli ubude hmotnost $dm_p = \lambda v dt$, tudíž, pokud opět využijeme toho, že $v = \omega r_p$, dostaneme

$$\frac{dm_p}{dt} = \lambda \omega r_p.$$

Změna hmotnosti jde ovšem vyjádřit i jinak – přes geometrii. Hmotnost papíru je totiž $m_p = A (r_p(t)^2 - R^2)$, což po zderivování dá

$$\frac{dm_p}{dt} = 2A r_p(t) \frac{dr_p}{dt}.$$

Pokud porovnáme oba způsoby zápisu dm_p/dt , najdeme vztah pro dr_p/dt .

$$\frac{dr_p}{dt} = \frac{\omega\lambda}{A}. \quad (50)$$

Spojíme-li tedy členy (48), (49) a (50) zpět do impulsové věty, dostaneme

$$\frac{1}{2} \left[mR^2 + A (r_p(t)^2 - R^2) \right] \frac{d\omega}{dr_p} \frac{\omega\lambda}{A} = \lambda h g r_p(t),$$

což je jednoduchá diferenciální rovnice, kterou lze vyřešit separací proměnných. V separeném tvaru bude vypadat následovně:

$$\omega d\omega = \frac{2A h g r_p}{mR^2 + A (r_p^2 - R^2)^2} dr_p.$$

Pokud zintegrujeme obě strany, dostaneme

$$\left[\frac{\omega^2}{2} \right]_{\omega_{r_0}}^{\omega_r} = \left[\frac{gh}{R} \sqrt{\frac{A}{m}} \operatorname{arctg} \left(\frac{r_p^2 - R^2}{R} \sqrt{\frac{A}{m}} \right) \right]_{r_{p_0}}^R,$$

přičemž indexy u hranatých závorek vyjadřují tzv. meze integrace. Ty jsme určili z již dříve známých počátečních podmínek (dolní meze), resp. jsou zřejmé – ω_r je hledaná úhlová rychlost a R je poloměr ruličky bez papíru. Odečteme-li meze a všimneme si, že pro $r_p = R$ se odpovídající člen vynuluje kvůli funkci arctg , dostaneme

$$\omega_r = \sqrt{\omega_{r_0}^2 - \frac{2gh}{R} \sqrt{\frac{A}{m}} \operatorname{arctg} \left(\frac{r_{p_0}^2 - R^2}{R} \sqrt{\frac{A}{m}} \right)}.$$

Do tohoto výsledku, který představuje úhlovou rychlost ruličky po odmotání všeho papíru do hloubky $h < L$, zbývá již jen dosadit z (46), (47) a desubstituovat A , nicméně to si již laskavý čtenář udělá za cvičení sám.

Úloha VI.P . . . světlo přesně podle norem

Navrhněte rozmístění světel nad stolem tak, abyste dodrželi normy pro osvětlení. K dispozici máte dostatečné množství kompaktních zářivek (lidově úsporných žárovek) se světelným tokem $P = 1\,400$ lm. Normy říkají, že pro běžné pracovní úkony má být osvětlení pracovní plochy $E = 300$ lx. Zářivky můžete umístit do libovolných pozic na strop ve výšce $H = 2$ m nad pracovní plochu. Pro jednoduchost uvažujte čtvercovou pracovní plochu o straně $a = 1$ m a zářivku považujte za bodový izotropní zdroj záření. Odraz a rozptyl světla zanedbejte.

Připomeňme, že světelný tok odpovídá celkové světelné energii, která opustí zdroj za jednotku času. Jednotkou světelného toku však není watt (J/s), nýbrž lumen.⁶⁷ Osvětlení je pak světelný tok vztahovaný na plochu kolmou ke směru záření. Není-li plocha kolmá, uplatní se jen část toku odpovídající průmětu na normálu plochy, což můžeme pohodlně vektorově zapsat jako

$$E = \frac{P}{4\pi|\mathbf{R}|^2} \cos \alpha = \frac{P}{4\pi|\mathbf{R}|^2} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}$$

kde \mathbf{R} je relativní poloha zdroje vůči osvětlovanému místu, \mathbf{n} je normála osvětlované plošky ($|\mathbf{n}| = 1$) a α je úhel mezi těmito dvěma vektory. Poznamenejme, že výše uvedený vzorec předpokládá zdroj, jenž svítí do všech směrů stejně.

Jedna kompaktní zářivka (dále KZ) osvětlí tedy bod \mathbf{r} na stole následovně

$$E_i(\mathbf{r}) = \frac{P}{4\pi|\mathbf{R}_i|^3} \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_i.$$

Počátek souřadné soustavy jsme zvolili ve středu stolu, takže normála povrchu stolu $\mathbf{n} = (0, 0, 1)^T$ a $\mathbf{R}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}$, kde \mathbf{r}_i je poloha i -té KZ. Vzhledem k charakteru osvětlení můžeme příspěvky k osvětlení od jednotlivých KZ sčítat, celkem tedy

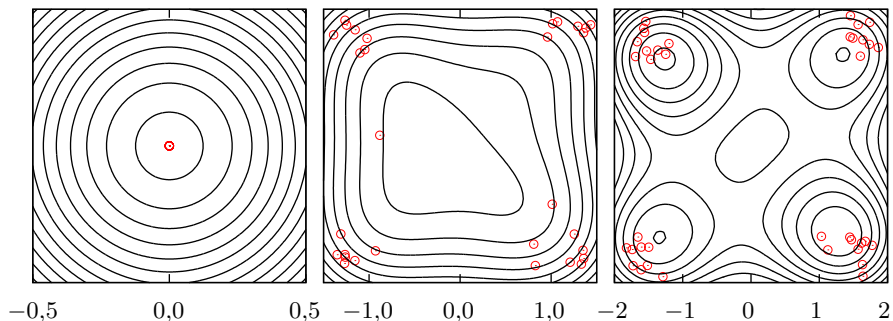
$$E(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^k E_i(\mathbf{r}),$$

kde počítáme s použitím k KZ.

Nyní přejdeme k číselným hodnotám. Nejprve se pokusme odhadnout, kolik budeme minimálně potřebovat KZ. Dosadíme-li hodnoty pro osvětlení přesné pod jednu KZ, vyjde $E \approx 28$ lx, což normu řádově nesplňuje. Vyjdeme z jednoduchého rozmístění všech žárovek nad středem stolu (bodový zdroj :-). Pod jedenácti KZ je již $E \approx 306$ lx, ale to bychom nesplnili normu na rozích stolu ($E \approx 257$ lx). Abychom s tímto rozmístěním normu splnili na celé ploše stolu, stačí, když ji zkontrolujeme na (libovolném) rohu, jelikož ten je od středu nejhůře osvětlen (kvůli vzdálenosti i úhlu dopadu). Tím dojdeme k počtu $k = 13$, s nímž i roh osvětlený $E \approx 303$ lx splňuje normu.

Z výše uvedených čísel se nabízí otázka, zda bychom vhodnějším rozmístěním jedenácti nebo dvanácti žárovek nedosáhli i dostatečného osvětlení rohů. Jelikož prostor netriviálních rozmístění je obtížně analyzovatelný ($\langle -a/2, a/2 \rangle^{22}$, respektive $\langle -a/2, a/2 \rangle^{24}$), předpokládáme vzhledem k symetrii úlohy řešení, které je invariantní vůči rotaci o 90° . Další zjednodušení budí viz využití pouze úhlopříčky. Umístíme $\lfloor k/4 \rfloor$ KZ na každou úhlopříčku ve vzdálenosti $-t$ a t od středu čtverce a $(k \bmod 4)$ KZ do středu. Prostor řešení je pak už jen jednodimenzionální a maximalizací osvětlení rohů dostáváme optimum $t = 0$ m, takže triviální řešení s $k = 13$ je v této situaci optimální z hlediska k .

⁶⁷Pro monochromatický zdroj o frekvenci 540 THz jsou svázány poměrem 683 lm/W.

$k = 13, E_{\min} = 303 \text{ lx}$ $k = 30, E_{\min} = 300 \text{ lx}$ $k = 38, E_{\min} = 300 \text{ lx}$ 

Obr. 16: Osvětlení stolů velikosti $a = 1 \text{ m}$ („nežíhané“ triviální řešení), $a = 3 \text{ m}$ a $a = 4 \text{ m}$ z výšky $h = 2 \text{ m}$.

Závěrem poznamenejme, že kdyby byl poměr h/a menší, triviální řešení by již nebylo optimální (co do počtu KZ pro splnění normy) a bylo by nutné použít nějakou metodu vícedimenzionální (globální) optimalizace, např. simulované žíhání.⁶⁸ Příklad takových výsledků je na obrázku 16, kde je dobře vidět, že zcela obecná optimalizační metoda si poradila (využili jsme implementaci simulovaného žíhání v programu GNU Octave⁶⁹), ale s využitím dalších omezení (např. ona symetrie) bychom dosáhli i lepších výsledků.

⁶⁸Viz 1. díl seriálu 21. ročníku (<http://fykos.cz/archiv/rocnik21/serial>).

⁶⁹<http://fykos.cz/rocnik27/6-6-samin.zip>



Zadání experimentálních úloh

Úloha I.E ... Ohni to, neohýbej to!

8 bodů

Změřte vzdálenosti vrypů na difrakční fólii pomocí světla ze třech různobarevných LED-diod. *(řešení str. 85)*

Úloha II.E ... kutululů

8 bodů

Máme nakloněnou rovinu, na které postrčíme míček, aby se začal kutálet bez prokluzování směrem nahoru po nakloněné rovině. Změřte závislost rychlosti míčku na čase a určete závislost ztráty energie na čase. Nakloněná rovina nechť svírá úhel s vodorovnou rovinou úhel $\alpha \sim 10^\circ$. Nezapomeňte popsat parametry vašeho míčku. *(řešení str. 92)*

Úloha III.E ... viskozoidní

8 bodů

Každá kapalina má svou specifickou viskozitu. Pokuste se doma vyrobit průtokový viskozimetr a změřit relativní viskozitu několika vhodných tekutin (alespoň tří) vůči vodě. Vaše výsledky porovnejte s údaji vyhledanými na internetu. *(řešení str. 97)*

Úloha IV.E ... někdo to rád vlažné

8 bodů

Změřte závislost teploty na čase v uvařeném šálku čaje. Proměřte klidný případ i čaj míchaný lžičkou. Dále ověřte, že doba vychladnutí na pitnou teplotu nezávisí na tom, zda se s čajem míchá či nikoli. *(řešení str. 101)*

Úloha V.E ... gumipuk

8 bodů

Závaží o hmotnosti m na gumičce délky l_0 je zavěšeno v pevném bodě o souřadnicích $x = 0$ a $y = 0$. Z osy x , která je horizontálně, závaží pouštíme. Jaká bude závislost nejnižšího dosaženého bodu na poloze na ose x ? *(řešení str. 107)*

Úloha VI.E ... želatinová rychlost světla

8 bodů

Určete rychlost světla v průhledném želatinovém dortu, který sami připravíte. Nezapomeňte popsat jeho složení.

Nápověda Sežeňte si na to třeba laser nebo mikrovlnku.

(řešení str. 112)



Řešení experimentálních úloh

Úloha I.E ... Ohni to, neohýbej to!

Změřte vzdálenosti vrypů na difrakční fólii pomocí světla ze třech různobarevných LED-diod.

Teorie

Dopadá-li světlo na mřížku, dochází k difrakci. Protože difrakci pozorujeme ve vzdálenosti l velké vzhledem ke vzdálenosti vrypů d na mřížce a velikosti osvětlené části mřížky, můžeme užít aproximace, že paprsky dopadající do daného místa na stínítko jsou rovnoběžné. Dle obrázku 17 platí

$$\sin \alpha = \frac{\Delta}{d}. \quad (51)$$

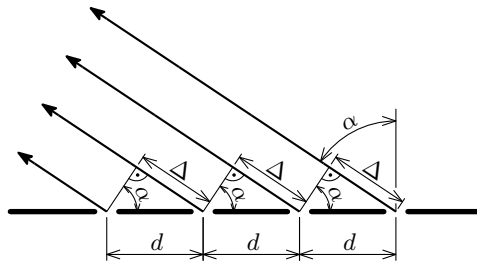
Aby v místě na stínítku určeném úhlem α (viz obrázek 18) došlo ke konstruktivní interferenci (a bylo v tomto místě tedy lokální maximum a my na stínítku viděli světlo), musí být dráhový rozdíl Δ roven celočíselnému násobku vlnové délky λ , tedy

$$\Delta = k\lambda, \quad k \in \mathbb{Z},$$

odkud již dostaneme podmínku pro maximum

$$\sin \alpha = \frac{k\lambda}{d}. \quad (52)$$

Obdobným způsobem bychom dostali podmínku pro minimum (pro které musí být dráhový rozdíl roven lichému násobku poloviny vlnové délky). Minima však v našem experimentu detekovat nebudeme.



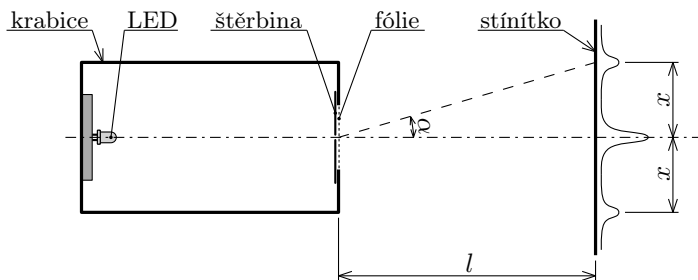
Obr. 17: Difrakce na mřížce, světlo dopadá zespodu kolmo na mřížku, pozorujeme pod úhlem α .

Budeme měřit polohu maxim na stínítku, nikoliv úhel. Z obrázku 18 plyne

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}}. \quad (53)$$

Z rovnic (52) a (53) pak vyjádříme vzdálenost vrypů na difrakční fólii

$$d = \frac{k\lambda\sqrt{x^2 + l^2}}{x}. \quad (54)$$



Obr. 18: Uspořádání experimentu, za stínítkem je schematicky znázorněn očekávaný průběh intenzity.

Dosud jsme uvažovali, že difrakční fólie je rovnoběžná se stínítkem. To se nám však v praxi naprosto přesně nepodaří. Jestliže stínítko otočíme, obraz na něm se zdeformuje tak, že na jedné straně budou maxima blíže, na druhé dále. Jestliže je úhel malý, budou rozdíly menší. Uvažujme, že stínítko svírá s osou fólie úhel β (v ideálním případě $\beta = 90^\circ$). Pak dle sinové věty a za využití vlastností funkce sinus platí

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{l}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{l}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Tento vztah bychom měli použít místo vztahu (53). Dále uvažujme nad tím, co se stane, nebude-li naopak fólie rovnoběžná s osou, ale bude s ní svírat úhel γ (v ideálním případě $\gamma = 90^\circ$). Uvažujme zdroj světla v nekonečnu (resp. tak daleko, aby vzdálenost zdroje od fólie byla mnohem větší než vzdálenost vrypů na fólii). Pak světlo, které v daný okamžik opustilo zdroj, dorazí na některé části fólie dříve, na některé naopak později. Potom se dráhový rozdíl při průchodu dvěma sousedními otvory mřížky zvětší o $d \cos \gamma$ a můžeme upravit vztah (51) na

$$\sin \alpha + \cos \gamma = \frac{\Delta}{d}.$$

Pak můžeme vyjádřit vzdálenost vrypů na difrakční fólii

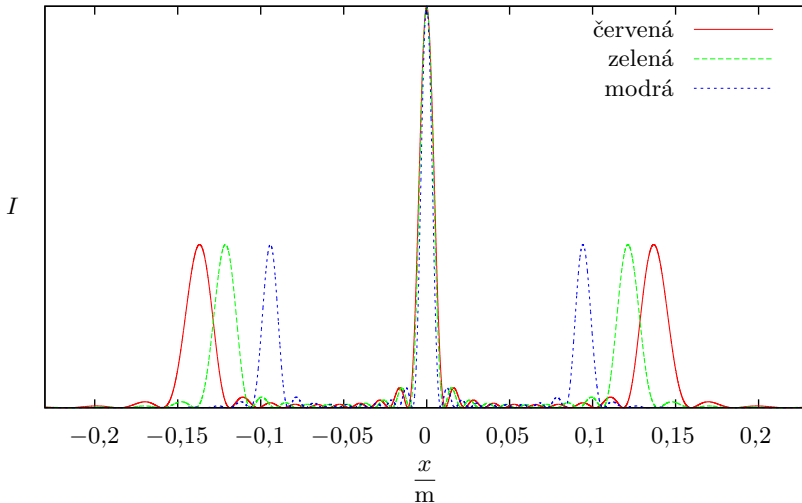
$$d = \frac{k \lambda}{\frac{x \sin \beta}{\sqrt{x^2 + l^2 - 2xl \cos \beta}} + \cos \gamma},$$

příčměž pro $\beta = \gamma = 90^\circ$ samozřejmě dostáváme vztah (54). Jelikož jde o poměrně složitý výraz, budeme dále předpokládat, že fólie i stínítko jsou na osu dokonale kolmé.

Úvahou výše jsme zjistili polohu minim a maxim, nedokážeme však jednoduše zjistit závislost intenzity na úhlu. To by bylo složitější, proto zde postup neuvádíme. Pro zájemce však zmíníme, že se pro $\beta = \gamma = 90^\circ$ dá popsat vztahem

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \frac{\pi p \sin \alpha}{\lambda}}{\frac{\pi p \sin \alpha}{\lambda}} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi N d \sin \alpha}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin \alpha}{\lambda}} \right)^2, \quad (55)$$

kde I_0 je amplituda, N je počet otvorů na mřížce a p je jejich šířka. První závorka (tzv. otvorový faktor) popisuje difrakci na otvoru šířky p (tedy na jednom otvoru mřížky). Druhá závorka (tzv. mřížkový faktor) pak popisuje interferenci záření z N otvorů vzdálených d . Graf této funkce po dosažení vztahu (53) uvádíme na obrázku 19.



Obr. 19: Teoretická závislost intenzity na poloze na stínítku pro všechny tři vlnové délky koherentního světla, vzdálenost fólie od stínítka 20 cm, počet vrypů $N = 10$, periodu mřížky $d = 1,1 \mu\text{m}$ a šířku otvoru v mřížce $p = 0,55 \mu\text{m}$.

Doteď jsme předpokládali, že světlo, které pro experiment používáme, je koherentní. Že tomu tak úplně není, ukážeme, vypočítáme-li koherentní délku, tedy takovou vzdálenost, na které můžeme záření považovat za koherentní, jako

$$l_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda},$$

kde $\Delta\lambda$ je tzv. pološířka čáry (tedy šířka v polovině výšky). V návodu byly zadány vlnové délky s nejistotou 15 nm. Odhadneme-li pološířku na $\Delta\lambda = 30$ nm, dostaneme např. pro zelenou barvu $l_c = 11 \mu\text{m}$, což je vzdálenost 10 vrypů na použité mřížce. Osvětlíme-li vrypů více (počet osvětlených vrypů budeme omezovat šterbinou), pak spolu bude interferovat vždy jen světlo z několika otvorů vedle sebe, u zbytku dojde pouze ke sčítání intenzit. Můžeme si představit, že široká šterbina představuje mnoho šterbin vedle sebe, vždy o kousek posunutých. Světlo z každé této malé šterbiny bude koherentní a po průchodu mřížkou vytvoří difrakční obrazec, z každé šterbiny o kousek posunutý. Naopak záření z různých šterbin koherentní není, proto se tyto obrazce prostě sečtou (sečtou se intenzity), což vzhledem k tomu, že jsou sčítané obrazce navzájem posunuté, způsobí rozšíření maxima na stínítku a prakticky zánik (resp. splynutí) maxim s nízkou intenzitou viditelných na obrázku 19.

Rozšíření čáry na stínítku se dá snadno vysvětlit také tím, že světlo vycházející z LED diod není z principu monochromatické (což samozřejmě s tvrzením výše úzce souvisí), tedy obsahuje různé vlnové délky. Různé vlnové délky pak mají difrakční maxima v různé vzdálenosti.

Měření

Nyní již k samotnému uspořádání experimentu, které je vyobrazeno na obrázku 18. Všechny tři diody byly připevněny pod sebe na nepájivé kontaktní pole, které bylo přilepeno na jednu vnitřní stěnu krabice. Na opačné straně byl v krabici otvor s úzkou svisle orientovanou šterbinou (dvě vedle sebe přilepené žiletky), za kterou byla přilepena difrakční fólie, přičemž vrypy v ní byly orientovány svisle. Diody byly používány vždy po jedné, bez rezistoru a napájeny zdrojem konstantního proudu 20 mA, což je maximální proud, který může dle návodu dlouhodobě tímto typem diod protékat. Difrakční obrazec byl promítán na bílé stínítko opatřené pravítkem. Obrazec byl fotografován, přičemž v místnosti byla tma.

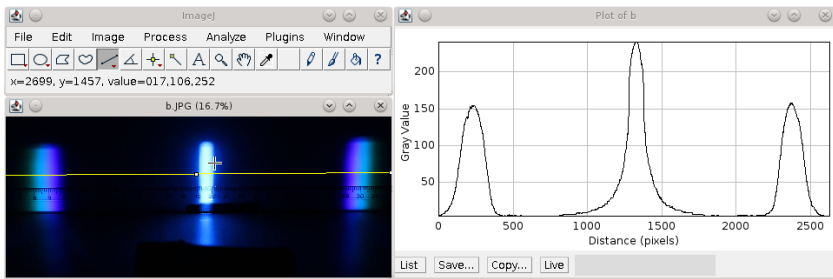
Při experimentování bylo třeba vyzkoušet optimální šířku šterbiny. Příliš úzká šterbina znamená malou intenzitu na stínítku. Při velmi malé šířce šterbiny bychom navíc pozorovali i difrakci na ní, což je v našem případě nepatřičné. Pokud je šterbina naopak příliš široká, difrakční proužky se rozšiřují a maxima intenzity nejsou tak ostrá, nalezení středu proužku je pak méně přesné, a tedy nejistota polohy maxima roste. Také bylo i při pohledu okem patrné, že světlo vycházející z LED není monochromatické, protože po průchodu mřížkou se na stínítku v případě modré LED objevila i zelená barva, v případě zelené barva červená.

Fotografie byla následně zpracována v programu Matlab.⁷⁰ Nejprve byl od fotografií odečten černý snímek (tedy taková fotografie, která byla pořízena za stejné expozice, ale s vypnutým zdrojem světla), aby bylo možné eliminovat světlo nepocházející z LED. To se ukázalo nutné zejména u zeleného světla, u kterého bylo

⁷⁰Zájemci si skript pro Matlab včetně ukázkových fotografií mohou stáhnout na <http://fykos.cz/ročník27/1-e.zip>. Po drobných úpravách by měl jít spustit též v Octave. Do skriptu je třeba vložit jména souborů s fotografiemi, polohu difrakčního obrazce na nich a délku měřítka v pixelech. Po spuštění načte obrázky, najde maxima, vykreslí profil intenzity a vypočítá vzdálenost vrypů na fólii včetně nejistoty.

vzhledem k malé intenzitě třeba použít expoziční čas v řádu desítek sekund. Následně byl obrázek převeden do stupňů šedi a byly odečteny hodnoty pixelů podél zadané úsečky, na které byl vidět difrakční obrazec. Z fotografie pořízené za světla byla v pixelech odečtena délka pravítka známé délky, čímž byla kalibrována délková osa. Tímto byla zjištěna intenzita podél obrazce, resp. přesněji řečeno nějaká bezrozměrná veličina (dále ji nazýváme intenzitou), která je na intenzitě závislá. Poté již bylo možné vykreslit závislost intenzity na poloze na stínítku (graf na obrázku 21) a odečíst polohy difrakčních maxim, což bylo kvůli eliminaci šumu provedeno pomocí proložení polynomem druhého stupně v okolí maxima a následně určení maxima tohoto polynomu.

Kromě vlastnoručně napsaného skriptu pro Matlab je možné použít i již hotové řešení, např. volně dostupný program ImageJ⁷¹, který umí mj. vykreslit profil intenzity podél zadané úsečky a data uložit pro další zpracování, viz obrázek 20.



Obr. 20: Pomocí programu ImageJ je možné vykreslit průběh intenzity podél zadané úsečky.

Graf na obrázku 21 končí prvním difrakčním maximem, protože další maxima nebyla viditelná.

Vlnové délky použitých zdrojů světla (LED diod) známe, v případě červené LED je to (623 ± 15) nm, pro zelenou (572 ± 15) nm a pro modrou (470 ± 15) nm.

Měřili jsme vzdálenost maxim prvního řádu od maxima druhého řádu, což jsou pro každou zpracovávanou fotografii (pro danou vlnovou délku λ a danou vzdálenost stínítka od mřížky l) dvě hodnoty – x_1 a x_2 . Z každé z nich bylo následně možné vypočítat vzdálenost vrypů d_1 , resp. d_2 . Všechny tyto hodnoty uvádím v tabulce 1.

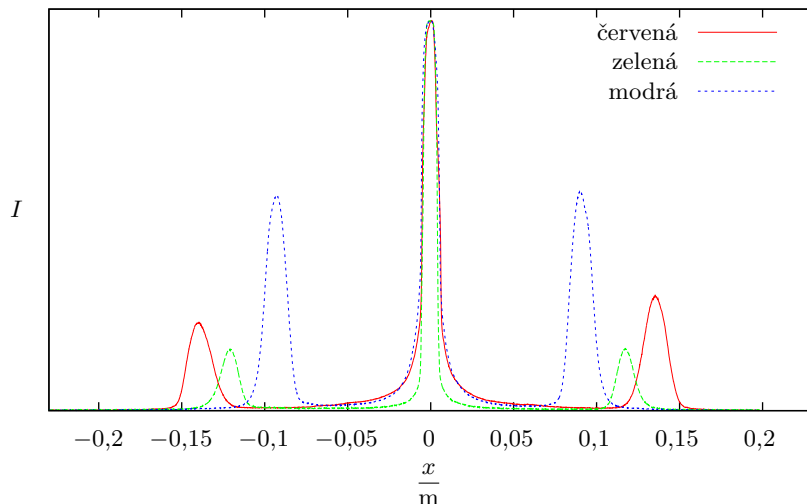
Nejistoty měření

Nejistoty vlnové délky máme zadané na $\Delta\lambda = 15$ nm.

Vzdálenost l difrakční fólie od stínítka byla měřena pravítkem, nejistotu odhadneme na $\Delta l = 3$ mm.

Pokud bychom polohu difrakčních maxim určovali pouhým okem, byla by její nejistota poměrně velká, závisela by na šířce štěrbině (při široké štěrbině bude

⁷¹<http://rsbweb.nih.gov/ij>



Obr. 21: Změřená závislost intenzity na poloze na stínítku pro všechny tři barvy LED a pro vzdálenost fólie od stínítka 20 cm.

Tabulka 1: Naměřené a z nich vypočítané hodnoty.

$\frac{\lambda}{\text{nm}}$	$\frac{l}{\text{mm}}$	$\frac{x_1}{\text{mm}}$	$\frac{x_2}{\text{mm}}$	$\frac{d_1}{\mu\text{m}}$	$\frac{d_2}{\mu\text{m}}$
470 ± 15	150 ± 3	69 ± 1	71 ± 1	$1,12 \pm 0,04$	$1,10 \pm 0,04$
470 ± 15	200 ± 3	93 ± 1	91 ± 1	$1,11 \pm 0,04$	$1,13 \pm 0,04$
470 ± 15	250 ± 3	117 ± 1	116 ± 1	$1,11 \pm 0,04$	$1,12 \pm 0,04$
572 ± 15	150 ± 3	93 ± 1	92 ± 1	$1,09 \pm 0,03$	$1,09 \pm 0,03$
572 ± 15	200 ± 3	121 ± 1	118 ± 1	$1,11 \pm 0,03$	$1,13 \pm 0,03$
572 ± 15	250 ± 3	155 ± 1	156 ± 1	$1,09 \pm 0,03$	$1,08 \pm 0,03$
623 ± 15	150 ± 3	103 ± 1	102 ± 1	$1,10 \pm 0,03$	$1,11 \pm 0,03$
623 ± 15	200 ± 3	140 ± 1	136 ± 1	$1,09 \pm 0,03$	$1,11 \pm 0,03$
623 ± 15	250 ± 3	170 ± 1	171 ± 1	$1,11 \pm 0,03$	$1,10 \pm 0,03$

proužek široký a střed se bude hledat obtížně) a vzdálenosti fólie od stínítka. Protože jsme však pomocí fotoaparátu změřili profil intenzity, můžeme maxima najít mnohem přesněji. V našem případě bychom odhadli nejistotu na $\Delta x = 1$ mm.

Z výše uvedených byla nejistota typu B (tedy nejistota způsobená např. nepřesností použitých měřidel) vypočítána (a uvedena u veličin d_1 a d_2 v tabulce 1)

pomocí zákona šíření nejistot jako

$$\Delta_B d = \sqrt{\left(\Delta\lambda \frac{\partial d}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\Delta l \frac{\partial d}{\partial l}\right)^2 + \left(\Delta x \frac{\partial d}{\partial x}\right)^2}.$$

Dále budeme uvažovat $\Delta_B d = 0,04 \mu\text{m}$.

Protože bylo zpracováno 9 snímků, dostali jsme 18 různých hodnot d . Z těchto hodnot byla vypočítána výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru. Po vynásobení Studentovým koeficientem dostáváme nejistotu typu A $\Delta_A d = 0,01 \mu\text{m}$.

Nakonec vypočteme výslednou nejistotu

$$\Delta d = \sqrt{(\Delta_A d)^2 + (\Delta_B d)^2} = 0,05 \mu\text{m}.$$

Diskuse výsledků

Po vypočítání vzdálenosti vrypů těž již dokážeme (ačkoliv jen pro červenou a zelenou) vysvětlit, proč byla viditelná pouze maxima prvního řádu. Dle vztahu (52) musí platit $k\lambda < d$ (funkce sinus je vždy menší nebo rovna 1, nicméně hodnota 1 by znamenala pravý úhel, což na stínítku nezachytíme), což pro změřenou hodnotu d a zadané vlnové délky červeného a zeleného světla platí pouze pro $k = 1$. Pro modrou barvu je přípustné i $k = 2$, nicméně maximum druhého řádu těž nebylo viditelné. Ve vztahu (55) určuje intenzitu maxim druhá závorka. Dle velikosti otvoru v difrakční mřížce se může stát, že tento člen bude v místě maxima členu prvního nulový, pak by celý výraz byl nulový, a tedy maximum by v daném místě nebylo. Také se může stát, že intenzita bude tak malá, že maximum nebudeme schopni detekovat.

Srovnáme-li teoretickou závislost intenzity na obrázku 19 a naměřenou na obrázku 21, objevíme několik rozdílů. Jedním z nich jsou chybějící malá maxima. Pro výpočet teoretické závislosti byl pro názornost použit počet vrypů $N = 10$. Ve skutečnosti však bylo vzhledem k šířce štěrbin asi 0,5 mm osvětleno asi 500 otvorů. Se vzrůstajícím počtem otvorů intenzita těchto maxim klesá (zájemci si mohou zkusit vykreslit vztah (55) pro různé parametry). Druhým rozdílem je rozdílná intenzita maxim prvního řádu pro různé vlnové délky. To je možné připsat způsobu záznamu a následném zpracování. Maxima nultého řádu neměla po zpracování stejnou intenzitu, což bylo způsobeno rozdílnou svítivostí jednotlivých diod, a tedy nutností přizpůsobovat expoziční čas (přičemž nebylo možné jednoduše trefit takový, aby byla intenzita stejná).

Závěr

Pomocí analýzy fotografií difrakčních obrazců byla změřena vzdálenost vrypů na difrakční fólii $d = (1,11 \pm 0,05) \mu\text{m}$.

Úloha II.E . . . kutululů

Máme nakloněnou rovinu, na které postrčíme míček, aby se začal kutálet bez prokluzování směrem nahoru po nakloněné rovině. Změřte závislost rychlosti míčku na čase a určete závislost ztráty energie na čase. Nakloněná rovina necht svírá úhel s vodorovnou rovinou úhel $\alpha \sim 10^\circ$. Nezapomeňte popsat parametry vašeho míčku.

Teorie

Máme určit závislost ztráty energie na čase, proto se nejprve musíme zamyslet nad tím, jaké druhy energie budeme započítávat do ztrát a jaké nikoli. Do ztrát budeme započítávat různá tření (o vzduch, podložku), ale nebudeme započítávat energii potenciální, kinetickou a rotační.

Zákon zachování mechanické energie říká

$$E_k + E_p = E = \text{konst},$$

tedy součet energie potenciální a kinetické translační a rotační by měl být konstantní, pokud by šlo o pohyb beze ztrát, tj. všechny působící síly by byly konzervativní.

Proto můžeme ztrátovou energii v čase t definovat dle vztahu

$$E_z(t) = E_k(t) + E_p(t) - (E_k(t=0) + E_p(t=0)),$$

kde $E(t=0)$ je energie v čase $t=0$ a $E(t)$ je daná energie měřená v čase t . Poslední dva členy můžeme anulovat vhodnou volbou nulové hladiny potenciální energie. Nulovou hladinu potenciální energie volíme v místě, kam by kulička dojela v případě, že by pohyb probíhal bez tření. Proto pro ztrátovou energii můžeme napsat

$$E_z = E_k + E_p.$$

Pokud kulička rotuje okolo osy kolmé na směr pohybu a paralelní k nakloněné rovině a označíme-li I moment setrvačnosti kuličky vůči této ose, můžeme pro E_k a E_p napsat

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - mgh, \\ E_z &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I \left(\frac{v}{R}\right)^2 - mgh, \\ E_z &= \frac{1}{2}mv^2 \left(1 + \frac{I}{mR^2}\right) - mgs \sin \alpha, \end{aligned}$$

kde jsme označili: α sklon nakloněné roviny, h vertikální vzdálenost od nulové hladiny potenciální energie, s vzdálenost po nakloněné rovině od místa obratu, m hmotnost kuličky a g tíhové zrychlení (definujeme $h, s > 0$).

Pro kouli platí $I/(mR^2) = 2/5$, tj. pro ztrátovou energii můžeme psát

$$\frac{E_z}{m} = \frac{7}{10}v^2 - gs \sin \alpha. \quad (56)$$

Nyní určíme moment setrvačnosti pro homogenní kulovou slupku o vnitřním poloměru R_1 a vnějším R_2 . Vztah pro moment setrvačnosti koule můžeme přepsat do tvaru

$$I_k = \frac{2}{5}mR^2 = \frac{2}{5}\varrho\frac{4}{3}\pi R^5 = \frac{8\pi}{15}\varrho R^5.$$

Moment setrvačnosti kulové slupky bude rozdílem momentů setrvačnosti koulí o poloměrech R_2 a R_1 . Hmotnost této slupky je

$$M = \frac{4}{3}\pi\varrho(R_2^3 - R_1^3).$$

Proto

$$I_s = I_{R_2} - I_{R_1} = \frac{8\pi}{15}\varrho(R_2^5 - R_1^5) = \frac{2}{5}M\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}.$$

Pro tenkou slupku pak proto platí

$$I_{ts} = \frac{2}{3}MR^2.$$

Pro energetické ztráty kulové slupky pak platí

$$\frac{E_z}{m} = \frac{5}{6}v^2 - gs \sin \alpha. \quad (57)$$

Nyní určíme vzdálenost, do které by kulička vyjela od počátku, pokud bychom neuvažovali tření, tj. hladinu nulové potenciální energie. Je-li zrychlení kuličky $a_k = (5/7)g \sin \alpha$ (lze odvodit ze silového rozkladu), pak vzdálenost teoretického bodu obratu je

$$s_{\max} = \frac{v_0^2}{2a_k}, \quad (58)$$

kde v_0 je rychlost, kterou jsme kuličce na začátku udělili.

Měření

Vyrobili jsme nakloněnou rovinu, na které byly připevněny špejle zaručující pohyb kuličky pouze v přímém směru, viz obrázek 22. Délka nakloněné roviny byla $s_0 = (1\,500 \pm 5)$ mm, výška byla $h_0 = (66 \pm 1)$ mm, proto je sklon $\alpha = (2,52 \pm 0,04)^\circ$. Úhel jsme volili záměrně menší, aby měly odporové síly větší vliv.

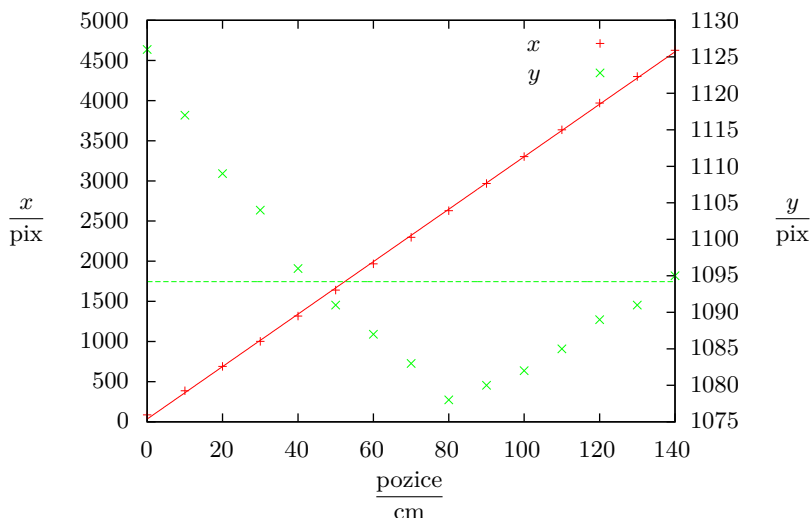


Obr. 22: Fotografie nakloněné roviny

Na nakloněné rovině jsme měli připevněno též délkové měřítko, abychom mohli přepočítat souřadnici v pixelech na polohu kuličky na nakloněné rovině.

Pro kalibraci jsme stejnou situaci vyfotili v rozlišení $5\,184 \times 3\,456$. Zaznamenali jsme si x -ovou a y -ovou souřadnici bodů na měřítku, a to po deseti centimetrech.

Na grafu 23 je uvedena závislost x -ové a y -ové souřadnice na poloze na měřítku. Na levé ose je x -ová souřadnice a na pravé ose je y -ová. Odchyłka od kalibračních přímk je menší než 50 pixelů, což odpovídá 1,5 cm, tedy chyba je v řádu procenta. Upozorňujeme, že na levé a pravé ose je jiná škála. Výsledkem lineární kalibrace je škálovací faktor $\xi = (32,7 \pm 0,2) \text{ pix} \cdot \text{cm}^{-1}$.



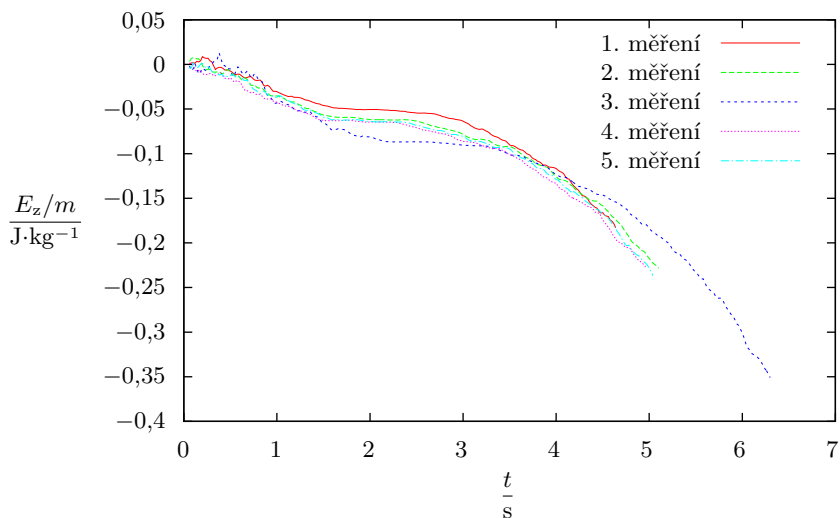
Obr. 23: Kalibrační křivky

K měření jsme použili dvě různé kuličky, jednak kuličku z myši, jednak kuličku z deodorantu. Kulička z myši byla plná, kulička z deodorantu byla prázdná, proto jsme si v teorii připravovali též momenty setrvačnosti pro kulovou slupku.

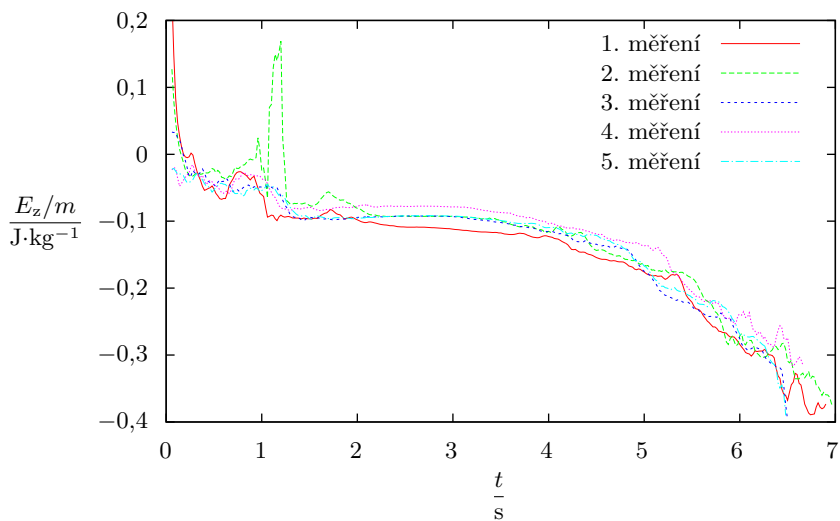
Pomocí programu Tracker jsme určili závislost polohy a rychlosti na čase. Abychom odstranili šum, vypočítali jsme vždy průměr 7 okolních hodnot. Pak dle vztahu (56) určíme závislost energetické ztráty na poloze kuličky z myši a podle vztahu (57) určíme energetické ztráty kuličky z deodorantu.

Na grafech jsou uvedeny měrné ztráty energie, tedy vydělené hmotností odpovídající kuličky. Graf závislosti energetických ztrát pro kuličku z myši je uveden na obrázku 24, též výsledek pro kuličku z deodorantu je uveden na obrázku 25. Poloha v pixelech byla přepočítána pomocí kalibrace ξ a informace, že kamera zabírala stejnou oblast, ale místo 5 184 pixelů měla pouze 1 280 pixelů, dává škálovací faktor pro kameru $\xi_k = (8,06 \pm 0,04) \text{ pix} \cdot \text{cm}^{-1}$. Video bylo pořizováno s frekvencí 50 fps.

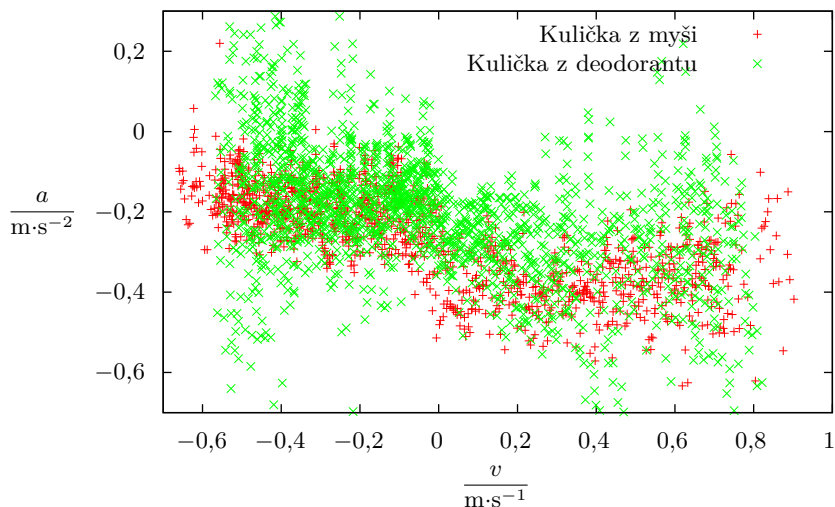
Nejzajímavějším výsledkem by samozřejmě bylo určení závislosti zrychlení kuličky na rychlosti pohybu. Tyto závislosti jsou uvedeny na obrázku 26.



Obr. 24: Závislost ztrátové energie na čase pro kuličku z myši



Obr. 25: Závislost ztrátové energie na čase pro kuličku z deodorantu



Obr. 26: Závislost zrychlení na rychlosti

Diskuse

Křivky závislosti ztrátové energie na čase jsou značně zašumělé, protože určování polohy je limitováno jednak rozlišovací schopností kamery, jednak přesností identifikace polohy kuličky na videozáznamu. Tento šum je vidět, i když jsme použili filtrování. Toto filtrování není možné použít na větším rozsahu, protože by mohly být nesprávně shlazeny extrémy.

Pro kuličku myši odpovídají výsledky předpokladu, tj. ztrátová energie s časem klesá. Je zajímavé, že kulička přijde o větší část energie na sestupné části trajektorie. Odchytky mezi jednotlivými měřeními jsou způsobeny různými počátečními rychlostmi. Jistou malou odchytkou mohlo způsobit gumové opláštění kuličky, které zvětšovalo poloměr, ale nikoli moment setrvačnosti vůči středu. Další odchytkou mohly způsobit kolejničky, kvůli čemuž kulička musela rotovat rychleji. Tyto dvě systematické chyby se ale naštěstí odečítají.

Pro kuličku z deodorantu můžeme pozorovat strmý pokles ztrátové energie na počátku pohybu především pro první dvě měření. Tato odchytka od modelu se dá vysvětlit prokluzováním kuličky, tj. platí $v \neq \omega R$. Další zajímavostí je vysoký peak pozorovaný při druhém měření. Tento je způsoben právě vyhodnocováním polohy kuličky pomocí programu Tracker — referenční bod se posunul. Zajímavostí je, že pokud bychom pro výpočet ztrátové energie použili vztah (56) a nikoli (57), pozorovali bychom nárůst ztrátové energie okolo horní úvratí pohybu. Můžeme tedy toto měření použít i pro vyvrácení hypotézy o plnosti kuličky.

Závislost zrychlení na rychlosti je bohužel velmi zašumělá, a proto z ní něco usuzovat lze pouze velmi stěží. Je zde vidět, že zrychlení se blíží k nule pro $v \rightarrow -\infty$.

Tato asymptotika je pochopitelná, protože po dlouhé době, kdy jede kulička po nakloněné rovině dolů, dosáhne ustáleného stavu a bude se pohybovat s nulovým zrychlením. Jednoduše nevysvětlitelná je ale pravá část grafu, kde můžeme pozorovat klesající velikost zrychlení pro velké (počáteční) rychlosti. Jedním z vysvětlení je vyrovnávání momentu hybnosti a hybnosti třením o podložku, v této době není splněn předpoklad $v = \omega R$.

Pokud by tyto hodnoty nebyly zatíženy šumem, mohli bychom tvořit hypotézy, jaké jsou původy třecích sil působících v systému.

Závěr

Změřili jsme závislost ztrátové energie na čase pro kuličku z myši, viz graf 24, a také pro dutou kuličku z deodorantu, viz graf 25. Pokusili jsme se analyzovat původ třecích sil, ale bohužel neúspěšně, viz graf 26.

Úloha III.E . . . viskozoidní

Každá kapalina má svou specifickou viskozitu. Pokuste se doma vyrobit průtokový viskozimetr a změřit relativní viskozitu několika vhodných tekutin (alespoň tří) vůči vodě. Vaše výsledky porovnejte s údaji vyhledanými na internetu.

Teorie

Viskozita je veličina, která udává poměr mezi tečným napětím a gradientem rychlosti ve směru kolmém na rychlost při proudění kapalin. Ideální kapalina má viskozitu nulovou, reálné kapaliny mají však v důsledku působení sil mezi částicemi kapaliny nenulovou viskozitu. Tyto síly lze označit jako vnitřní tření, pokud má kapalina velké vnitřní tření, má i velkou viskozitu a potoče pomaleji.

Pro měření viskozity je třeba použít newtonovské kapaliny (zpravidla nízkomolekulární látky), u kterých je přímá úměra mezi rychlostí jejich deformace a napětím. Tyto kapaliny se řídí Newtonovým zákonem viskozity

$$\tau = \eta \frac{du}{dx},$$

kde τ je tečné napětí, η je *dynamická* viskozita a du je vzájemná rychlost pohybu smykových rovin vzdálených o dx . Kromě dynamické viskozity pak ještě zavádíme *kinematickou* viskozitu $\nu = \eta/\rho$, kde ρ je hustota kapaliny.

Viskozita závisí na teplotě a se zvyšující se teplotou klesá, což má podklad v chování částic, které se při nižší teplotě více shlukují. Platí, že pro jednoduché měření viskozity je třeba, aby proudění kapaliny bylo laminární a ne turbulentní, neboť turbulence by byly dalším faktorem mimo viskozitu, který by proudění kapaliny brzdil, a rušily by tak určení viskozity. Zda je proudění laminární či turbulentní lze určit pomocí Reynoldsova čísla $Re = (vd)/\nu$, kde v je střední rychlost proudění kapaliny a d je průměr trubice. Za střední rychlost proudění lze přibližně považovat průměrnou rychlost kapaliny vztaženou k průřezu trubice S , průměrnou rychlost kapaliny vypočítáme jako podíl objemu kapaliny V , jehož průtok měříme,

a průměrné doby průtoku T . Po úpravě dostáváme pro výpočet Reynoldsova čísla vztah

$$\text{Re} = \frac{4V}{\pi d T \nu}.$$

Přibližná číselná hodnota Re pro každou kapalinu je uvedena u výsledků v tabulce 3. Pokud je hodnota Reynoldsova čísla do dvou tisíc, proudění je laminární.

Stanovení viskozity pomocí průtokových viskozimetrů je založeno na měření doby průtoku T . Pro objemový tok Φ při laminárním proudění kapaliny v trubici o kruhovém průřezu s poloměrem r a délce l můžeme psát⁷²

$$\Phi = \frac{\pi \Delta p r^4}{8 \eta l},$$

kde Δp je rozdíl tlaků na začátku a na konci trubice. V našem případě uvažujeme svislou trubici, na kterou je shora připojen zásobník s kapalinou a z jejíhož dolního konce kapalina volně vytéká (zásobník je otevřený, takže na hladinu vody v něm působí atmosferický tlak). Je tedy zřejmé, že $\Delta p = \rho g l + p$, kde p je hydrostatický tlak u dna zásobníku (takže $p \equiv p(h)$), kde h výška hladiny kapaliny v zásobníku nad nějakou pevnou referenční hladinou, a p je rovněž přímo úměrný ρ , neboli $p(h) = \rho \Pi(h)$ pro nějakou funkci $\Pi(h)$, přičemž $\Pi(h)$ závisí pouze na geometrii experimentu a ne na použité kapalině).

Označme nyní $S(h)$ vodorovný průřez zásobníku ve výšce h . Potom podle rovnice kontinuity musí platit $S(h)h = -\Phi(h)$, což je diferenciální rovnice pro h . Měříme-li čas T pro všechny kapaliny mezi dvěma pevnými hladinami h_1 a h_2 v zásobníku, dostáváme přímou integrací vztah

$$T = - \int_{h_1}^{h_2} \frac{S(h)}{\Phi(h)} dh = - \frac{8 \eta l}{\pi \rho r^4} \int_{h_1}^{h_2} \frac{S(h)}{g l + \Pi(h)} dh = K \nu,$$

kde K je konstanta pro náš měřicí aparát a nezávisí na volbě kapaliny. Dostáváme tedy důležitý výsledek: *doba průtoku T kapaliny viskozimetrem je přímo úměrná její kinematické viskozitě*. Změříme-li doby průtoků pro různé kapaliny, dokážeme pak jednoduše spočítat poměry jejich kinematických viskozit. Známe-li pak přesně kinematickou viskozitu jedné z kapalin, můžeme z těchto poměrů dopočítat kinematické viskozity všech ostatních.

Pomůcky – výroba průtokového viskozimetru

Pro výrobu viskozimetru byla využita tenká plastová trubička s vnitřním průměrem $d = 1$ mm. Trubička byla kouskem zasunuta do vršku od PET láhve (s vyvrtanou dírkou na ni) a oblepena, aby se ve vršku neposunovala a neprosakovala kolem ní kapalina. Jako zásobník kapaliny byla použita seříznutá PET láhev, na které byly tenkým fixem udělány rysky pro vymezení objemu kapaliny, jehož doba průtoku bude měřena. Tento vymezený objem byl zhruba 400 ml, tedy dostatečné množství, aby výsledky měření výrazně neovlivnily nepřesnosti při měření času průtoku s použitím stopek.

⁷²Jedná se o *Poiseuilleův zákon*, jehož odvození z Newtonova zákona ponecháváme čtenáři jako instruktivní cvičení.

Tabulka 2: Naměřené časy průtoku jednotlivých kapalin a průměrný čas průtoku.

T_{voda}	$T_{\text{sacharóza}}$	$T_{\text{mléko}}$	$T_{\text{benzín}}$	$T_{\text{láh}}$
s	s	s	s	s
312,06	395,81	421,85	305,07	309,08
301,67	407,72	429,06	314,79	315,34
310,91	404,67	429,73	310,26	321,94
307,39	397,62	425,80	303,94	312,87
304,99	402,50	422,84	299,51	317,63
309,23	396,25	427,49	304,36	311,58
310,72	399,13	426,87	311,27	317,27
308,14	401,59	430,15	313,48	320,04
307,58	406,74	424,88	302,02	316,76
313,42	402,45	425,92	305,44	313,83
$308,6 \pm 2,5$	$401,5 \pm 3,0$	$426,5 \pm 2,0$	$307,0 \pm 3,6$	$315,6 \pm 2,8$

Měření

Doba průtoku byla měřena u vody, 20 % roztoku sacharózy, nízkotučného mléka, technického lihu a technického benzínu. Všechny kapaliny se nechaly nějaký čas temperovat na pokojovou teplotu. Samotné měření probíhalo takovým způsobem, že kapalina byla nalita shora do připraveného viskozimetru tak, aby její hladina dosahovala několika centimetrů nad horní rysku a nechala se protékat. V okamžiku, kdy hladina dosáhla horní rysky, byly spuštěny stopky a zastaveny byly ve chvíli, kdy hladina dosáhla spodní rysky. Kapaliny byla zachytávána v nádobě pod viskozimetrem, aby bylo možné s ní měření provést celkem desetkrát. Před měřením každé další kapaliny byly jak viskozimetr, tak ostatní pomocné nádoby vždy umyty a vysušeny.

Výsledky

Výsledky získané měřením jsou časy průtoku jednotlivých kapalin, tyto časy byly statisticky zpracovány pomocí Studentova intervalu spolehlivosti na hladině významnosti $\alpha = 0,05$, výsledky jsou uvedené v tabulce 2.

Cílem úlohy je stanovit relativní viskozitu ostatních kapalin vůči vodě, čehož docílíme, pokud podělíme výsledný čas průtoku kapaliny časem průtoku vody. Víme-li, že kinematická viskozita vody při 18 °C činí $1,06 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, můžeme za pomoci získané relativní viskozity odhadnout kinematické viskozity ostatních kapalin. Tabulka 3 uvádí relativní kinematickou viskozitu kapalin vůči vodě, odhad kinematické viskozity (relativní kinematická viskozita vynásobená kinematickou viskozitou vody) a kinematickou viskozitu uvedenou pro jednotlivé kapaliny na internetu.⁷³ Zde je však nutné mít na zřeteli, že technický lín nemá stejné chemické složení jako čistý lín, pro který byla viskozita uvedena, to samé platí o technickém

⁷³<http://cs.wikipedia.org/wiki/Viskozita>

Tabulka 3: Určení relativní kinematické viskozity vůči vodě a přibližné kinematické viskozity. V předposledním sloupci je kinematická viskozita látek (v čistém stavu) podle údajů z internetu. Poslední sloupec obsahuje přibližnou hodnotu Reynoldsova čísla.

látka	$\frac{\nu}{\nu_{\text{voda}}}$	$\frac{\nu \cdot 10^6}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}$	$\frac{\nu_{\text{tab}} \cdot 10^6}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}$	Re
voda	1	1,06 ± 0,00	1,06	160
sacharóza	1,30 ± 0,09	1,38 ± 0,10		90
mléko	1,38 ± 0,05	1,46 ± 0,05		80
líh	1,02 ± 0,08	1,08 ± 0,09	1,07	160
benzín	0,99 ± 0,10	1,04 ± 0,11	0,77	150

benzínu. Jedná se tedy spíš o údaj pro porovnání, jakou kinematickou viskozitu má daná kapalina, pokud je v chemicky čistém stavu. Mimo to je v posledním sloupci tabulky uvedeno již zmíněné Reynoldsovo číslo pro každou kapalinu, aby bylo ověřeno, že proudění bylo laminární.

Diskuze

I přesto, že se jedná o domácí vyrobený viskozimetr, měření poskytla poměrně dobré výsledky. Díky dostatečně tenké trubičce je proudění laminární tak, jak potřebujeme, což je vidět z vypočítaných hodnot Reynoldsova čísla pro všechny kapaliny (žádná hodnota nepřesahuje 2000). Proto je možné použít jednoduchý model určení viskozity z doby průtoku bez dalších komplikací. Ukázalo se, že je názornější na takto domácí vyrobeném viskozimetru měřit látky *od pohledu* viskóznější než voda, protože například naměřená doba průtoku technického benzínu byla vodě tak blízká, že jejich relativní kinematická viskozita se lišila jen minimálně, takže by nebylo možné od sebe s velkou přesností tyto dvě kapaliny rozlišit pomocí měření viskozity s naší technikou (pomineme-li nepřehlédnutelný zápach technického benzínu).

Závěr

Podařilo se určit relativní kinematické viskozity vůči vodě u různých kapalin. Viskozita u mléka se ukázala být zhruba 1,4krát vyšší než viskozita vody, viskozita roztoku sacharózy byla 1,3krát vyšší a viskozity technického benzínu a líhu se viskozitě vody hodně blížily, technický líh měl viskozitu o málo větší a technický benzín téměř zanedbatelně menší. Bohužel získané výsledky nelze dobře porovnávat s údaji na internetu, neboť použité kapaliny byly směsi a nešlo je přesně chemicky definovat. Přesto lze experiment považovat za poměrně zdařilý a vzhledem k použitému vybavení vlastní výroby i za poměrně přesný (při opakování měření se jednotlivé časy průtoku dané kapaliny lišily minimálně).

Nakonec lze pro odlehčení doporučit stránku o více než 85 let probíhajícím experimentu, který s problematikou naší úlohy souvisí.⁷⁴

Úloha IV.E . . . někdo to rád vlažné

Změřte závislost teploty na čase v uvařeném šálku čaje. Proměřte klidný případ i čaj míchaný lžičkou. Dále ověřte, že doba vychladnutí na pitnou teplotu nezávisí na tom, zda se s čajem míchá či nikoli.

Teorie

Budeme předpokládat přenos tepla pouze vedením. Uvažujme, že teplota vody t_v je v celém objemu stejná a je rovna teplotě hrnku (keramika vede teplo oproti vzduchu velmi dobře). Pokojovou teplotu označme t_p . Uvažujme, že teplota vody se mění tak pomalu, že vedení tepla můžeme považovat za ustálené. Pak za dobu $d\tau$ se vedením přeneslo teplo

$$dQ = k (t_p - t_v) d\tau, \quad (59)$$

kde k je konstanta. Tepelný tok je záporný, protože jde ven z hrnku. Abychom snížili teplotu vody a hrnku o teplotu dt , musíme odebrat teplo

$$dQ = C dt, \quad (60)$$

kde C je tepelná kapacita hrnku a vody. Rovnice (59) a (60) dohromady dávají

$$k (t_p - t_v) d\tau = dQ = C dt.$$

Neznáme obecně ani konstantu k , ani C , proto zavedeme jinou konstantu $\lambda = k/C$. Pak po úpravě (separaci proměnných)

$$-\frac{1}{\lambda} \frac{1}{t - t_p} dt = d\tau,$$

což je diferenciální rovnice. Obě strany zintegrujeme a dostaneme

$$-\frac{1}{\lambda} \ln(t - t_p) = \tau + D,$$

kde D je nějaká integrační konstanta (určíme později z počátečních podmínek), odkud

$$t(\tau) = e^{-\lambda(\tau+D)} + t_p,$$

po úpravě

$$t(\tau) = E e^{-\lambda\tau} + t_p, \quad (61)$$

kde E je opět konstanta, kterou je možné vyjádřit pomocí původní D a kterou tedy též můžeme určit z počátečních podmínek. Počáteční podmínka je, že na počátku (v čase 0) je teplota t_0 , tedy $t(0) = 0$. Po dosazení do (61) dostaneme

$$t_0 = E + t_p \quad \Rightarrow \quad E = t_0 - t_p,$$

⁷⁴<http://smp.uq.edu.au/content/pitch-drop-experiment>

a tedy závislost teploty na čase je

$$t(\tau) = (t_0 - t_p) e^{-\lambda\tau} + t_p. \quad (62)$$

Rozdíl případů, když se s čajem míchá a když nikoliv, nedokážeme snadno kvantitativně popsat, pokusme se alespoň odhadnout několik rozdílů. Výše jsme předpokládali, že teplota vody je v celém objemu v každém čase stejná a je stejná jako teplota hrnku. To však není pravda, nejvyšší teplotu bude mít voda přibližně ve středu hrnku, blíže u stěn bude teplota o málo nižší a teplota hrnku bude též nižší. Jestliže čajem mícháme, pak tuto teplejší vodu ze středu hrnku přemístujeme k okraji. Z rovnice (59) vidíme, že teplo přenesené za jednotku času je úměrné teplotě vody a hrnku, přesněji teplotě vnější stěny hrnku. Jestliže tuto teplotu mícháním zvýšíme, tepelný tok bude vyšší, a tedy čaj se bude ochlazovat rychleji. Kovová lžice navíc teplo velmi dobře vede a odvádí z vody pryč. Jestliže mícháme lžičkou, pak nad hladinou rukou přemístujeme vzduch, nad hladinu se dostává vzduch chladnější a opět dojde k rychlejšímu ochlazení. Ze všech těchto důvodů by doba vychladnutí na pitnou teplotu měla být nižší v případě, že se s čajem míchá.

Měření teploty

Teplota byla měřena pomocí NTC termistorů 2322 640⁷⁵, který má při teplotě 25 °C odpor 10 kΩ, při vyšších teplotách odpor klesá (termistor je NTC – *negative temperature coefficient*).

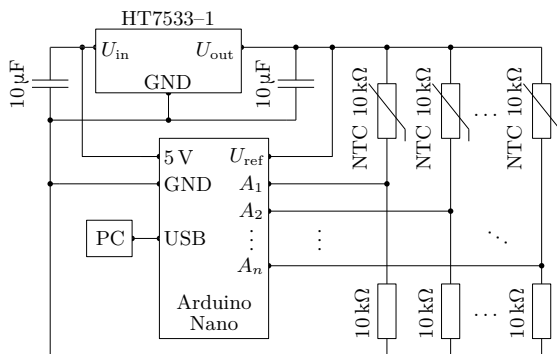
Automatizovat měření odporu by bylo možné pomocí multimetru připojeného k počítači, nicméně by v jednom okamžiku bylo možné měřit jen tolik teplot, kolik máme k dispozici multimetrů připojitelných k počítači. Protože chceme provádět více měření paralelně, zvolíme jiný způsob.

Měření odporu můžeme snadno převést na měření napětí pomocí napětového děliče (viz obrázek 27), který se skládá obecně ze dvou různých odporů, v našem případě z termistoru a odporu $R_{\text{ref}} = 10 \text{ k}\Omega$. Zanedbáme-li proud tekoucí případným voltmetrem, pak oběma součástkami teče stejný proud, proto dle Ohmova zákona poměr napětí na nich je roven poměru jejich odporů. Budeme-li měřit napětí na referenčním odporu R_{ref} , při teplotě 25 °C naměříme $U_{\text{ref}}/2$, jestliže teplota stoupne, odpor termistoru klesne, napětí na něm taktéž a my na referenčním odporu naměříme napětí vyšší.

Automatizovat měření napětí je již podstatně snazší. Použili jsme Arduino Nano⁷⁶, což je deska obsahující mikrokontrolér Atmel ATmega168 a převodník UART na USB. Obsahuje několik 10bitových analogových vstupů (na obrázku označených A_1, \dots, A_n), které umožňují měření napětí (přesněji měří poměr měřeného napětí a referenčního napětí U_{ref}). Jako referenční napětí (a též napětí pro napětový dělič) sloužil 3,3 V stabilizátor HT7533-1. V principu je možné za referenci použít přímo 5 V z USB, nicméně toto je velmi závislé na použitém kabelu, dalších připojených zařízeních apod. a může se v průběhu měření velmi měnit (ačkoliv na jeho

⁷⁵<http://www.gme.cz/img/cache/doc/118/042/ntc640-10k-datasheet-1.pdf>

⁷⁶<http://arduino.cc/en/Main/arduinoBoardNano>



Obr. 27: Schéma zapojení pro automatizované měření teploty pomocí termistorů a Arduino Nano.

hodnotě měření nezávisí, šum na referenčním napětí zvýší šum měřených hodnot), proto je vhodnější použít stabilizátor.

Mikrokontrolér snadno naprogramujeme, aby v nějakých časových intervalech (v našem případě asi 1 s) po sériovém portu posílal aktuální hodnotu napětí na analogových vstupech. Na počítači, ke kterému je Arduino přes USB připojeno, pak tyto hodnoty ze sériového portu čteme a ukládáme do souboru.

Je třeba též převést naměřené napětí na teplotu. To je možné buď s pomocí údajů, které uvádí výrobce termistoru (nejprve je třeba ze znalosti R_{ref} přepočítat napětí na odpor; po krátkém výpočtu zjistíte, že na U_{ref} skutečně nezávisí), nebo provedeme kalibraci jiným měřidlem. My zvolili druhou metodu a provedli kalibraci pomocí dvojice číslicových teploměrů Dallas DS18B20⁷⁷, které byly též připojeny na mikrokontrolér. Oba teploměry i všechny termistory byly ponořeny ve vodě, která byla míchána, na počátku měla teplotu asi 95 °C, postupně byla okolním vzduchem ochlazena na pokojovou teplotu a nakonec byla ochlazena ledem na asi 0 °C, přičemž byly zaznamenávány teploty obou teploměrů (nakonec se z nich vzal průměr) a hodnota napětí (přesněji řečeno poměr měřeného a referenčního napětí) naměřená mikrokontrolérem. Pro každý z termistorů byla naměřena kalibrační křivka. Vzhledem k tolerancím jednotlivých součástek se křivky pro každý termistor s daným referenčním odporem mírně lišily, proto po provedení kalibrace nebylo možné termistory mezi sebou navzájem vyměňovat, aniž bychom výrazně zvýšili nejistotu měření.

Na závěr kapitoly ještě poznamenejme, že popsany postup je možné použít pro měření i dalších veličin, které dokážeme převést na napětí.

Měření

Křivka chladnutí byla vždy zároveň měřena pro tři případy – voda v hrnku se nemíchala, voda byla míchána definovaně pomocí rotující kancelářské sponky na

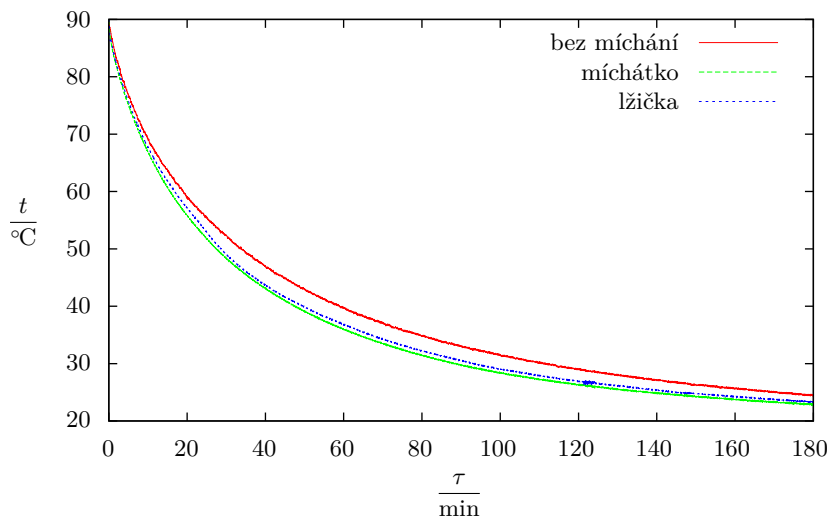
⁷⁷<http://www.gme.cz/img/cache/doc/530/067/ds18b20-datasheet-1.pdf>

dně hrnku (pod hrnkem rotoval magnet stálou úhlovou rychlostí) a voda byla míchána lžičkou. Měření všech tří případů vždy probíhala zároveň, aby se odstranil vliv rozdílné pokojové teploty, která se pohybovala mezi 20,0 °C a 21,5 °C. Objem vody v hrnku byl vždy asi 0,5 l.

Ve všech případech byly použity pro měření tři termistory, jeden připevněný na dně hrnku u okraje, druhý na vnitřní straně stěny hrnku těsně pod hladinou a třetí přibližně na ose hrnku v polovině výšky hladiny. Zaznamenány byly vždy všechny tři teploty, přičemž při zpracování bylo zjištěno, že jejich rozdíl je srovnatelný s nejistotou měření teploty, proto z nich byl vypočítán průměr, který byl dále považován za průměrnou teplotu vody v hrnku.

U prvních dvou případů předpokládáme, že rozptyl naměřených hodnot bude malý, protože buď nemícháme, nebo mícháme vždy stejně, nicméně míchání lžičkou mohlo být v každém případě jiné, proto rozptyl předpokládáme vyšší.

Křivka chladnutí pro všechny tři případy byla vzhledem k časové náročnosti až do pokojové teploty měřena jednou, viz obrázek 28. Další měření byla ukončena při 50 °C, což je přibližně teplota, při které dva organizátoři již označili teplotu čaje za pitnou.



Obr. 28: Naměřené křivky chladnutí.

Měřené křivky vždy začínaly těsně nad 90 °C (to proto, že voda se lila do hrnku, který měl pokojovou teplotu, a tedy její teplota poklesla dříve, než senzory teploty zaregistrovaly změnu teploty). Za dobu vychladnutí na pitnou teplotu, kterou máme měřit, tedy budeme dále považovat dobu, za kterou se teplota vody snížila z 90 °C na 50 °C. Naměřené časy uvádíme v tabulce 4.

Tabulka 4: Naměřené doby zchlazení vody v hrnku z 90 °C na 50 °C v závislosti na způsobu míchání.

$T_{\text{bez míchání}}$	$T_{\text{míchátko}}$	$T_{\text{lžička}}$
s	s	s
2 035	1 648	1 723
1 967	1 666	1 693
2 018	1 697	1 737
2 061	1 731	1 653
1 996	1 701	1 683
1 983	1 682	1 705
2 034	1 699	1 716
2 035	1 709	1 671
2 020 ± 40	1 690 ± 20	1 700 ± 20

Hypotéza o rovnosti středních hodnot

Z průměrných hodnot a nejistot uvedených v tabulce 4 by se již dalo usuzovat, že doba vychladnutí na pitnou teplotu závisí na tom, zda s čajem mícháme, protože intervaly spolehlivosti se nepřekrývají. Podívejme se však na problém, který máme řešit, z pohledu statistiky.

Testujme hypotézu, že doba vychladnutí na pitnou teplotu nezávisí na tom, zda se s čajem míchá lžičkou či nikoli. Znovu připomeňme, že měření probíhalo vždy po trojicích, tedy v tabulce 4 měření, která jsou na jednom řádku, proběhla současně a za stejných podmínek, měření na různých řádcích mohla proběhnout za různé teploty, tlaku, vlhkosti. . . Pro testování využijeme Studentův test pro dvojice. Testujeme, že střední hodnota doby vychladnutí na pitnou teplotu v případě, že s čajem mícháme, je stejná jako střední hodnota doby vychladnutí na pitnou teplotu v případě, že s čajem nemícháme.

Hypotézu budeme testovat na hladině významnosti $\alpha = 0,05 = 5\%$, která udává pravděpodobnost toho, že hypotézu zamítneme, ačkoliv platí (tzv. chyba 1. druhu). To nicméně nic neříká o pravděpodobnosti toho, že hypotézu nezamítáme, ačkoliv neplatí (tzv. chyba 2. druhu).

Označme n pozorované dvojice (x_i, y_i) , kde $i = 1, 2, \dots, n$, a jejich rozdíly $d_i = x_i - y_i$. Vypočítáme aritmetický průměr jejich rozdílů

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$$

a výběrovou směrodatnou odchylku jejich rozdílů

$$s(d) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}.$$

Pozorovaná hodnota testovacího kritéria je

$$t = \frac{\bar{d}}{s(d)} \sqrt{n-1}$$

a porovnááme ji s doplňkem kritického oboru

$$\overline{W}_\alpha = \left\langle -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1); t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\rangle,$$

kde $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ je $(1-\alpha/2)$ -kvantil Studentova rozdělení s $n-1$ stupni volnosti. Jestliže $t \in \overline{W}_\alpha$, hypotézu nezamítáme, v opačném případě hypotézu na hladině spolehlivosti $1-\alpha$ zamítáme.

Aplikujeme popsany postup na naše měření, tedy x_i jsou hodnoty v prvním sloupci tabulky 4 a y_i hodnoty ve třetím sloupci, přičemž $n = 8$ je počet řádků. Vypočítáme jejich rozdíly a následně aritmetický průměr $\bar{d} = 319$ s a výběrovou směrodatnou odchylku $s(d) = 47$ s. Odtud $t = 18,0$. Kvantil $t_{0,975}(7) = 2,365$ zjistíme ze statistických tabulek. Protože $18,0 \notin \langle -2,365; 2,365 \rangle$, hypotézu, že doba vychladnutí na pitnou teplotu nezávisí na tom, zda s čajem mícháme, na hladině významnosti 5% zamítáme. Hodnota testovacího kritéria je dokonce vyšší než $t_{0,9995}(7) = 5,408$, takže hypotézu bychom zamítli i na hladině významnosti 0,1%. Dle naměřených hodnot je tedy menší než 0,1% pravděpodobnost, že rychlost vychladnutí na pitnou teplotu nezávisí na tom, zda se s čajem míchá.

Nejistoty měření

Dallas DS18B20 měří teplotu přesněji než 0,5 °C, po kalibraci byl rozdíl průměrné teploty naměřené dvojicí těchto čidel a pomocí termistorů menší než 0,1 °C. Nejistotu měření teploty tedy odhadneme na asi 0,5 °C.

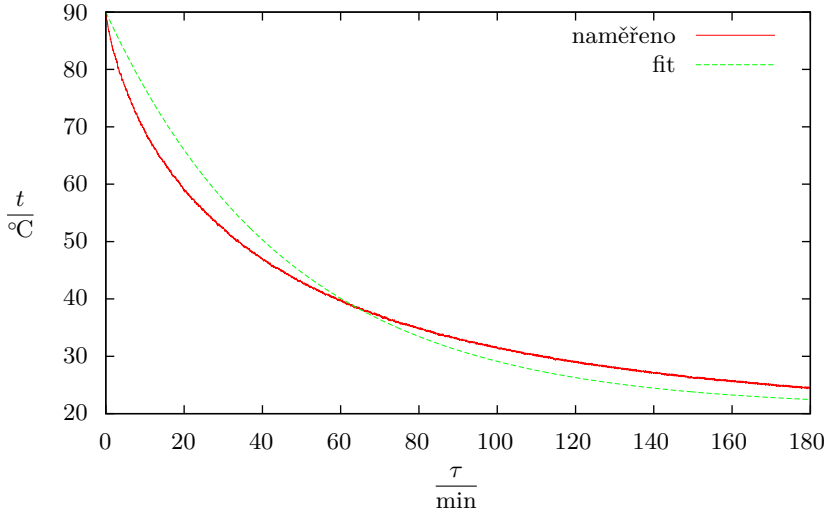
Čas byl měřen pomocí mikrokontroléru s přesností na nanosekundy. Zaznamenáván byl vždy čas začátku cyklu měření, během kterého se postupně přečetly a vypočítaly hodnoty ze všech snímačů, což dohromady trvalo asi 0,5 s. Doby, za které se teplota vody snížila z 90 °C na 50 °C, byly odečítány z grafu, přičemž vzhledem k šumu odhadneme nejistotu jejich stanovení na 2 s.

Rozptyl výsledků je zřejmě velmi ovlivněn také tím, že objem vody v hrnku byl definovaný pouze na základě rysky v něm před měřením nakreslené, takže nejistotu objemu odhadujeme na 10 ml.

Diskuse výsledků

Zkusme proložit naměřenou závislost teploty na čase (tu, kde se s vodou nemíchalo) teoretickou závislostí (62), viz obrázek 29. Vidíme, že teoretická a naměřená závislost si neodpovídají. To je způsobeno zjednodušeními, které jsme použili. Měření začalo téměř ihned po nalití vody do hrnku, tedy v době, kdy teplota hrnku byla mnohem nižší než teplota vody, a tudíž hrnek vodu ze začátku ochlazoval mnohem rychleji. Další podstatné zjednodušení spočívá v tom, že jsme zanedbali vypařování vody.⁷⁸

⁷⁸Přesnější modely najdete např. na http://www-ucjf.troja.mff.cuni.cz/dolejsi/outreach/sedlacek_ajp.pdf.



Obr. 29: Naměřená křivka chladnutí pro případ, kdy se s čajem nemíchá, proložená teoretickou závislostí (62).

Závěr

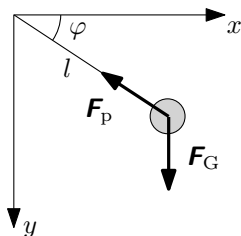
Byla naměřena závislost teploty na čase v uvařeném šálku čaje (obrázek 28) pro klidný případ, čaj míchaný pomocí míchátko (stálou úhlovou rychlostí rotující kancelářská sponka na dně šálku) a pro čaj míchaný lžičkou. Testovali jsme hypotézu, že doba vychladnutí na pitnou teplotu ($50\text{ }^{\circ}\text{C}$) nezávisí na tom, zda se čajem míchá, a na hladině významnosti $0,1\%$ jsme ji na základě naměřených hodnot zamítli.

Úloha V.E ... gumipuk

Závaží o hmotnosti m na gumičce délky l_0 je zavěšeno v pevném bodě o souřadnicích $x = 0$ a $y = 0$. Z osy x , která je horizontálně, závaží pouštíme. Jaká bude závislost nejnižšího dosaženého bodu na poloze na ose x ?

Tuto úlohu pojmem téměř úplně experimentálně a z teorie se omezíme na druhý Newtonův zákon. Speciální případ pohybu závaží sice vyřešíme analyticky, ale pro popis obecného případu pohybu vytvoříme numerický model, který potom srovnáme s experimentem. V experimentu jsme používali pomůcky s těmito parametry: hmotnost závaží $m = (51,5 \pm 0,1)\text{ g}$, délka nenatažené gumičky $l_0 = (19,1 \pm 0,1)\text{ cm}$, délka gumičky s volně visícím závažím (před samotným měřením) $d = (23,4 \pm 0,1)\text{ cm}$. Stejně hodnoty parametrů byly použity v numerickém modelu.

Rozbor situace vidíme na obrázku 30.



Obr. 30: Závaží na gumičce – označení veličin a sil.

Polohu závaží budeme popisovat kartézskými souřadnicemi x , y nebo polárními l , φ . Platí transformační vztahy $l = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = x/l$, $\sin \varphi = y/l$.

Na závaží působí v každém okamžiku tíhová síla \mathbf{F}_G o velikosti $F_G = mg$, kde g je tíhové zrychlení, a síla pružnosti gumičky \mathbf{F}_p o velikosti $F_p = k(l - l_0)$, kde k je tuhost gumičky a $(l - l_0)$ je její prodloužení (tato síla působí pouze tehdy, když $l > l_0$).

Za pomoci uvedených vztahů můžeme napsat pohybové rovnice (\ddot{x} a \ddot{y} značí druhou derivaci souřadnic podle času, tedy zrychlení v jednotlivých souřadnicích)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F_p \cos \varphi, \\ m\ddot{y} &= F_G - F_p \sin \varphi. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do nich za výše uvedené veličiny a vyjádříme zrychlení, dostaneme tvar, který využijeme při numerickém řešení:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{kx \left(\sqrt{x^2 + y^2} - l_0 \right)}{m\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \ddot{y} &= g - \frac{ky \left(\sqrt{x^2 + y^2} - l_0 \right)}{m\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned} \quad (63)$$

Analytické řešení

Budeme řešit případ, kdy počáteční poloha závaží je $(0, 0)$, tedy že ho volně pustíme dolů (pohyb probíhá pouze v ose y).

Tuhost gumičky spočítáme z protažení vlastní vahou závaží – dáme do rovnosti tíhovou sílu a sílu, jakou je gumička napínána, a vyjádříme $k = mg/(d - l_0)$. Vyjde $k = (11,7 \pm 0,4) \text{ kg}\cdot\text{s}^{-2}$.

Ke zjištění protažení gumičky Δl zvolíme přístup přes energie. Zvolíme-li hladinu nulové potenciální energie v bodě $(0, 0)$, pak v nejnižším místě trajektorie (po puštění) se bude potenciální energie závaží rovnat energii pružnosti z natažení gumičky, neboli

$$mg(l_0 + \Delta l) = \frac{1}{2}k\Delta l^2.$$

Tabulka 5: Maximální délka gumičky l_{\max} pro různé počáteční polohy $x - z$ numerického modelu.

x/l_0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
l_{\max}/cm	36,93	36,89	36,76	36,53	36,20	35,76	35,21
x/l_0	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
l_{\max}/cm	34,51	33,66	32,65	31,91	33,15	34,47	35,88
x/l_0	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
l_{\max}/cm	37,25	38,50	39,67	40,80	41,95	43,13	44,36

Dosadíme za k a s využitím $l = l_0 + \Delta l$ vyjádříme prodloužení

$$\Delta l = d - l_0 + \sqrt{d^2 - l_0^2},$$

tedy $\Delta l = (17,8 \pm 0,4)$ cm, kde jsme nejistotu typu B určili podle zákona šíření nejistot

$$s_{\Delta l} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta l}{\partial l_0} s_{l_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta l}{\partial d} s_d\right)^2},$$

kde $s_{\Delta l}$ označuje nejistotu veličiny Δl atd.

Když prodloužení přičteme k původní délce gumičky l_0 , dostaneme

$$l_0 + \Delta l = (36,9 \pm 0,4) \text{ cm}.$$

Numerický model

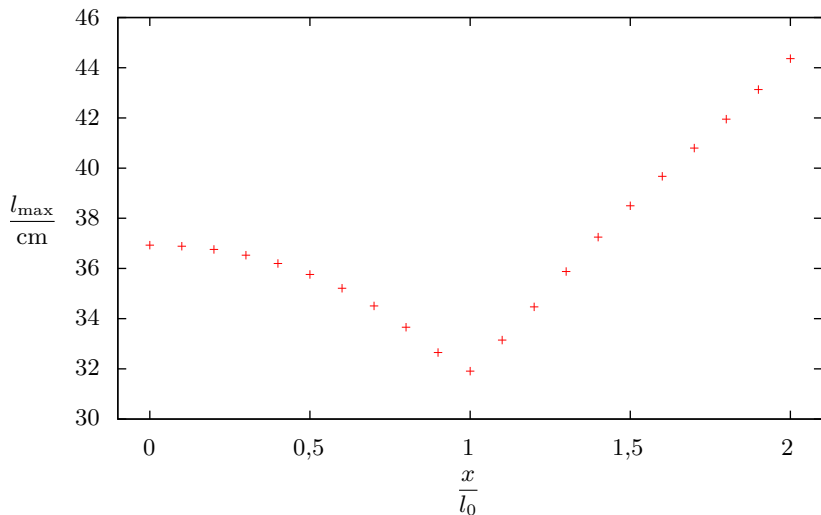
Numerickým řešením rovnic (63) Eulerovou metodou (prvního řádu) jsme získali model pohybu závaží. Jako počáteční podmínky jsme zvolili čas $t = 0$ s, $y = 0$ m, $v_x = v_y = 0$ m·s⁻¹; polohu x_0 jsme měnili v intervalu $\langle 0, 2l_0 \rangle$. Simulaci jsme nechali běžet 20 s s časovým krokem 0,001 s.

Pro hrubý odhad chyby metody zkusíme měnit časový krok a sledovat, o kolik se prodloužení změní. Je-li prodloužená délka 31,908 7 cm s krokem 0,001 s, 31,922 3 cm s polovičním krokem 0,000 5 s a 31,901 8 cm s dvojnásobným krokem 0,002 s, odhadneme chybu na 0,05 cm.

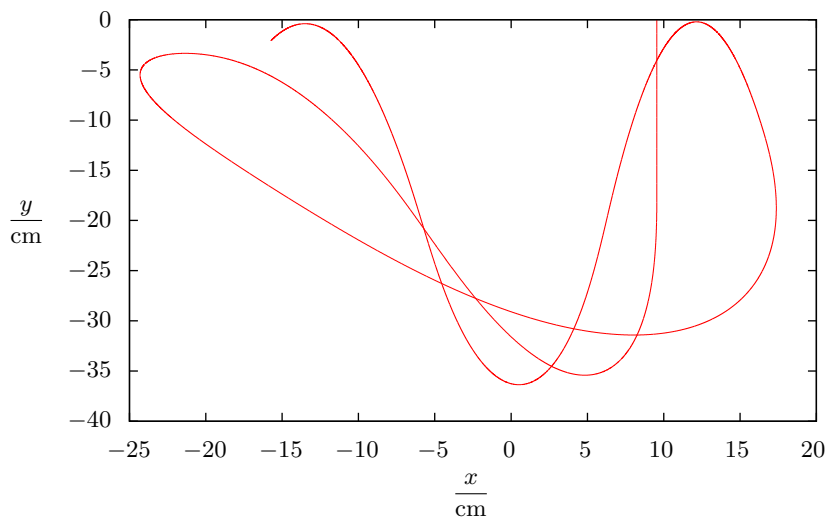
Zvolená metoda je sice jedna z nejjednodušších, nicméně vypočtený pohyb se od výsledků jiných metod významně liší až po několika kyvech.

Pro dvacet různých počátečních poloh jsme vykreslili polohu závaží a závislost délky gumičky na čase a odečetli délku gumičky, když poprvé dosáhla spodní úvratí. Číselné výsledky jsou v tabulce 5 a vyneseny v grafu na obrázku 31.

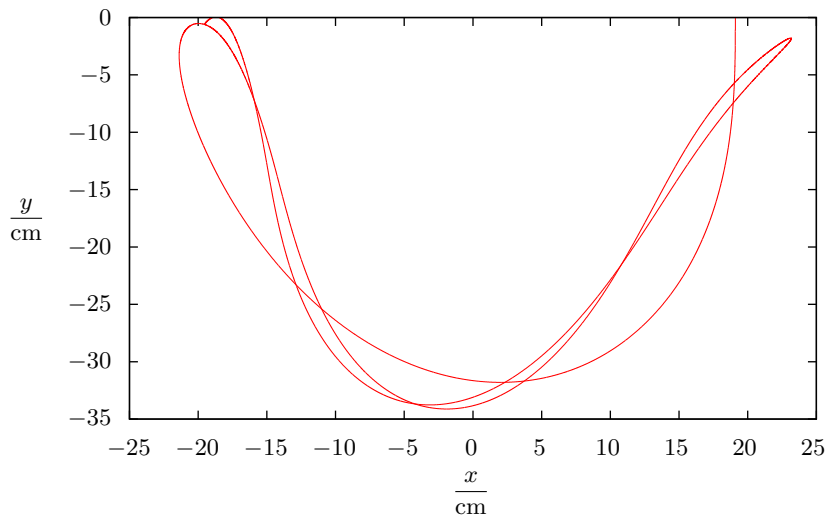
Pro zajímavost jsme vykreslili pohyb závaží pro dvě různé počáteční polohy (obrázky 32 a 33).



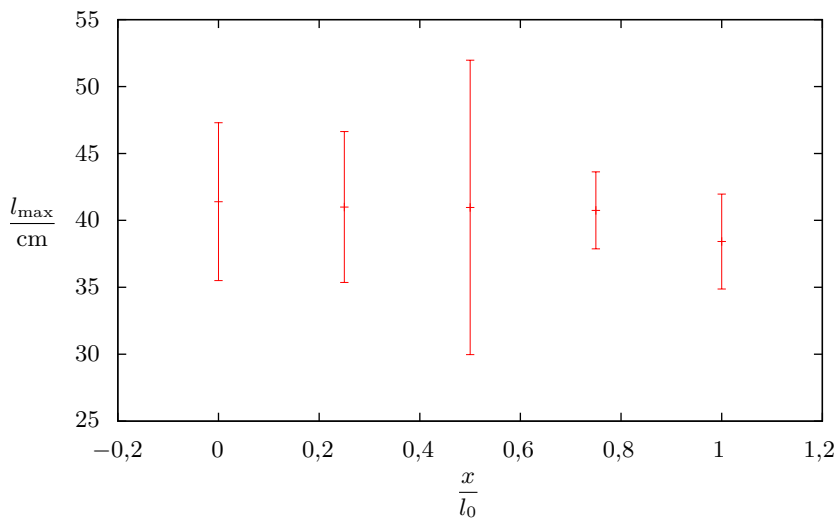
Obr. 31: Závislost prodloužení gumičky na počáteční poloze – z numerického modelu.



Obr. 32: Pohyb závaží pro počáteční polohu $(l_0/2, 0)$.



Obr. 33: Pohyb závaží pro počáteční polohu $(l_0, 0)$.



Obr. 34: Naměřená závislost prodloužení gumičky na x -ové poloze, z které závaží pouštíme.

Experiment

Jako závaží jsme použili nástrčnou hlavici, lidově ořech. Gumičku jsme k němu připevnili stylově další gumičkou. Celý pokus jsme filmovali oproti světlému pozadí a nezapomněli na měřítko. Z videa jsme potom odečetli délku gumičky ve spodní úvrati. Pro každou polohu jsme udělali několik pokusů, z nich aritmetický průměr a výběrovou směrodatnou odchylku; její hodnotu jsme potom použili jako délku chybové úsečky.

Výsledky jsou v grafu na obrázku 34.

Diskuze

Ve výsledném grafu nelze v rámci chyb s jistotou pozorovat hledanou klesající závislost. Mohlo by to být chybami měření, které by mohly být způsobeny nahráváním videa v kvalitě 30 fps, nepřesným uspořádáním, zkreslením videa, atd. – ale tyto důvody nebudou hlavní příčinou neúspěchu. Porovnejme klidovou délku gumičky před měřením a po dvaceti měřeních – 19,1 cm a 21,3 cm! Hlavním problémem tedy bude hystereze gumičky.

Guma je polymer (přírodní kaučuk) a v klidovém stavu je tvořena navzájem smotanými uhlovodíkovými řetězci, které se po natažení narovnají. Při opětovném uvolnění se ale nenaskládají zpátky přesně tak, jak byly, a pokud proces stále opakujeme, na stejné prodloužení potřebujeme stále méně práce.

Závěr

Numerický model ukazuje, že prodloužení gumičky směrem od polohy (0, 0) nejprve klesá, v poloze (l_0 , 0) je nejmenší a pak dál roste.

Délka gumičky ve spodní úvrati z polohy (0, 0) bude 36,93 cm. Z analytického řešení máme pro srovnání $\Delta l = (36,9 \pm 0,4)$ cm. Do tohoto intervalu se numerický model krásně trefil.

Experimentálně se nám tento výsledek bohužel nepodařilo potvrdit. Kvůli velké hysterezi gumičky jsou chybové úsečky v grafu závislosti prodloužení na poloze tak velké, že z něj nelze závislost s jistotou určit.

Úloha VI.E . . . želatinová rychlost světla

Určete rychlost světla v průhledném želatinovém dortu, který sami připravíte. Nezapomeňte popsat jeho složení.

Nápověda Sežeňte si na to třeba laser nebo mikrovlnku.

Teorie

Nejprve si řekněme něco ke dvěma možným metodám pro určování rychlosti světla v prostředí pevné látky. Obě tyto metody jsou proveditelné v domácích podmínkách.

Snad nejelegantnějším řešením je změření indexu lomu n , který lze chápat jako poměr rychlosti světla ve vakuu (vzduchu – v našich podmínkách nerozlišitelné) c ku rychlosti světla v daném prostředí v , $n = c/v$. To je sice užitečná formule,

kteřou skutečně použijeme pro vyčíslení rychlosti světla v našem experimentu, ale je nutno mít na paměti, že tato představa je fyzikálně chybná, protože index lomu je obecně závislý na vlnové délce.

O původu indexu lomu pojednává R. P. Feynman v prvním díle svých přednášek v kapitole 31. Převyprávět zde tuto kapitolu by bylo poněkud zbytečné, věře doporučujeme prostudovat alespoň oddíly 31.1 a 31.2 (jsou to 3 listy, které vám možná změní život :)). Zmiňme ale alespoň stěžejní myšlenky. Vše vychází ze dvou předpokladů, které jsou poměrně intuitivní a „stojí někde poblíž základů celé fyziky“: celkové elektrické pole lze vyjádřit jako součet polí vytvořených všemi náboji ve vesmíru; radiační pole vytvořené jedním nábojem je dáno jeho zrychlením vypočteným se zpožděním při rychlosti c . Pole procházející látkou je tedy tvořeno polem ze zdroje E_s a polem, které vzniká rozkmitáním atomů látky E_a . Příspěvek od atomů je fázově posunutý, což my pozorováním součtu $E_s + E_a$ vnímáme jako zpomalení světla v daném prostředí.

Druhou metodou, která připadala v úvahu, bylo měření rychlosti světla pomocí mikrovlnné trouby. Rychlost šíření elektromagnetické vlny o vlnové délce λ a frekvenci f lze zapsat jako $v = \lambda f$. V mikrovlnné troubě vzniká stojaté vlnění. Vyndáme-li otočný táč a položíme materiál do trouby, bude se látka v místech kmíten zahřívát rychleji než v místech uzlů. Provedeme-li tento experiment na čokoládě, vytaví se na ní pravidelný vzorek. Rozestupy uzlů odpovídají polovině vlnové délky a s užitím údaje o frekvenci, kterou nám poskytne výrobce, již snadno dopočteme rychlost světla.

S želez ale nastal problém. Frekvence, která je užívaná v mikrovlnných troubách, je $f = 2,45$ GHz a odpovídá rezonanční frekvenci molekuly vody. To má své opodstatnění – voda má velkou tepelnou kapacitu a tepelnou vodivost. Potraviny zpravidla vodu obsahují a jejím rychlým zahřátím se tak dostane do ohřívání věci dostatek tepla za krátkou dobu, proto jsou mikrovlnky tak rychlé. Zároveň to s sebou ale nese mnohá omezení a nevýhody. Pokud jste zkoušeli někdy rozmrazovat něco v mikrovlnce, možná jste si všimli, že to není tak úplně ono. Zatímco potraviny obsahující kapalnou vodu se ohřívají v celém objemu z výše uvedeného důvodu, zmrzlé věci se ohřívají jen od povrchu. Led má totiž rezonanční frekvenci už trochu jinde, a proto neabsorbuje přítomné záření o nic lépe než zbylé složky potravin. Na povrchu, kde dochází k tání vlivem vyšší okolní teploty, je pak už zase absorpce, a tedy ohřívání, velké. To je tedy případ, kdy nám vadí příliš pomalé předávání energie. V případě želez, které je skoro samá voda v kapalném skupenství, naopak dochází k tak rychlému zahřátí, že se vzorek rozteče dřív, než jsme schopni určit polohy uzlů.

Navíc, i kdybychom nějakým způsobem polohy uzlů odečetli a rychlost světla určili (některým řešitelům se to skutečně alespoň trochu povedlo), odpovídalo by to pravděpodobně rychlosti světla dané vlnové délkou ve vodě.

Měření bylo tedy provedeno pouze metodou určení indexu lomu pro vlnovou délku $\lambda = 650$ nm (to je nutno uvést, neboť pro jiné vlnové délky se budou výsledky lišit kvůli disperzi).

Experiment

Index lomu jsme měřili následujícím způsobem: Půlkruhový kus žele jsme podložili papírem s úhlovou stupnicí po 10° tak, že její střed splýval se středem původního kruhu žele. Laserem jsme pak svítili do tohoto středu tak, aby se paprsek zlomil na celé desítky stupňů (10–50) a odečetli jsme vstupní úhel na podloženém úhlooměru.

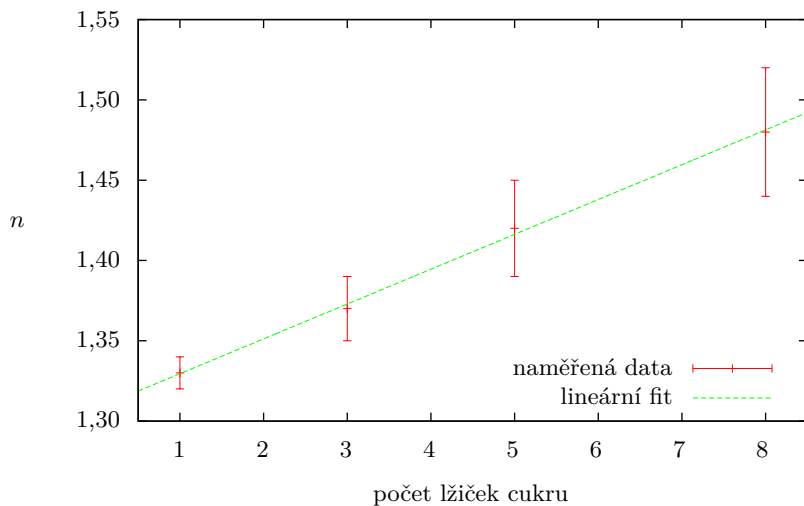
Nejprve jsme měření provedli pro červené neslazené žele. Koncentrace cukru v celé várce byla konstantní. Zajímavým efektem byla změna indexu lomu po roztavení a opětovném zatuhnutí. Pro primárně zatuhlé žele vyšel index lomu $n = (1,25 \pm 0,03)$, pro roztavené a znovu zatuhlé $n = (1,45 \pm 0,04)$. Tento efekt je komentován níže. V tomto druhu žele byla poměrně velká absorpce, což značně komplikovalo měření (paprsek neprošel až ven z půlkruhu), ale naštěstí rozptyl pro tuto vlnovou délku byl optimální – bylo možno dobře pozorovat dráhu laseru uvnitř materiálu.

Hodnoty byly určeny fitem naměřených dat závislostí danou Snellovým zákonem $\vartheta_i = \arcsin(n \sin \vartheta_t)$, kde ϑ_i je vstupní úhel, ϑ_t je úhel, pod kterým se paprsek zlomí, a n je index lomu coby fitovací parametr. Udávané chyby jsou chyby fitu.

Druhý typ žele, průhledný, měl absorpci mnohem menší, a tak bylo možno měřit na „kulatém úhlooměru“, tedy s větší přesností, jak vstupní, tak výstupní úhel. Toto žele bylo připraveno nejprve bez cukru a pak ve 4 hrnčících do něj bylo přidáno 1, 3, 5 a 8 lžiček cukru. Jedna lžička odpovídá přibližně 2,2 g a hrnčičky měly objem 250 ml – tyto údaje slouží pro orientaci, v jakém rozsahu koncentrací jsou námi naměřené a vyvozené výsledky platné. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 6 a vyneseny do grafu na obrázku 35. Zjišťujeme, že index lomu žele s rostoucí koncentrací cukru v námi měřeném rozsahu lineárně roste. Z lineárního fitu závislosti je možné získat extrapolovanou hodnotu neslazeného žele (konstantní člen lineární závislosti). Tato extrapolovaná hodnota vyšla $n_{\text{neslazené}} = (1,31 \pm 0,04)$.

Nyní se vraťme k pozorované změně indexu lomu po roztavení a opětovném ztuhnutí červeného žele. Nabízejí se dvě možná vysvětlení a pravděpodobně budou oba efekty přítomny. Těžko však určíme v jaké míře, diskuse bude tedy kvalitativní. Index lomu závisí, jak se dozvíte ve zmiňované kapitole ve Feynmanovi, na hustotě (přesněji řečeno na počtu nábojů na jednotkový objem). Po přetavení patrně tato hustota vzrostla, a to jednak tím, že látka dostala možnost se lépe, více nahusto, uspořádat. To je možné přirovnat k jevu, který pozorujeme i nízkomolekulárních látek, jako je například voda. Ta nám mnohem lépe zamrzne po převaření. Druhý možný důvod je, že při roztavení (roztátí) žele se samozřejmě zvýšila teplota a tím se zrychlilo odpařování vody. Změnila se tedy koncentrace, složení. Celá směs zhoustla. Zvýšení indexu lomu může být také synergickým efektem těchto dvou jevů – žele se lépe uspořádá nejen proto, že k tomu dostane možnost tepelným rozvolněním, ale také proto, že se s menším obsahem vody uspořádává snáze (to pozorujeme i mechanicky – přidáme-li méně vody, je tužší).

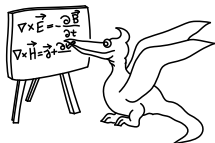
Závěrem uvedme v tabulce 6 hodnoty rychlosti světla v žele spočtené z naměřených indexů lomu, bereme-li rychlost světla ve vakuu $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.



Obr. 35: Závislost indexu lomu na množství cukru.

Tabulka 6: shrnutí výsledků

typ a počet lžiček	n	$\frac{v}{10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$
červená želatina	1,25±0,03	2,40±0,06
č. žel. přetavená	1,45±0,04	2,07±0,06
bílá s 1 lž. cukru	1,33±0,01	2,26±0,02
bílá s 3 lž. cukru	1,37±0,02	2,19±0,03
bílá s 5 lž. cukru	1,42±0,03	2,11±0,04
bílá s 8 lž. cukru	1,48±0,04	2,03±0,05



Seriál o teorii strun

Kapitola 1: Relativistický

Nedávno jsem si listoval v minulých ročnících FYKOSho seriálu a zaujala mě poslední úloha ze seriálu Jardy Trnky o kvantové mechanice. Úlohu tehdy nazval *Za nobelovku* a zadání znělo následovně: „Vytvořte lokální renormalizovatelnou kvantovou teorii pole, která popisuje všechny čtyři typy sil jako projevy jedné sjednocené interakce.“ A tak mě napadlo: „Co na toto téma napsat letošní seriál?“

Doufám, že vás hned ve druhé větě nevystrašilo množství cizích slov a vydáte se s námi na pouť, ve které podhalíme stěžejní metody a představy, bez kterých se teoretický fyzik neobejde jediný den. Ilustrujeme je na jednom z pravděpodobně nejslibnějších proudů moderní fyziky, který se o sjednocení všech interakcí pokouší, tedy teorii strun.

V prvním díle tohoto seriálu si nejprve osvětlíme problémy se sjednocením a nadsvětelnou rychlostí proběhneme formalismus a některé základní pojmy Einsteinovy teorie relativity.

Sjednocení v potížích

V čem je tedy vlastně problém v současné teorii? Na světě se setkáváme se čtyřmi základními interakcemi, tedy elektro-magnetickou, slabou, silnou a gravitační. Elektro-magnetická je podstatou všech elektrických a magnetických jevů, jevů světelných, ale také je to síla držící elektrony v atomových obalech a určující tak vlastnosti prvků. Slabá jaderná interakce je pro změnu zodpovědná za některé jaderné reakce, jako je například β -rozpad. Silná interakce drží pohromadě nukleony v jádrech atomu, ale také vzájemně přitahuje kvarky, které tvoří konstituenty samotných nukleonů, tedy protonů a neutronů. Poslední zmíněnou interakcí je gravitační, u které narážíme na problém.

Fyzika 20. století stojí na dvou základních pilířích, a těmi jsou Einsteinova teorie relativity a kvantová fyzika. Už v počátcích vědy se lidé snažili vytvořit jednotnou konzistentní teorii, která by popsala všechny známé částice a jejich interakce. V případě prvních tří výše uvedených interakcí taková teorie existuje. Právě v řeči kvantové teorie lze konzistentně formulovat teorii elementárních částic a prvních tří interakcí (tzv. standardní model fyziky elementárních částic).

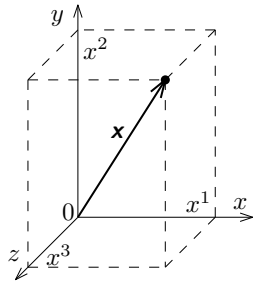
Gravitace je však popsána Einsteinovou teorií relativity a jazyk této teorie je naprosto odlišný od jazyka teorie kvantové. Za běžných situací to příliš nevadí, protože kvantová teorie je relevantní teorií na mikroskopických vzdálenostech, zatímco gravitace řídí pohyb planet a hvězd. Problém nastane například u černých děr nebo ve fázích vesmíru hned po Velkém třesku. V těchto situacích je hmota

tak hustá, že gravitační i kvantové efekty jsou velmi silné a pro konzistentní popis takových situací je potřeba teorie *kvantové gravitace*.

Snaha o vytvoření teorie kvantové gravitace je už od počátku znesnadněna výskytem výrazů, které jsou nekonečné (divergují), a s nekonečny se rozhodně nepočítá snadno. Kvantová teorie to však umí pomocí tzv. renormalizace, která tato nekonečna za jistých podmínek odstraní. V případě gravitace jsou nekonečna však tak „silná“, že běžná renormalizace selhává a je potřeba vytvořit teorii novou. Teorie strun je doposud jedinou známou konzistentní teorií kvantové gravitace a dokonce existenci gravitace předpovídá.

Setkání v časoprostoru

Než začneme mluvit o strunách, podívejme se nejprve na pár pojmů z Einsteinovy teorie relativity. Pomiňme nyní možnou existenci více rozměrů, ke které se možná vrátíme v dalších dílech. Náš prostor je potom třírozměrný. Pro jednoznačné určení polohy bodu stačí udát tři kartézské souřadnice $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, kde x^1 je hodnota první souřadnice, x^2 hodnota souřadnice druhé a x^3 hodnota třetí jako na obrázku 36. Všimněme si, že složky vektoru číslujeme horním indexem. To je běžná notace v teorii relativity a my tak budeme značit složky všech vektorů (narozdíl od dolních indexů, které později použijeme ke značení tzv. kovektorů). Budeme vždy dávat pozor na rozdíl mezi indexem a mocninou.



Obr. 36: Vektor v kartézských souřadnicích

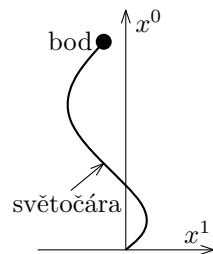
Co však zadáním polohy není určeno jednoznačně, je *událost*. Když se domluvíme spolužákem, že se sejdem před školou, tak přestože oba víme, kde se setkat, můžeme tam být každý v jiný čas a stejně se nesetkáme. Do teorie je proto přirozené přidat čtvrtý rozměr, tedy čas. Událost je potom popsána čtyřrozměrným vektorem (x^0, x^1, x^2, x^3) . Kamarádovi, se kterým si chci domluvit schůzku, můžu napsat SMS ve tvaru (15:00, $\mathbf{x}_{\text{škola}}$) a najednou je vše jasné.

Vzdálenost však měříme v metrech, zatímco čas v sekundách a my bychom rádi, aby měly všechny složky čtyřvektoru stejnou jednotku. Toho docílíme snadno tak, že vynásobíme časovou souřadnici t nějakou univerzální konstantou s rozměrem rychlosti, jako je například rychlost světla c . Máme tedy

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x^1, x^2, x^3)$$

a trojrozměrný prostor jsme tak povýšili na časoprostor.

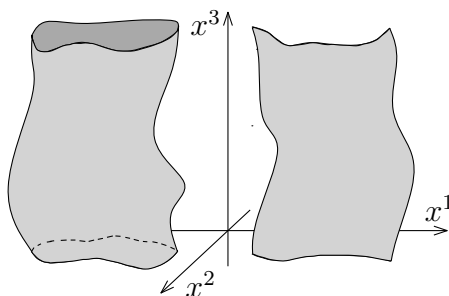
Sledujme nyní pohyb částice v časoprostoru. Částice zde opisuje tzv. světočáru. Jedna taková světočára je znázorněna na obrázku, kde nejsou vyobrazeny všechny čtyři rozměry, ale jen první odpovídající času (na ose y) a druhá odpovídající souřadnici x^1 (na ose x). Částice startuje v čase $x^0 = 0$



Obr. 37: Světočára bodu pohybujícího se v časoprostoru

z počátku a poté se pohybuje podél naší zvolené osy x^1 nejprve směrem doprava, poté doleva a zase zpět doprava. Pohyb takovéto částice je popsatelný čtyřmi funkcemi ve tvaru $(x^0(p), x^1(p), x^2(p), x^3(p))$, kde p je nějaký libovolný parametr určující polohu na světočáře (tj. první složka čas události a zbylé polohu v prostoru).

Teď, když jsme si vyložili, jak znázorňovat pohyb bodu v prostoročase, rádi bychom znázornili pohyb jednorozměrného provázku. Teorie strun je teorií těchto provázků, které se pohybují v prostoročase. Bodová částice nám při pohybu v prostoročase zaznamenávala světočáru, zatímco struna bude zaznamenávat dvou-dimenzionální plochu, tzv. světoplochu. Struny lze rozdělit na dva typy. Prvním typem je *otevřená struna* se dvěma konci a druhým je *uzavřená struna* se spojenými konci. Světoplochu otevřené struny vidíme na obrázku vpravo a uzavřené struny vlevo.



Obr. 38: Světoplocha uzavřené struny (vlevo) a otevřené struny (vpravo) v časoprostoru

Jednorozměrnou světočáru částice jsme byli schopni popsat čtveřicí funkcí závislých právě na jednom parametru p . Světoplochu struny však jedním parametrem nepopíšeme, protože jde o dvojrozměrný objekt. Zde budeme potřebovat parametry dva, τ a σ , a světoplocha bude popsána čtveřicí funkcí těchto proměnných $(x^0(\tau, \sigma), x^1(\tau, \sigma), x^2(\tau, \sigma), x^3(\tau, \sigma))$. Dosazením za τ a σ dostaneme bod na světoploše struny v prostoročase. Chceme-li pro změnu vědět, jaký má struna tvar v daném čase, stačí udělat řez světoplochou kolmý na osu x^0 v daném čase. Ke světoplochám se však blíže vrátíme v dalších dílech.

V prostoru umíme měřit vzdálenosti. Máme-li dva body v prostoru určené polohovými vektory \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 , potom vektor $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ nám určuje jejich vzájemnou polohu. Velikost tohoto vektoru je zřejmě vzdálenost těchto bodů. Pro velikost Δl prostorového vektoru v kartézských souřadnicích platí

$$(\Delta l)^2 = (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2.$$

Všimněme si, že tato vzdálenost vyjde stejně, posuneme-li polohové vektory obou bodů ve stejném směru o tutéž vzdálenost. Také se nic nestane, otočíme-li oba vektory o stejný úhel kolem počátku. Těmto dvěma vlastnostem říkáme invariance

vůči *translací* a *rotací*. Pokud chceme budovat teorii ve čtyřrozměrném prostoročase, budeme se muset naučit měřit „vzdálenosti“ také v něm. Naivním přidáním členu $+(\Delta x^0)^2$ bychom se však daleko nedostali. Mnohem užitečnější se ukáže zavedení vzdálenosti (čtyřintervalu) Δs , pro který platí

$$(\Delta s)^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2. \quad (64)$$

Užitečný je tento čtyřinterval proto, že právě v tomto případě je vzdálenost invariantní nejen vůči translacím a rotacím v prostorových složkách, ale také vůči speciálním Lorentzovým transformacím (viz úloha), které jsou klíčovým prvkem speciální teorie relativity. Speciální Lorentzova transformace odpovídá transformaci, při které přecházíme mezi různými inerciálními systémy, které se vůči sobě pohybují.

V úloze c) si můžete vyzkoušet, že tato podivná „vzdálenost“ například nemusí být vždy reálná nebo může být nulová i pro velmi odlišné události. Tudíž se pro ni lépe hodí právě název „čtyřinterval“.

Mravenci a křivost

V předchozím jsme se seznámili s časoprostorem a naučili se v něm měřit vzdálenosti. Tím jsme si vlastně nejrychlejší možnou cestou připravili půdu pro speciální teorii relativity. Nyní si ještě něco povíme o jejím rozšíření, obecné teorii relativity. Obecná teorie relativity je teorie gravitace, ale na rozdíl od Newtonova gravitačního zákona nepopisuje gravitaci pomocí přitažlivého silového působení mezi tělesy, ale pomocí zakřivení časoprostoru. Podle obecné teorie relativity hmotná tělesa kolem sebe zakřivují časoprostor a ostatní částice se pak v tomto časoprostoru pohybují po nejrovnějších a nejkratších možných drahách, takzvaných *geodetikách*.

Náš život v zakřiveném časoprostoru si lze vyobrazit následovně. Představme si, že jsme mravenci pohybující se po povrchu balónu a nevímáme nic jiného než jeho povrch. Vydáme-li se podél rovníku, po chvíli zjistíme, že jsme dorazili na místo, kde už jsme jednou byli. Mravenec Isaac by mohl přijít s vysvětlením, že se tak děje proto, že na nás pól působí přitažlivou silou, která zakřivuje naši dráhu. Z pohledu člověka však víme, že se tak děje proto, že je balón zakřivený. A takto lze popisovat gravitaci jako zakřivený časoprostor.

Není to ale zdaleka tak jednoduché, jak by se na první pohled mohlo zdát. Stejně jako je čtyřinterval jakási „podivná vzdálenost“, jsou geodetiky v relativistickém prostoročase „podivně nejkratší“, protože jejich „délku“ měříme podobným čtyřintervalem.

Gravitační sílu jsme tedy vyměnili za zakřivený časoprostor. Jak ale zakřivený časoprostor popsat? Zakřivení poznáme podle toho, že měříme úhly, vzdálenosti mezi objekty, obsahy, objemy, ... v prostoru a porovnáme je se vztahy známými z plochého prostoru. Příkladem takových vztahů může být vztah pro obvod nebo obsah kruhu vzhledem k jeho poloměru nebo třeba součet vnitřních úhlů trojúhelníku. Nakreslíme-li na povrch balónu kruh, zjistíme, že neplatí vztah pro obvod kruhu (zkuste si to). Nakreslíme-li trojúhelník, tak součet vnitřních úhlů nebude roven 180° . To platí jen v plochem prostoru.

Zkusme vztah (64) pro plochý časoprostor přepsat tak, aby nám umožňoval zobecnění, jak měřit vzdálenosti ve křivých časoprostorech

$$(\Delta s)^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu,$$

kde $\eta_{\mu\nu}$ nazýváme metrikou a v našem případě plochého časoprostoru je $\eta_{00} = -1$, $\eta_{11} = 1$, $\eta_{22} = 1$, $\eta_{33} = 1$ a ostatní komponenty jako například η_{01} , η_{23} atd. jsou nulové. Všimněme si, že tento vztah lze také interpretovat jako skalární součin vektoru $\Delta \mathbf{x}$ se sebou samým. Stejně můžeme definovat skalární součin i dvou různých vektorů a pomocí něj získávat kromě vzdáleností i úhly mezi vektory. U metriky $\eta_{\mu\nu}$ jsme použili dolních indexů. Jsou-li stejné indexy v opačných polohách, vždy se přes ně sčítá a často se dokonce suma před výrazem ani nepíše.

Jak už jsme řekli, v případě zakřiveného časoprostoru mohou být tyto vzdálenosti, ale také úhly, jiné. Pokud chceme měřit vzdálenosti v zakřiveném časoprostoru, musíme vědět, jaké jsou vzdálenosti a úhly mezi vektory v každém bodě časoprostoru a musíme tedy znát metriku

$$(\Delta s)^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu,$$

kde Δx^μ je rozdíl souřadnic dvou blízkých bodů a $g_{\mu\nu}$ již nemá složky jako $\eta_{\mu\nu}$, ale tyto složky mohou být odlišné a dokonce v každém bodě časoprostoru mohou být různé. Tato metrika popisuje zakřivení časoprostoru a právě pole odpovídající této metrice se automaticky objeví v teorii strun.

Úloha I.S ... relativistická

6 bodů

- Kvantovou gravitaci potřebujeme jen při studiu velmi malých vzdáleností, kdy jsou gravitační síla a kvantové efekty rovnocenné. Gravitační sílu charakterizuje gravitační konstanta, kvantovou mechaniku Planckova konstanta a speciální teorii relativity rychlost světla. Najděte hodnoty těchto konstant v tabulkách a zkuste z nich vzájemným násobením a umocňováním získat veličinu s jednotkou délky. Tak získáte délkovou škálu, na které je relevantní gravitace a kvantová mechanika současně.
- Ukažte, že provedeme-li speciální Lorentzovu transformaci (tj. přejdeme do systémů pohybujících se vůči původnímu rychlostí v ve směru osy x^1)

$$x_{\text{nov}}^0 = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x_{\text{nov}}^1 = \frac{-\frac{v}{c}x^0 + x^1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x_{\text{nov}}^2 = x^2, \quad x_{\text{nov}}^3 = x^3,$$

potom se hodnota čtyřintervalu nezmění.

- Vzpomeňte na definici čtyřintervalu a položte $\Delta x^3 = \Delta x^2 = 0$. Máme pak

$$(\Delta s)^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2.$$

V jaké části roviny $(\Delta x^0, \Delta x^1)$ je čtyřinterval $(\Delta s)^2$ záporný a kde kladný? Jak vypadá křivka definovaná $(\Delta s)^2 = 0$?

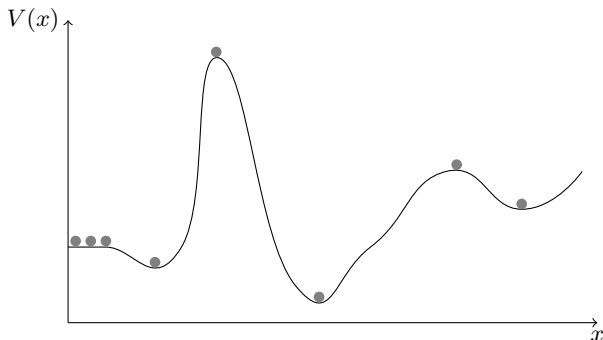
(řešení str. 160)

Kapitola 2: Akční

V minulém dílu jsme si představili problémy se sjednocením interakcí a formulací teorie kvantové gravitace. Seznámili jsme se se základními pojmy teorie relativity jakožto teorie gravitace. Také jsme si řekli, že teorie strun je, zdá se, doposud jedinou známou konzistentní teorií, která má potenciál popsat všechny interakce a částice. Teorie strun je kvantovou teorií relativistické struny, tedy jednorozměrného objektu pohybujícího se v prostoročasu.

Než začneme mluvit o této složité teorii, musíme nejdřív uvést jazyk, ve kterém je budována. V tomto díle si povíme něco o variačních principech, které zahrnují i takzvané „zákony kosmické lenosti“. Ukazuje se totiž, že příroda v mnohých okamžicích koná co nejméně *akce*, nebo tak to alespoň formulovali osvícenější fyzici. Co to ale přesně znamená? A je to zcela obecně pravda? O tom se dozvíte v následujícím textu.

Řetěz v podivném údolí



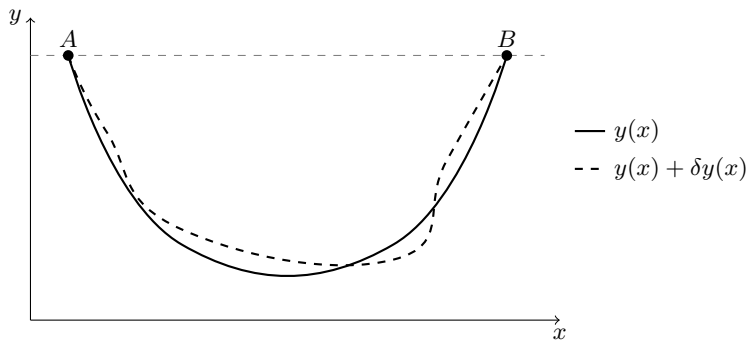
Obr. 39: Výška zvlněné krajiny $V(x)$ v závislosti na x . Šedé puntíky označují místa, kde je derivace nulová ($V'(x) = 0$) a kde může kulička nehybně stát.

Představme si kuličku, která se nachází ve zvlněné krajině popsané výškovou funkcí $V(x)$ jako na obrázku 39. Kulička se může nacházet v rovnováze, leží-li na rovince. Matematik by řekl, že výška terénu musí v daném bodě být *stacionární* – derivace (neboli sklon) výšky $V'(x)$ musí být v daném bodě nulová.

Kromě plochých oblastí nastává podmínka stacionarity v lokálních minimech nebo maximech funkce $V(x)$ (tj. na vrchu kopce nebo v nejnižším bodě údolí)

nebo v tzv. sedlových bodech, které odpovídají plošině, jako má například funkce $V(x) = x^3$ v nule. (Přesvědčte se, že zde má funkce nulovou derivaci, a jde tedy o stacionární bod.)

Podobné úvahy dost možná znáte s funkcí $V(x)$ jakožto potenciální energií, kde její derivace $-V'(x)$ (spád) odpovídá síle příslušného pole. Potenciální energie je obecně funkcí polohy a její rozdíl mezi dvěma body O a P určuje energii, kterou dané silové pole (třeba gravitační) předá částici, pokud se přesune z O do P. Nulová derivace potenciální energie znamená nulovou sílu, a tudíž lokální rovnováhu částice (nulová síla znamená nulové zrychlení, a tedy možnost klidu).



Obr. 40: Tvar řetízku $y(x)$ v homogenním gravitačním poli a jeho variace.

Doteď jste se možná nedozvěděli nic zas tak nového, ale zkuste přemýšlet nad následující úlohou: máte ideální řetízek konstantní délky l a pověsíte jej mezi body A a B v homogenním gravitačním poli. Potenciální energie hmotného bodu v tomto poli je dána vztahem $V(x, y) = mgy$. Uvažujme řetízek, jehož tvar je popsán funkcí $y(x)$ (viz obrázek 40). Rozdělíme-li náš řetízek na malé elementy délky ds , bude potenciální energie elementu v bodě $y(x)$ rovna $dV(x) = \rho gy(x)ds$, kde ρ je hustota řetízku a g tíhové zrychlení. Otázka zní: jaký bude tvar řetízku v rovnováze?

Mohli bychom nyní dlouhosáhle počítat síly, které na řetízek působí, a pak se je pokoušet vyrovnávat a zjišťovat tvar řetízku. Můžeme si ale vzpomenout na předchozí odstavce a prostě říct: řetízek se uspořádá do tvaru $y(x)$ tak, aby měl minimální celkovou potenciální energii $\mathcal{V}(y(x))$.⁷⁹ Celkovou energii miníme součet energií všech kousíčku řetízku. Pokud je řetízek dostatečně jemný, můžeme vysčítání příspěvků jednotlivých článků k celkové potenciální energii nahradit integrálem přes jeho délku. Pro ty, kteří nejsou na integrály zvyklí, je na internetu mnoho textů, nebo si stačí přečíst příslušnou část z textu ke třetí sérii 24. ročníku našeho

⁷⁹Všimněte si, že je celková energie funkcí funkce $y(x)$, tj. každé funkci $y(x)$ popisující tvar řetízku přiřadí číslo. Takovým objektům matematikové říkají funkcionály.

seriólu. Říkáme tedy, že

$$\mathcal{V}(y(x)) = \int_A^B \rho g y(x) \, ds \tag{65}$$

je minimální pro stabilní tvar $y(x)$. Minimalizovat musíme však při zachování délky řetízku a uchycení na koncích.

Matematik se na naši formulaci zběžně podívá a říká: to znamená, že integrál v rovnici (65) musí být nutně *stacionární*. Co to ale znamená? Že jakákoliv nekonečně malá výchylka od rovnovážného rozložení $y \rightarrow y + \delta y$ (viz obrázek 40) zachovávající délku řetízku a uchycení na koncích nezmění hodnotu celkové potenciální energie z rovnice (65).

To nám ale jako fyzikům dává smysl, protože zatímco u částice v potenciálu nekonečně malá výchylka δx z rovnovážné polohy způsobí nekonečně malou změnu potenciální energie úměrnou jejímu sklonu $V'(x)$, něco podobného se děje i tady, jen v mnohem obecnějším duchu. Místo malé změny potenciální energie $V(x + \delta x) \approx V(x) + V'(x)\delta x$ máme takzvanou variaci $\delta\mathcal{V}$ celkové potenciální energie $\mathcal{V}(y(x) + \delta y(x)) = \mathcal{V}(y(x)) + \delta\mathcal{V}$.

Když se ovšem znovu podíváme na obrázek 40, přijde nám divné, že by se potenciální energie při variaci $\delta y(x)$ neměnila vůbec – stejně jako se při malé výchylce doopravdy trochu mění ve stacionárních bodech i funkce $V(x)$ na obrázku 39. Pravda je taková, že ve stacionárních bodech se potenciální energie $V(x)$ i celková potenciální energie $\mathcal{V}(y(x))$ nemění až na *nekonečně malé veličiny vyššího řádu*. Požadavek $\delta\mathcal{V} = 0$ do prvního řádu přesnosti je tedy matematicky preciznější formulací stacionarity.

Podmínky na nulovou variaci $\delta\mathcal{V}$ nakonec vedou na úplně stejné podmínky rovností určitých vektorů v každém bodě, jako bychom dostali při úvahách nad silovým působením v řetězu. To se nám povedlo bez nutnosti složitějšího analyzování sil. Potvrzuje se tak správnost našeho tvrzení o minimalizaci celkové potenciální energie.

Křivce $y(x)$, která minimalizuje integrál (65), se říká od této slavné úlohy *řetězovka* a jedná se o součet dvou exponenciál symetrický okolo středu řetězu též známý jako hyperbolický kosinus. Můžete ji nalézt ve tvaru opravdových prověšených řetězů nebo i v přírodě, například na prověšených vláknech pavučiny.

Abychom si to tedy zrekapitulovali, v minulé části textu jsme ukázali, že pokud si odvodíme nějaký fyzikální princip minima nebo maxima například pro bod, bezrozměrný (0-dimenzionální) objekt, s trochu opatrností ho můžeme lehko rozšířit i na mnohem obecnější případy, jako je řetízek nebo struna – 1-dimenzionální objekt s nekonečně mnoha body.

Výhoda daného přístupu je v tom, že se příliš nemusíme zabývat nějakou fyzikou sil atp., která je s problémem spojena, ale můžeme rovnou formulovat princip celkového maxima nebo minima s nějakými dodatečnými podmínkami, jako je pevná délka řetízku. *Fyzikální rovnice pak ale získáme zpětně z podmínek nulové variace minimalizované nebo maximalizované veličiny okolo řešení problému!*

Tento způsob „hádání“ fyziky se může zdát dost divný u klasické mechaniky, kde nám síly přijdou intuitivně zřejmé. Ve zkoumání úplně nové fyziky, kde mechanická

intuice už dávno selhává, se ale jedná o úspěšnou a často používanou metodou formulování nových teorií.

Nejmenší, největší, nejlepší

Principy minima a maxima uhranuly matematiky a fyziky počínaje začátkem 18. století. Ne, že by předtím nebyly takové principy známy, ale osvícenští matematici měli tendenci je hledat *všude*. Například filozof, matematik a spoluvynálezce integrálního a diferenciálního počtu Gottfried Wilhelm Leibniz tvrdil, že náš svět je ten nejlepší z nekonečného počtu možných světů, kde dobro je maximalizováno a zlo minimalizováno. Jiný matematik, Leonard Euler, kterého budete nejspíš znát díky Eulerovu číslu e , třeba v jedné své práci tvrdil, že „nemůže býtí... nejmenší pochybnosti, že veškeré účinky ze Všemíru lze dovodití jak metodou maxim a minim, tak z působení příčin.“

Citovat bychom mohli ještě dlouho, ale pojďme se podívat na nejstarší principy maxim a minim, kterým budeme říkat jedním slovem *extremální* nebo též *variační*. Princip, podle kterého se dá odvodit zákon odrazu a lomu paprsku světla, byl používán v různých obdobích už od počátku našeho letopočtu a definitivně jej formuloval v 17. století Pierre de Fermat. Tento *Fermatův princip* prostě tvrdí, že *světlo cestuje po drahách, které ho mezi každými dvěma body dopraví za nejkratší dobu*.

Čas T spotřebovaný na cestu paprsku mezi body M a N lze také přepsat jako

$$T = \int_{t_M}^{t_N} dt = \int_M^N \frac{dt}{ds} ds = \frac{1}{c} \int_M^N n ds,$$

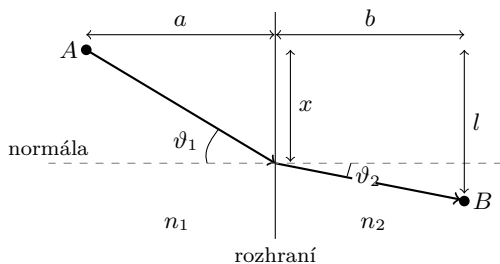
kde $n = c/v$ je index lomu optického prostředí v daném bodě, c rychlost světla ve vakuu, a kde jsme při úpravě využili skutečnosti, že

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Pravda je ovšem taková, že v některých speciálních případech se světlo pohybuje i po dráze s *maximálním* časem. Takže obecně platí, že se světlo pohybuje po drahách s *extremálním* časem, neboli *po drahách s nulovou variací doby potřebné k uražení*, jak to nyní formulujeme v souladu s předchozí částí textu.

Pokud je rychlost světla v nějaké oblasti konstantní, je jasné, že paprsky nebudou dělat žádné zatáčky, ale že se bude pohybovat po nejkratších spojnicích mezi body – přímkách. Nyní si ale odvodíme, co se stane, pokud paprsek dopadne na rozhraní dvou prostředí.

Zvolíme si dva body A a B , jeden v optickém prostředí s indexem lomu n_1 a druhý v prostředí s indexem lomu n_2 jako na obrázku 41. Víme, že v každém prostředí zvlášť se bude světlo pohybovat po přímce a na rozhraní může tedy pouze změnit směr. Vzhledem k tomu, že body A a B jsou pevné, jediný volný parametr je výška x , ve které paprsek dopadá na rozhraní. Vyjádříme si dobu T , kterou



Obr. 41: Nákres lomu paprsku.

dráha z bodu A do B zabere, za pomoci rychlostí v_1 , v_2 a drah d_1 , d_2 v prvním, respektive druhém prostředí .

$$T(x) = \frac{d_1(x)}{v_1} + \frac{d_2(x)}{v_2},$$

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(l-x)^2 + b^2}}{v_2}, \quad (66)$$

kde jsme použili Pythagorovu větu pro výpočet vzdáleností d_1 a d_2 s použitím značení vzdáleností z obrázku 41. Podmínka pro extrém doby $T(x)$ je nulová derivace podle x , takže když rovnici (66) zderivujeme, získáváme podmínku na x

$$0 = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + b^2}}. \quad (67)$$

Pokud si navíc uvědomíme, že

$$\sin \vartheta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \sin \vartheta_2 = \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + b^2}},$$

pak po úpravě rovnice (67) použitím definice $n_{1,2} = c/v_{1,2}$ získáváme známý zákon lomu

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2.$$

Zákon lomu je dobře ověřená skutečnost, na jehož principu například funguje větší na klasických optických přístrojích, a proto vidíme, že *variacioní principy mají uplatnění nejen ve statice, ale i v dynamice*, tj. v časovém vývoji.

To je podstatně méně intuitivní skutečnost, protože nás nutí si klást otázky typu: *jak paprsek ví, že bude narážet na rozhraní nebo že bude potřebovat dorazit do bodu B?* Odpověď samozřejmě zní, že to paprsek prostě neví a vědět k takovému chování nemusí. Fermatův princip nám říká, že pokud body A a B prochází nějaký paprsek, tak bude mít určitě takovýto tvar. Není to přímý způsob, jak předvídat vývoj jednotlivého paprsku, když ještě nevíme, kde skončí (bod B předem neznáme). Fermatův princip je obecné tvrzení o přirozenosti paprsků, ze kterého lze pak okamžité zákony chování jako zákon lomu odvodit. Obdobně to bude platit i pro další principy, které nyní uvedeme.

Tři, dva, jedna – AKCE!

Všichni známe Newtonovu klasickou mechaniku, podle které se hmotné body pohybují vlivem síly $\mathbf{F}(t)$ po trajektoriích $\mathbf{x}(t)$, které jsou řešením druhého Newtonova zákona

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}.$$

Dost možná vás překvapí, že osvícenší fyzikové uspěli ve vymýšlení extrémálního principu i v případě zmíněných Newtonových rovnic. Zatímco u světla se z trajektorií mezi dvěma body vybírala ta správná trajektorie na základě extrémální *doby*, u mechaniky je to mnohem hůře pochopitelnější veličina, takzvaná *akce*. Historicky první byl *Maupertuisův princip akce*, postulovaný v 18. století. Maupertuisův princip tvrdí, že suma velikostí hybností po délce trajektorie (akce) je mezi libovolnými dvěma body minimální, pokud je energie po celou dobu pohybu stejná. Tedy integrál

$$\mathcal{S}_0 = \int_A^B mv \, ds$$

má určitě nulovou variaci při nekonečně malé variaci $\delta \mathbf{x}(t)$ vedoucí na variaci

$$\delta \mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}(t).$$

Tento tvar takzvané redukované akce reprodukuje z podmínky na nulovou variaci Newtonovy rovnice v časově neměnných konzervativních polích a použil jej například Niels Bohr na začátku 20. století, když odvozoval kvantování energetických hladin vodíku. Opět nemůžeme říci, jestli je redukovaná akce nutně minimální, proto pro jistotu říkáme, že je stacionární.

Existuje ale i jiná, „neredukovaná“ akce \mathcal{S} , jejíž stacionarita je v časově neproměnných situacích ekvivalentní se stacionaritou redukované akce \mathcal{S}_0 , a která určuje trajektorie i v časově proměnných situacích. Musíme ale definovat novou funkci, jejíž integrál se po dobu běhu extremalizuje, a tou je *Lagrangián* (čti *lagranžián*). Lagrangián je definovaný jako rozdíl kinetické a potenciální energie $L = T - V$.

Kinetickou energii hmotného bodu o hmotnosti m a rychlosti \mathbf{v} vypočteme jako

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2.$$

Jedná se o energii, kterou libovolná síla musela do částice vložit, aby se urychlila na rychlost \mathbf{v} . Pro potenciální energii již takto explicitní vztah nemáme. Tato energie je obecně funkcí času a polohy hmotného bodu $V(\mathbf{x}, t)$. Jak bylo řečeno v první části textu, je to právě potenciální energie, kterou předává silové pole částici nebo hmotnému bodu při pohybu v prostoru.

Když tedy nyní známe Lagrangián a jeho význam, můžeme zformulovat Hamiltonův princip stacionární akce. Hamiltonův princip tvrdí, že pro trajektorii $\mathbf{x}(t)$, která se nachází v čase t_1 v bodě P a v čase t_2 v bodě Q, je stacionární následující akce

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) \, dt.$$

Vidíte, že nyní neklademe požadavek jen na koncové body trajektorie, *ale i na časy, ve kterých se v daných bodech P, Q nachází.* To je prostě důsledek faktu, že se nám například silové pole může pod trajektorií měnit a pozice v různých časech může znamenat docela jinou fyzikální situaci. Nebudeme vás dlouho napínat a rovnou vám řekneme, že z podmínky $\delta S = 0$ dostáváme Newtonovy rovnice se silou odpovídající poli potenciální energie V . Zkusme si i něco jednoduššího spočítat, třeba rovnice plynoucí pro volnou částici.

Variace na svobodné lety

Ukážeme si, jak zkonstruovat akci pro volnou částici a jak z ní odvodíme pohybové rovnice z podmínky $\delta S = 0$. Na volnou částici nepůsobí žádná síla, a proto můžeme zvolit potenciální energii nulovou $V = 0$. Do Lagrangianu přispěje proto jen kinetický člen a dostáváme

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \dot{y}(t)^2 dt.$$

Nyní provedme malou variaci $y(t) \rightarrow y(t) + \delta y(t)$. Dostaneme

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m (\dot{y}(t) + \delta \dot{y}(t))^2 dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \dot{y}(t)^2 dt.$$

Pokud je ale $\delta y(t)$ malé (řekněme o řád menší než $y(t)$), pak je $(\delta y(t))^2$ již zcela zanedbatelné a budeme ho považovat za nulové. Potom máme

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m (\dot{y}(t)^2 + 2\dot{y}(t)\delta\dot{y}(t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \dot{y}(t)^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} m \dot{y}(t)\delta\dot{y}(t) dt.$$

Poslední úpravu, kterou musíme provést, je integrace per partes,⁸⁰ podle které je

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\dot{g}(t) dt = f(t_2)g(t_2) - f(t_1)g(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \dot{f}(t)g(t) dt.$$

V našem případě dostáváme

$$\delta S = \dot{y}(t_2)\delta y(t_2) - \dot{y}(t_1)\delta y(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{y}(t)\delta y(t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{y}(t)\delta y(t) dt,$$

kde jsme využili toho, že ze zadání víme přesně počáteční a koncovou polohu bodu, a proto je $\delta y(t_1) = \delta y(t_2) = 0$. Protože může být $\delta y(t)$ jinak libovolné, musí platit

$$\ddot{y}(t) = a(t) = 0,$$

abychom splnili podmínku $\delta S = 0$. Vidíme, že jsme v tomto jednoduchém případě odvodili druhý Newtonův zákon pro bod, na který nepůsobí žádná síla (tj. zrychlení je nulové).

⁸⁰ Čtenář, který se nespokojí s pouhým uvedením příslušné formulky, může nahlédnout do libovolné učebnice matematické analýzy nebo třeba na Wikipedii.

Snad jste během této krátké ochutnávky z historie a praxe variačních principů okusili alespoň část jejich elegance a možností. Zvláště principy stacionární akce se během historie fyziky již mnohokrát osvědčily a můžeme je snadno rozšířit z dynamiky hmotného bodu na dynamiku vícerozměrného tělesa jako struny nebo celého třírozměrného objektu. Zobecnit se princip stacionarity akce dá zcela obdobně, jako jsme to udělali s principem minimalizace potenciální energie a řetízkem. To si ale ukážeme až v příštím díle. Začneme s akcí pro volnou relativistickou částici a zobecníme ji na relativistickou strunu. Máte se tedy určitě ještě na co těšit.

Úloha II.S ... akční

6 bodů

- a) Jaký je fyzikální rozměr akce? (Jaké má tato veličina jednotky?) Má stejnou jednotku jako některá z fundamentálních konstant z první otázky k minulému dílu seriálu? Která?
- b) *Od Nielse Bohra* – Uvažujte pohyb hmotného bodu po kružnici s dostředivou silou

$$F_d = ma_d = \frac{\alpha}{r^2},$$

kde r je poloměr kružnice a α nějaká konstanta. Pak

1. Spočítejte redukovanou akci S_0 pro jeden oběh po kružnici jako funkci jejího poloměru r .
2. Určete hodnoty r_n , pro které je hodnota S_0 přirozeným násobkem konstanty z podúlohy a).
3. Celková energie hmotného bodu je $E = T + V$. Pro tuto sílu je $V = -\alpha/r$. Vyjádřete energii E_n částic v závislosti na poloměrech r_n za pomoci uvedených konstant.

Tip Jistě jste ve fyzice probírali pohyb po kružnici a odpovídající vztahy mezi pohybovými veličinami. Použijte je a pak se integrace akce po obvodu kružnice s konstantním r podstatně zjednoduší (veličiny konstantní při integraci můžete před integrál vytknout). Nezapomeňte také, že samotný dráhový integrál „ničeho“ je prostě délka zintegrované dráhy.

- c) Poslední podúloha může znít komplikovaně, ale je pouhým cvičením na derivaci a integraci jednoduchých funkcí. Vystačíte si se základními tabulkovými derivacemi a integrály. Ověřte, že plná akce \mathcal{S} pro volnou částici pohybující se z bodu $[0; 0]$ do bodu $[2; 1]$ je pro trajektorii odpovídající přímočarému pohybu (první případ) minimální, tedy je větší v ostatních dvou případech

$$\mathbf{y}(t) = (2t, t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \left(1 - \cos(\pi t) + \frac{1}{\pi} \sin 2\pi t, t \right),$$

$$\mathbf{y}(t) = \left(2t, \frac{e^t - 1 + t^2(t-1)}{e-1} \right),$$

kde e je Eulerovo číslo.

Tip Nejprve spočítejte derivaci $\mathbf{y}(t)$, dosadte do výrazu pro akci a zintegrujte. (řešení str. 163)

Kapitola 3: Aplikační

Tento díl seriálu bude tak trochu aplikační. Minule jsme si pověděli úvod k variačním metodám ve fyzice, nyní bychom rádi nabyté znalosti aplikovali na tři speciální případy. Povíme si něco o variační úloze pro klasickou strunu, pro relativistickou částici a na závěr zavedeme slavnou Nambu-Gotovu akci pro relativistickou strunu. Znalost této akce nám otevře brány ke všem tajům teorie strun. Začneme ale od počátku.

Klasická struna

Každý z nás už v minulosti viděl nějaký strunný hudební nástroj. Položili jste si někdy otázku, jak se struna při brnknutí hýbe? Odpověď je snadná. Jak jsme si v minulém díle řekli, pohybuje se tak, že je hodnota akce příslušející tomuto pohybu extrémální. Jak ale akce pro naši strunu vypadá?

Připomeňme, že jsme akci pro částici definovali jako integrál

$$\mathcal{S}[\mathbf{x}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) dt,$$

kde rozdíl $L = T - V$ kinetické energie T a potenciální energie V jsme nazvali Lagrangianem. Uvažujme nyní strunu délky l a celkové hmotnosti m , která se pohybuje v rovině $[x; y]$. Struna je natažena mezi body $A[a; 0]$ a $B[b; 0]$, kde $b = a+l$. Tvar struny v daném čase můžeme popsat funkcí $y(x)$ pro x z intervalu (a, b) tak, jak jsme to dělali v předchozím díle seriálu pro řetízek v gravitačním poli. Jelikož se však tvar struny může v čase měnit, je ve skutečnosti výchylka závislá jak na souřadnici x , tak na čase t a píšeme $y \equiv y(x, t)$.

Zde poznamenejme, že máme-li funkci více proměnných (v našem případě tedy $y(x, t)$), pak se zavádí *parciální derivace* jakožto veličina charakterizující změnu funkce při malé změně jedné z proměnných. Například parciální derivace $y(x, t)$ podle x , kterou zapisujeme jako

$$\frac{\partial y}{\partial x} \equiv \partial_x y \equiv y_x,$$

by nám charakterizovala změnu $y(x, t)$ při malé změně x . Prakticky to znamená, že při parciálním derivování $y(x, t)$ podle x derivujeme funkci stejně jako v případě obyčejné derivace a druhou proměnnou t považujeme za konstantu. Podobně postupujeme i pro derivaci podle t .

Spočtíme nejprve kinetickou energii naší struny. Strunu můžeme rozdělit na malinké kousíčky délky dx o hmotnosti $dm = (m/l) dx$, kde m je celková hmotnost struny. Jde-li o dostatečně malinké kousky, můžeme každý kousíček v daném čase t považovat za hmotný bod s polohou $(x, y(x, t))$, jehož kinetickou energii známe

$$dT(x, t) = \frac{1}{2} v(x, t)^2 dm = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dm.$$

Přesčítáme-li přes všechny malé elementy, získáme celkovou kinetickou energii struny. V případě infinitezimálně malých elementů přejde tato suma v integrál

$$T = \int_A^B dT = \frac{1}{2} \int_A^B \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dm = \frac{m}{2l} \int_a^b \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx.$$

Dále musíme určit potenciální energii odpovídající dané konfiguraci. Jsou-li deformace malé, lze uvažovat s dobrou přesností, že je v celé struně konstantní napětí T_0 . Při natažení má struna tendenci vrátit se do původního stavu s délkou l a příslušná energie odpovídající prodloužení Δl bude úměrná tomuto prodloužení, takže $V = T_0 \Delta l$. Nám zbývá určit toto prodloužení. Opět rozdělme strunu na malé kousíčky a každý aproximujme malou úsečkou. Délka takovéto úsečky bude z Pythagorovy věty

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} dx,$$

kde dx odpovídá délce kousíčku podél osy x a dy příslušné délce podél osy y . Vidíme, že v důsledku naivního dělení diferenciálů se nám pod odmocninou objevila parciální derivace $y(x, t)$ podle x jakožto sklon struny v daném čase. Jelikož uvažujeme jen malé výchylky, je tento sklon velmi malý a můžeme tedy psát přibližný vztah

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2,$$

o jehož platnosti pro malé $\frac{\partial y}{\partial x}$ se lze snadno přesvědčit. Celkovou změnu délky struny pak získáme opět integrací přes celou strunu a dostáváme potenciální energii

$$\begin{aligned} V = T_0 \Delta l &= T_0 \left(\int_A^B dl - l \right) = T_0 \left(\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} dx - l \right) \approx \\ &\approx T_0 \left(\int_a^b dx + \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx - l \right) = \frac{T_0}{2} \int_a^b \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx, \end{aligned}$$

kde jsme využili znalosti délky struny

$$\int_a^b dx = l.$$

Celkově tedy máme akci pro strunu vyvíjející se z času t_1 do času t_2 ve tvaru

$$S[y(x, t)] = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \left(\frac{m}{2l} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) dx dt.$$

Všimněme si, že akce struny na rozdíl od akce pro částici obsahuje dva integrály. Funkce v závorce je funkcí nejen času, ale také polohy na struně a integrací přes

celou strunu pak získáváme Lagrangián. Je přirozené veličinu v závorce nazvat hustotou Lagrangiánu a označit

$$\mathcal{L}(\partial_x y, \partial_t y) = \frac{m}{2l} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2.$$

Analogicky, jako jsme minule odvodili z akce pro volnou částici její pohybové rovnice, můžeme odvodit pohybovou rovnici pro klasickou strunu. Uvažujeme strunu, která se vyvíjí z počátečního času t_1 , kde má tvar popsáný funkcí $y(x, t_1) \equiv y_1(x)$, do času t_2 , kde má tvar popsáný funkcí $y(x, t_2) \equiv y_2(x)$, a pokusme se najít „trajektorii“, po které se struna vyvíjí, jakožto extrémální naší akce. Připomeňme, že v případě bodové částice, jejíž trajektorii parametrizujeme parametrem p , jsme prováděli změnu $y(p)$ pro každé p o malou hodnotu $\delta y(p)$ a dostali jsme tak trajektorii $y(p) + \delta y(p)$ nepatrně odlišnou od trajektorie $y(p)$. V případě struny máme však funkci dvou proměnných a musíme provést malou změnu v každém čase t a v každém bodě x struny. Musíme tedy provést variaci $y(x, t) \rightarrow y(x, t) + \delta y(x, t)$. Na tuto změnu však musíme naložit dvě podmínky. Předně musí být $\delta y(x, t_1) = 0 = \delta y(x, t_2)$, protože počáteční i koncový tvar struny máme pevně zadány. Dále jsme fixovali krajní body struny, takže v každém čase musí být také $\delta y(a, t) = 0 = \delta y(b, t)$.

Nyní už nám nic nebrání v odvození pohybových rovnic pro klasickou strunu. Najdeme tedy variaci akce a položíme ji rovnu nule. Máme

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}[y(x, t)] &= \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \left(\frac{m}{2l} \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \delta y}{\partial t} \right)^2 - \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right)^2 \right) dx dt - \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \left(\frac{m}{2l} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) dx dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \left(\frac{m}{l} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \delta y}{\partial t} - T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right) dx dt, \end{aligned}$$

kde jsme roznásobili obě závorky, jeden z takto získaných členů se odečetl s druhým členem a členy obsahující druhou mocninu variace δy jsme pro jejich malost zanedbali.

Stejně jako v minulém díle provedeme nyní pro každý z členů integraci per partes a dostáváme

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}[y(x, t)] &= \frac{m}{l} \int_a^b \left(\frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=t_2, x} \delta y(t_2, x) - \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=t_1, x} \delta y(t_1, x) \right) dx - \\ &\quad - T_0 \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=b, t} \delta y(b, t) - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=a, t} \delta y(a, t) \right) dt - \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \left(\frac{m}{l} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta y \right) dx dt, \end{aligned}$$

kde svislíci značíme vyhodnocení parciálních derivací v daných bodech. Dostali jsme tak tři členy. První dva jsou ale nulové z okrajové, počáteční a koncové podmínky, které vyžadují $\delta y(x, t_1) = \delta y(x, t_2) = \delta y(a, t) = \delta y(b, t) = 0$. Dostáváme tedy podmínku

$$0 = \delta S[y(x, t)] = - \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \left(\frac{m}{l} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y \, dx \, dt,$$

což musí platit pro všechna δy . Toho docílíme jen tehdy, pokud je výraz v závorce nulový a dostáváme tak rovnici

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - \frac{T_0 l}{m} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0,$$

kteřá je pohybovou rovnicí pro klasickou strunu a nazývá se vlnovou rovnicí. Poznamenejme zde ještě, že odmocnina z konstanty stojící před druhým členem odpovídá rychlosti šíření vlny na struně.

Relativistická částice

Druhým příkladem tohoto dílu seriálu je volná relativistická částice, tedy částice, na kterou nepůsobí žádná síla. V prvním díle jsme si povídali o teorii relativity a řekli jsme si, že fyzikální zákony musí být nezávislé na inerciálním systému, ve kterém studovaný jev popisujeme. Matematicky řečeno musí být konzistentní fyzikální teorie invariantní vůči Lorentzovým transformacím.

Nyní bychom rádi vyšetřili pohyb volné relativistické částice. Tento pohyb bude opět dán jakožto extrémála nějakého funkcionálu. Abychom dostali správnou relativistickou teorii, je přirozené uvažovat také relativisticky invariantní akci. Položme si tedy otázku: známe nějaký invariant vůči Lorentzově transformaci? Známe! Příkladem je čtyřinterval, jak jsme diskutovali v úloze k prvnímu dílu našeho seriálu. Podívejme se na konstrukci akce trochu detailněji.

Rádi bychom našli akci pro částici pohybující se z bodu časoprostoru A se souřadnicemi $(x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ do bodu B se souřadnicemi $(x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3)$. Částice se pohybuje v časoprostoru po světočáře $\mathbf{x}(\lambda) = (x^0(\lambda), x^1(\lambda), x^2(\lambda), x^3(\lambda))$, kde λ je libovolný parametr určující polohu na světočáře (v předešlém značený p), jak jsme diskutovali již v prvním díle seriálu, a nabývá hodnoty λ_1 v bodě A a λ_2 v bodě B. Rozdělíme-li tuto trajektorii na malé kousíčky, pak můžeme pro každý element spočíst příslušný čtyřinterval

$$(ds)^2 = - (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2, \quad (68)$$

který je, jak víme, invariantní vůči Lorentzově transformaci.

Akci nyní získáme integrací přes celou trajektorii. K tomu potřebujeme odmocnit vztah (68). Již z úlohy k prvnímu dílu seriálu víme, že výraz na pravé straně je záporný pro částici pohybující se rychlostí menší, než je rychlost světla. Proto si musíme při odmocňování dát pozor na znaménko a psát

$$\mathcal{S}[\mathbf{x}(s)] = -mc \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{-(ds)^2},$$

kde m je klidová hmotnost částice a c je rychlost světla a s jsme zvolili jako parametr světočáry nabývající hodnot s_1 v bodě A a s_2 v bodě B. Prefaktor mc jsme museli do definice akce přidat, aby měla správný rozměr.

Vyvstává otázka, jaký má nalezená akce fyzikální význam. Víme, že nezávisí na tom, v jakém systému počítáme $(ds)^2$. Představme si tedy, že sedíme přímo na pohybující se částici. V tom případě se vůči nám poloha částice nemění a tedy $(dx^1)^2 = (dx^2)^2 = (dx^3)^2 = 0$. V tomto případě je nenulová jen jedna složka $(ds)^2 = -(dx^0)^2 = -c^2 d\tau^2$, kde τ je vlastní čas pozorovatele pohybujícího se s částicí. Potom dostáváme

$$\mathcal{S}[\mathbf{x}(\tau)] = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau$$

a akce je tedy rovna (až na prefaktor) vlastnímu času, který je potřeba, aby se částice po dané trajektorii dostala z bodu A do bodu B.

Už jsme zběhlí v počítání variací a odvozování pohybových rovnic. Provedme to i pro tento případ. Uvažujme variaci trajektorie $x^\mu(\lambda) \rightarrow x^\mu(\lambda) + \delta x^\mu(\lambda)$ mezi body A, B s hodnotami parametru λ_1 a λ_2 .⁸¹ Jako obvykle, fixujeme počáteční a koncovou polohu částice, takže $\delta x^\mu(\lambda_1) = 0 = \delta x^\mu(\lambda_2)$. Vzpomeneme-li si na první díl seriálu, kde jsme zavedli metriku $\eta_{\mu\nu}$, můžeme psát

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}[\mathbf{x}(\lambda)] &= -\delta \left(mc \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{-(ds)^2} \right) = \\ &= -\delta \left(mc \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{-\sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \right) = \\ &= -mc \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{-\sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} + \frac{d\delta x^\mu}{d\lambda} \right) \left(\frac{dx^\nu}{d\lambda} + \frac{d\delta x^\nu}{d\lambda} \right)} d\lambda - \mathcal{S}[\mathbf{x}(\lambda)] = \\ &= -mc \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{-\sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + 2 \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d\delta x^\nu}{d\lambda} \right)} d\lambda - \mathcal{S}[\mathbf{x}(\lambda)], \end{aligned}$$

kde jsme v posledním řádku využili symetrie $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$. Nyní „vtáhneme“ diferenciál $d\lambda$ zpět pod odmocninu, dosadíme za $\mathcal{S}[\mathbf{x}(\lambda)]$, vzpomeneme si, že $\sqrt{-(ds)^2} =$

⁸¹Připomeňme, že za index μ můžeme dosadit 0, 1, 2 nebo 3.

$= c d\tau$, a dostaneme

$$\begin{aligned} \delta S[\mathbf{x}(\lambda)] &= -mc \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{-(ds)^2 - 2 \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} dx^\mu d(\delta x^\nu)} + mc \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{-(ds)^2} = \\ &= -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{1 - 2 \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\tau}} d\tau + m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \approx \\ &\approx m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\delta x^\nu}{d\tau} d\tau = m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\delta x^\nu}{d\lambda} d\lambda, \end{aligned}$$

kde jsme opět využili přibližného vztahu jako výše a zanedbali příspěvky vyšších řádů v δx^μ . Je přirozené definovat relativistickou (čtyř)hybnost v analogii s klasickou hybností jako

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

Tuto hybnost můžeme dosadit to vztahu výše a provést integraci per partes. Dostáváme tak

$$\begin{aligned} 0 = \delta S[\mathbf{x}(\lambda)] &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} p^\mu \frac{d\delta x^\nu}{d\lambda} d\lambda = \\ &= \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} [p^\mu(\lambda_2) \delta x^\nu(\lambda_2) - p^\mu(\lambda_1) \delta x^\nu(\lambda_1)] - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} \frac{dp^\mu}{d\lambda} \delta x^\nu d\lambda, \end{aligned}$$

kde první člen je opět nulový díky pevné počáteční a koncové poloze $\delta x^\nu(\lambda_1) = 0 = \delta x^\nu(\lambda_2)$. Jelikož musí tato rovnost platit jinak pro všechny variace δx^ν , dostáváme pohybové rovnice ve tvaru

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = 0.$$

Podobně jako v klasické mechanice se zde tedy zachovává čtyřhybnost volné částice. Pohybuje-li se částice malou rychlostí, je vlastní čas částice přibližně roven času pozorovatele $t \approx \tau$ a můžeme psát pro $i = 1, 2, 3$

$$0 = \frac{dp^i}{d\tau} \approx \frac{dp^i}{dt} = m \frac{d^2 x^i}{dt^2}.$$

V limitě malých rychlostí tedy opravdu dostáváme pohybovou rovnici pro klasickou volnou částici z minulého dílu seriálu.

Jak by vypadala akce pro volnou částici v obecné teorii relativity? Akce by měla naprosto stejný tvar, jen by nyní nemělo ds tvar (68), ale mělo by obecný tvar z prvního dílu seriálu, který odpovídá obecně zakřivenému časoprostoru. Teď tedy konečně vidíme, co se myslí tím, že se částice pohybuje v zakřiveném časoprostoru po nejrovnějších možných drahách. Myslíme tím to, že délka měřená čtyřintervalem ds je extrémální.

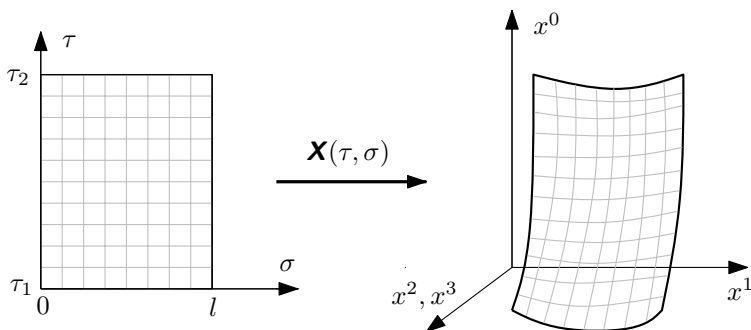
Relativistická struna

Naše diskuze akce nyní vyvrcholí studiem akce pro relativistickou strunu, tedy jednorozměrný provázek pohybující se v časoprostoru. Naše akce bude přímým zobecněním úvah o relativistické částici.

Pohyb částice v časoprostoru, kterému odpovídá světočára, je určen čtveřicí funkcí $\mathbf{x}(\tau) = (x^0(\tau), x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau))$ vlastního času τ . Podobně bude pohybující se struně odpovídat svět plocha v časoprostoru a bude parametrizována dvěma parametry

$$\mathbf{X}(\tau, \sigma) = (X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), X^2(\tau, \sigma), X^3(\tau, \sigma)) .$$

Parametr τ odpovídá časupodobnému směru na světlošle (odpovídá tedy času nějakého pozorovatele), zatímco parametr σ odpovídá prostorupodobnému směru. Přesuneme-li se do soustavy spojené s pozorovatelem, jehož vlastní čas je τ , pak pro nějaké $\tau = \tau_0$ konstantní určuje funkce $(X^1(\tau_0, \sigma), X^2(\tau_0, \sigma), X^3(\tau_0, \sigma))$, podobně jako v případě klasické struny, její tvar v tomto čase. Parametr σ pak odpovídá parametru x v klasickém případě a parametrizuje strunu v daném čase. Na funkci $\mathbf{X}(\tau, \sigma)$ tedy můžeme nahlížet jako na funkci, která každému bodu z prostoru parametrů $[\tau, \sigma] \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle \times \langle 0, l \rangle$ přiřadí jeden bod na světlošle struny jako na obrázku 42.



Obr. 42: Prostor parametrů a funkce $\mathbf{X}(\tau, \sigma)$ přiřazující každému bodu z prostoru parametru jeden bod světlošle. Na světlošle jsou také vyobrazeny souřadnice odpovídající konstantnímu τ resp. σ . Integrace v akci odpovídá sčítání obsahů všech zobrazených elementárních rovnoběžníků.

Zobecnění akce je nyní nasnadě. V případě relativistické částice byla akce (až na konstantní prefaktory) rovna Lorentzovsky invariantní délce světočáry. V případě relativistické struny máme v časoprostoru dvourozměrnou světlošle a akce bude úměrná plošnému obsahu této světlošle.

Akce relativistické částice vznikla vysčítáním přes čtyřintervaly malých elementů podél trajektorie částice. V případě struny budeme sčítat plošné obsahy malých elementů světlošle. Rozdělme si prostor parametrů $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle \times \langle 0, l \rangle$ na malinké

obdélníčky o délce stran $d\tau$ a $d\sigma$. Změna parametru τ o element $d\tau$ odpovídá zřejmě změně polohy

$$dX_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau$$

na světoploše. Podobně bude posunutí σ o element $d\sigma$ v prostoru parametrů odpovídat změně polohy

$$dX_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma$$

na světoploše. Každému malému obdélníčku $d\tau d\sigma$ bude odpovídat na světoploše v časoprostoru malinký rovnoběžník určený čtyřvektory $d\mathbf{X}_1$ a $d\mathbf{X}_2$. My bychom si přáli spočítat plochu tohoto rovnoběžníku a sečíst plochy všech takovýchto malých rovnoběžníků.

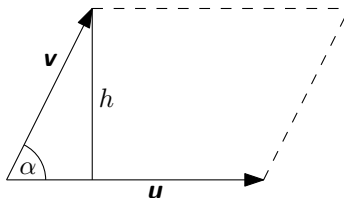
Vypočteme tedy plošný element na světoploše v prostoru parametrů odpovídající obdélníčku $\langle \tau, \tau + d\tau \rangle \times \langle \sigma, \sigma + d\sigma \rangle$. Velikost a skalární součin příslušných čtyřvektorů v časoprostoru $d\mathbf{X}_1$ a $d\mathbf{X}_2$ počítáme pomocí metriky, kterou jsme si zavedli v prvním díle seriálu. Zde využijeme následujícího značení

$$|d\mathbf{X}_1|^2 = \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} dX_1^\mu dX_1^\nu, \quad |d\mathbf{X}_2|^2 = \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} dX_2^\mu dX_2^\nu,$$

$$d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 = \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} dX_1^\mu dX_2^\nu.$$

Jak ale vypočítat obsah rovnoběžníku zadaného dvěma vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} ? Ze školy víme, že obsah rovnoběžníku spočteme jako velikost základny krát výška. Pohledem na obrázek 43 vidíme, že pro obsah S musí platit

$$\begin{aligned} S &= |\mathbf{u}|h = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \alpha = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{|\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \cos^2 \alpha} = \sqrt{|\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}. \end{aligned}$$



Obr. 43: Obrázek k výpočtu obsahu rovnoběžníku zadaného dvěma vektory.

Použijeme-li tento vzorec v našem případě, dostaneme plochu našeho malého elementu ve tvaru⁸²

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{(\mathbf{dX}_1 \cdot \mathbf{dX}_2)^2 - |\mathbf{dX}_1|^2 |\mathbf{dX}_2|^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}\right)^2 - \left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}\right|^2 \left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}\right|^2} d\tau d\sigma. \end{aligned}$$

Nyní už stačí integrovat přes celou plochu a přenásobit prefaktorem se správným rozměrem a dostáváme slavnou Nambu-Gotovu akci

$$S[\mathbf{X}(\tau, \sigma)] = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^l \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}\right)^2 - \left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}\right|^2 \left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}\right|^2} d\sigma d\tau.$$

Poznamenejme nyní, že funkce $\mathbf{X}(\tau, \sigma)$ není určena jednoznačně. Relevantní je výsledný tvar světloplchy, ale nezávisí na tom, jak budou na světloplše vypadat křivky konstantního τ a σ . Pokud je zvolíme tak, aby byly na sebe vždy kolmé, bude první člen pod odmocninou výše nulový a my máme akci

$$S[\mathbf{X}(\tau, \sigma)] = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^l \sqrt{-\left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}\right|^2 \left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}\right|^2} d\sigma d\tau.$$

Variaci této akce a odvození příslušných pohybových rovnic si necháme až na jindy. Výpočet bude velmi podobný jako v případě relativistické částice, ale diskuze pohybových rovnic pro strunu a jejich řešení si žádá vlastní díl.

V tomto díle jsme se tedy seznámili se třemi významnými akcemi a ukázali si, jak postupovat v odvození příslušných pohybových rovnic. V dalším díle odhlédneme od akce a povíme si něco o kvantové mechanice. K Nambu-Gotově akci se pak vrátíme v pátém díle, kde nás čeká odvození pohybových rovnic, jejich řešení a kvantování celé struny.

Úloha III.S ... aplikační

6 bodů

- a) V textu seriálu jsme využili přibližný vztah pro $\sqrt{1+h^2}$, kde h je malá hodnota. Zkoumejte, jak přesná je to aproximace. Jak moc se může h lišit od nuly, aby se aproximovaná a přesná hodnota lišily o méně než deset procent? Podobnou aproximací můžeme provést pro libovolnou rozumnou funkci pomocí tzv. Taylorova rozvoje. Pokuste se na internetu najít Taylorův rozvoj například pro funkce $\cos h$ a $\sin h$ kolem bodu $h = 0$, zanedbejte členy vyšší než h^2 a najděte přibližnou mezní hodnotu h , kdy se aproximovaná a přesná hodnota liší o 0,1.
- b) Uvažujme vlnovou rovnici pro klasickou strunu ze seriálu a necht' je struna pevně upevněna na jednom konci v bodě $[x; y] = [0; 0]$ a na druhém konci v bodě $[x; y] = [l; 0]$. Pro jaké hodnoty ω , α , a a b je výraz

$$y(x, t) = \sin(\alpha x) [a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)]$$

⁸²Všimněme si, že jsme museli pod odmocninou, stejně jako v případě relativistické částice, prohodit znaménko, abychom odmocňovali kladnou veličinu.

řešením vlnové rovnice?

Tip Dosadte do pohybové rovnice a využijte okrajové podmínky.

- c) V minulém díle seriálu jsme porovnávali hodnoty akce pro různé trajektorie částice. Nyní vypočtete hodnotu Nambu-Gotovy akce pro uzavřenou strunu, která od času 0 do času t stojí na místě v rovině (x^1, x^2) a má tvar kruhu o poloměru R . Máme tedy

$$X(\tau, \sigma) = (c\tau, R \cos \sigma, R \sin \sigma, 0)$$

pro $\sigma \in (0, 2\pi)$. Načrtněte dále, jak vypadá světoplocha této struny (na poslední, nulovou komponentu zapomeňme) a jak vypadají čáry konstantního τ a σ .

(řešení str. 166)

Kapitola 4: Kvantový

Přehoupli jsme se za polovinu tohoto seriálu, a proto bychom si měli zrekapitulovat, co už máme za sebou.

V prvním díle seriálu jsme podnikli velmi krátký a divoký nálet na teorii relativity a otázku kvantové gravitace. Speciální teorie relativity mluví o tom, jak různé rychlí pozorovatelé vidí věci odlišně. Prostor a čas už nejsou oddělené a pro různé pozorovatele se míchají – potřebujeme je popisovat jako jeden celek, *časoprostor*. Zároveň nám ale speciální teorie relativity říká, že *jsou některé věci, které se prostě nemění, ať se díváme, jak se díváme* (jako je například časoprostorový čtyřinterval $(\Delta s)^2$) a opravdová fyzika se nedá jiným pohledem obelhat. Obecná teorie relativity pak tyto myšlenky rozšiřuje a formuluje gravitaci pomocí zkřivení, zmačkání a pootáčení toho, co znamená čtyřinterval $(\Delta s)^2$ v různých bodech časoprostoru.

V díle druhém jsme uvedli důležitý nástroj každého teoretického fyzika – variační principy. Variační principy jsou nejbáječnější pomůcka při *hádání* fyzikálních zákonů, protože umožňují přirozeně rozšiřovat stávající teorie – třeba od bodu k řešení nebo od částice ke struně. Ve druhém i třetím díle jsme viděli, že variační principy lze použít úplně všude, u statické rovnováhy, u lomu paprsků, u kmitů mechanických strun, u letů volných částic v relativitě i v klasické fyzice, a nakonec i u pohybu těch zvláštních provázkovitých objektů, kterým říkáme *relativistické struny*.⁸³

Co teď? Pokud jste si zatím nestihli pořádně pročíst složitá odvození z minula, nemusíte zoufat, protože k akci struny se vrátíme až příště. Po uvedení relativity a principu akce se nyní vrhneme na něco docela jiného – na principy kvantové fyziky. O to tady přeci od začátku jde, *nakvantovat* gravitaci. Co ale vůbec je to kvantování? Proč je potřeba mít kvantovou teorii? A jak se to dělá? To si vysvětlíme v tomto díle.

V roli slepce s nejistou rukou

Pokud sledujete objekt v každodenním životě, řekněme mokrou houbu vrženou po vás spolužákem, onu houbu bombarduje v každém okamžiku nespočet fotonů,

⁸³Znovu opakujeme, že *mechanickou strunou* myslíme opravdovou strunu například na kytáře a *relativistickou strunou* jakousi jednorozměrnou úsečku nebo smyčku plující v časoprostoru.

ze kterých část pak vnímá vaše oko. V přímém přenosu tak můžete sledovat detailní pohyb houby a přesně předpovědět její pohyb tak, abyste se stihli včas vyhnout a ona nasáklá zápachající houba zasáhla vašeho nic netušícího nebohého spolužáka (nedostaly se k němu přes vás fotony).

V mikrosvětě je všechno jinak, každý foton nadělá pěknou paseku a s předpovědí musíte být mnohem opatrnější. Situaci si můžete představit tak, že máte zavázané oči a značně roztřesenou ruku s hůlkou. Pokud chcete najít nějaký objekt, řekněme houbu nebo, abychom se trochu přiblížili tomu mikrosvětlu, elektron, musíte na něj narazit hůlkou. Ťuknutím předmět vždy trochu vyrušíte a rozpořujete. Nicméně ruka se vám také třese tolik, že můžete omylem *překmitnout* přes celý hledaný předmět! Nad třasem ruky nemáte žádnou kontrolu, takže i když ucítíte dotek hůlky a objektu, nedokážete určit, jestli jste předmět třeba z půlky nepřekmitli a teprve pak do něj nenarazili.

Je ale jeden způsob, jak zjistit přesněji, kde se předmět v prostoru nachází, můžete svoji tyčku držet křečovitěji. Hůlka pak kmitá rychleji a do předmětu narazí dřív a s kratším překmitem. Je tu ovšem jedna nevýhoda – do předmětu při setkání narazíte rychleji a tím ho víc vyrušíte. Pokud bychom chtěli najít předmět úplně přesně, naše ruka by kmitala tak rychle, že by při nárazu předmět vystřelila někam úplně do neznáma (máme s tím třasem ruky opravdu docela problém).

Obrat Luího D Broje

Doopravdy ale nejsme slepci v mikrosvětě, ale místo roztřesené hůlky s rukou si můžete představit elementární částice, jako je foton nebo elektron. Jak to? Nebojte, hned se k tomu dostaneme.

Asi dobře víte, že světlo lze stejně dobře popsat jak jako elektromagnetickou vlnu, tak i jako proud fotonů. Spojení mezi těmito dvěma obrazy poskytuje pozorování *fotoelektrického efektu*, kdy kov vystřeluje elektrony, pokud je vystaven světlu vysoké frekvence (například ultrafialovému) a vystřeluje elektrony o větších a větších rychlostech s rostoucí frekvencí světla.

Tento jev vysvětlil v roce 1905 Albert Einstein⁸⁴ pomocí představy, že existují malé balíky oddělených vln, kde pro světlo o frekvenci f nese každý balík energii

$$E = hf, \tag{69}$$

kde h je nějaká konstanta, kterou dnes známe jako Planckovu. Lze však jít ještě dále, speciální teorie relativity přiděluje částici letící rychlostí světla c energii

$$E = pc, \tag{70}$$

kde p je hybnost částice.⁸⁵ Když zkombinujeme rovnice (69) a (70) se vztahem pro vlnovou délku světla $\lambda = c/f$, dostáváme

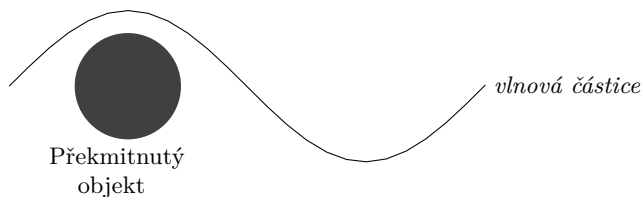
$$\lambda = \frac{h}{p}. \tag{71}$$

⁸⁴V roce 1921 pak dostal Einstein Nobelovu cenu za své služby teoretické fyzice a zejména za jeho objev zákona fotoelektrického jevu, za nic jiného!

⁸⁵Fotony však nemají žádnou vlastní klidovou hmotnost m , proto nemůžeme říct $p = mv$!

Ve své doktorské práci představil Louis De Broglie⁸⁶ zajímavou hypotézu – když mají na mikroskopické úrovni vlny vlastnosti částic, neměly by mít mikroskopické částice vlastnosti vln? Pro výpočet vlnové délky takovýchto *hmotných vln* použil právě vztah (71) s použitím klasického $p = mv$.

Zajímavý, ale trochu zvláštní nápad, říkáte si. To ale ještě nevíte, že tři roky na to naměřili experimentátoři Davisson a Germer vlnovou difrakci elektronů na krystalové mřížce odpovídající vlnové délce (71) a De Broglieho hypotéza tím byla potvrzena!



Obr. 44: Ilustrace nepřesnosti při zkoumání mikrosvěta.

To je tedy ta naše slepecká hůlka – mikroskopické částice jako foton, elektron nebo proton, které vysíláme, aby narážely do předmětů. Nic lepšího prostě k dispozici nemáme. Třás hůlky odpovídá jejich vlnovému charakteru a délka překmitu vlnové délce. Na obrázku 44 můžete vidět ilustraci *překmitu* mikroskopického objektu.

Nesmíme ale zapomenout, že *na těchto škálách musí mít i pozorovaný objekt vlnový charakter*. Navíc vlastně dobře nevíme, co to znamená *srážka dvou vlnových částic*, takže je obrázek 44 pouze jakýmsi intuitivním přiblížením toho, proč jsou naše pozorování nepřesná.

Síla sevření naší slepecké hůlky zvyšující frekvenci jejího třasu odpovídá energii částice nebo též její hybnosti. Zvýšená energie nebo hybnost částice pak vyruší jakoukoliv věc, kterou se náletem mikroskopické částice pokoušíme pozorovat.

Pokud si takto uvědomíme, že *polohu ani hybnost částice nemůžeme znát současně přesně*, dojdeme navíc k legrační zacyklenosti: *pomocí částic, jejichž přesnou polohu ani hybnost neznáme, se snažíme zjistit polohu a hybnost dalších částic, což bychom ani tak nemohli udělat přesně*.

Mikroskopický svět je prostě jako rozmlžená struktura, na kterou si nemůžeme sáhnout, ať se snažíme sebevíc. Rozmlženost *fázového prostoru* na mikroskopických škálách je pak nejlépe demonstrována pro chybu polohy Δx a hybnosti Δp takzvanými Heisenbergovými relacemi neurčitosti:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (72)$$

kde $\hbar = h/(2\pi)$ je redukovaná Planckova konstanta.

⁸⁶Byl to Francouz, takže se to čte Luí D Broj, viz nadpis.

Ještě než přjdeme k formulaci kvantové mechaniky, zmíníme jednu poslední poznámku – o částici tu mluvíme jako o vlně a naopak. Pravda je taková, že v řadě kontextů se mikroskopická částice chová výhradně vlnově, v dalších ale výhradně částicově, tj. jako hmotný bod. Je to právě tato podivná dualita, která zamotává hlavu vědcům již skoro století a neexistuje jasná shoda na tom, jak ji vysvětlovat.

Shoda však existuje na aparátu, který předpovídá výsledky experimentů, ten uvedeme záhy.

Hmotný bod je mrtev, ať žije stav!

V historii fyziky se ukázal být nesmírně plodný přístup: *Nemůžu to ani v principu změnit? Pak to není potřeba v žádných fyzikálních zákonech.* Takto například Albert Einstein vyškrtl z fyziky éter a absolutní souřadný systém, vůči kterému se mělo pohybovat světlo svojí konstantní rychlostí c , a získal speciální teorii relativity.

U kvantové mechaniky se jde ovšem ještě o krok dál – protože nemůžeme na mikroskopických škálách přesně znát polohu ani hybnost částice, prostě je zahodíme a fyzikální zákony budeme popisovat bez nich. Polohy a hybnosti, tj. bod ve fázovém prostoru, jsou nahrazeny *stavovým vektorem*, který budeme značit $|\Psi\rangle$. Smíříme se s tím, že v sobě nese pouze informaci o pravděpodobnosti různých hybností a poloh, nikoliv však jejich ostré hodnoty. Protože se obecně může částice s nějakou nenulovou pravděpodobností v principu nacházet v nekonečně mnoha bodech, bude stavový vektor obecně nekonečně-dimenzionální (bude mít nekonečně mnoho složek).

To však není všechno, protože nám experiment bezpodmínečně potvrzuje relace neurčitosti (72) pro všechny fyzikální situace, *musí být důsledkem nějaké fundamentální fyziky!* Jak to udělat se dozvíte až za pár odstavců.

O kvantové mechanice, která udává stavové vektory a jejich dynamiku, se přednáší celé semestry vysokoškolských přednášek. Pokud si ale chcete přečíst nějaký středně zevrubný úvod, můžete si v archivu na našem webu najít XX. ročník FY-KOSího seriálu, který se právě kvantové mechanice výhradně věnuje.

My si tady řekneme pouze následující: informace o měřitelných veličinách se z kvantověmechanického stavového vektoru těží takzvanými *operátory*. Operátory si můžete představit jako matice skládající se z nekonečně mnoha čísel násobící nekonečně-dimenzionální stavový vektor (nekonečně dlouhý sloupcový vektor). Podívejte se, co udělá násobení maticí v následujícím případě:⁸⁷

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

⁸⁷Pokud neumíte násobit matice a vektory, pak vezte, že se to provádí tak, že výsledný sloupcový vektor postupně plníte skalárním součinem násobeného sloupcového vektoru s řádky násobící matice. Jako první tedy do výsledného sloupcového vektoru napíšete součin původního sloupcového vektoru s prvním řádkem matice atd.

Vidíte, že na sloupcový vektor působilo násobení čtvercovou maticí jako násobení číslem λ . Pokud máme čtvercovou matici M a nějaký vektor \mathbf{v}_λ , pro který platí

$$M\mathbf{v}_\lambda = \lambda\mathbf{v}_\lambda,$$

říkáme, že \mathbf{v}_λ je vlastním vektorem operátoru (čtvercové matice⁸⁸) M s vlastním číslem λ . Právě takovýmto způsobem ale získáváme z kvantově-mechanického stavu měřitelné veličiny – pomocí jejich odpovídajících operátorů a vlastních čísel.

Co se ale stane, pokud stavový vektor není vlastním vektorem daného operátoru? Matematická teorie nám zajišťuje, že se na vlastní vektory dá každý vektor rozložit a podíl⁸⁹ zastoupení jednotlivých vlastních vektorů je úměrný *pravděpodobnosti*, s jakou nalezneme jeho vlastní hodnotu jakožto hodnotu sledované fyzikální veličiny!

Legrační je, že pak máme operátory, jako je energie částice, které mohou v některých situacích nabývat pouze diskrétních hodnot a *nic mezi tím*.⁹⁰ Můžeme tedy naměřit pouze jednu hodnotu energie a další až o nějaký kus, *kvantum*, dál.

Spousta z vás si doteď možná říkala, proč se kvantové mechanice říká *kvantová*, když se doteď zdála oproti klasické hlavně *vlnová*. Toto kvantování pozorovaných hodnot různých veličin název již osvětluje.

Souvislost mezi vlnovostí a kvantováním můžeme přiblížit následovně – asi dobře víte, že struna uchycená na houslích zní při daném utážení jen jedním tónem, kmitá s jednou frekvencí. To ale není tak úplně pravda, na strunu se vejdou i *vyšší módy* nebo *vyšší harmonické*, které kmitají s *celočíslnými násobky hlavní frekvence* a trochu pozměňují vyznění tónu a dodávají mu jeho specifické zabarvení.⁹¹

Pozorujeme tedy vlnění, které se děje pouze na určitých frekvencích, které jsou od sebe vzdáleny o nějaká kvanta. Proto, když je částice někde nějakým způsobem *uchycená* nebo též *vázaná* (jako třeba elektron v atomu), pozorujeme jeho energie v nějakých diskrétních hladinách.

Zpátky ke kvantové mechanice, jako všechny fyzikální veličiny, má i poloha x svůj operátor \hat{X} a hybnost p operátor \hat{P} . Heisenbergovy relace neurčitosti (72) jsou zajištěny postulátem, že působení operátorem polohy na stav $|\Psi\rangle$ a pak operátorem hybnosti dá jiný výsledek než při prohozeném pořadí. Tj. měření polohy a poté až hybnosti dá jiný výsledek než při prohozeném pořadí daných měření. Matematické zkoumání požadavku Heisenbergových relací vede na požadavek rovnice

$$\hat{X}\hat{P}|\Psi\rangle - \hat{P}\hat{X}|\Psi\rangle = i\hbar|\Psi\rangle.$$

Protože zmíněná rovnost musí platit pro libovolný stav, zkráceně se též tato tzv. *komutační relace* zapisuje jako

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar. \quad (73)$$

Teď tedy konečně víte, co je to kvantování – opustí se dosavadní popis pomocí přesného stavu fyzikálního systému a začne se popisovat objektem, kterému říkáme

⁸⁸Všimněte si, že čtvercová matice vždy násobením vektor jen *přeoperuje* – stane se z něj opět sloupcový vektor stejné délky.

⁸⁹přesněji druhá mocnina jeho absolutní hodnoty

⁹⁰Vzpomeňte na úlohu od Nielse Bohra k druhému dílu seriálu.

⁹¹To odpovídá diskrétnímu systému řešení vlnové rovnice z úlohy k minulému dílu seriálu.

stavový vektor. Ze všech veličin, jako je poloha nebo hybnost, se stanou operátory, a jako náš hlavní průvodce pro jejich identifikaci nám slouží komutační relace (73). Tento postup však není úplně jednoznačný, zvláště u složitějších systémů, a proto se říká, že *kvantování je spíš umění, než matematický postup*. Nakvantování systému musí proto vždy ještě potvrdit experimentální pozorování.

Průměty v nekonečných dálavách a prostorech

Mohli jste si všimnout, že jsme doteď nepoužívali složky polohy nebo hybnosti. To je proto, že budeme pro jednoduchost uvažovat pouze částici, která se může pohybovat pouze v jednom rozměru a ne ve třech, jako jsme zvyklí. Složka hybnosti i polohy je pak jen jedna a značíme ji x a p . K tomu, abychom popsali stavový vektor, si musíme vybrat něco jako souřadný systém, ve kterém vyjádříme složky vektoru. Zatímco u prostorových vektorů volíme složky podle průmětů do celých os x, y, z , v případě stavového vektoru je vše úplně jinak. Musíme totiž promítat stavový vektor *do vlastních vektorů nějakého operátoru*, kterých může být nekonečně mnoho.

Jedním z nejčastějších operátorů, do jehož vlastních vektorů se stavový vektor promítá, je operátor polohy \hat{X} . Jeho vlastní vektory jsou dost podivné, protože jsou to stavy, ve kterých částice zcela určitě nalezneme na nějaké naprosto přesné pozici x . Pokud se ale podíváte na Heisenbergovy relace (72), je jasné, že pak neurčitost hybnosti takové částice musí být *nekonečná*. U vlastních vektorů operátoru \hat{X} prostě nevíme, jakou rychlostí se částice v odpovídajícím stavu pohybuje. Tím si ale nebudeme lámat hlavu a přejdeme ke složkám stavového vektoru.

Stejně jako vektor \mathbf{v} má obvykle tři složky v_x, v_y, v_z , tak stavový vektor $|\Psi\rangle$ má složky v této takzvané x -reprezentaci $\psi(x)$, kde x indexuje průmět na vlastní stav, který se určitě nachází v bodě x . Vidíte, že složky $\psi(x)$ můžeme vlastně chápat jako funkci polohy, která v našem případě nabývá obecně komplexních hodnot. Této funkci se často říká *vlňová funkce*. Hustota pravděpodobnosti, že částice nalezneme v daném bodě, je pak dána kvadrátem velikosti vlnové funkce v daném bodě

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2.$$

Když působíme operátorem \hat{X} na náš stavový vektor $|\Psi\rangle$, promítne se na vlastní stavy operátoru a každý z průmětů je vynásoben vlastním číslem operátoru. V tomto případě jsou vlastní hodnoty polohy částice x a vlastní vektory jsou zmíněné zcela přesně lokalizované stavy v těchto polohách. Proto, když působíme operátorem \hat{X} na náš stav, každý průmět neboli složka vektoru se vynásobí odpovídající hodnotou polohy x :

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &\rightarrow \hat{X}|\Psi\rangle, \\ \psi(x) &\rightarrow x\psi(x). \end{aligned}$$

Napůl mrtvé kočky a jejich spektra

Geometricky si představovat promítání na nekonečně mnoho vektorů může být docela fuška, ale zatněte zuby, protože se už dostáváme k závěru tohoto dílu seriálu.

V druhém dílu jsme zmiňovali, že celková energie částice je součet její kinetické energie $T = mv^2/2$ a potenciální energie $V(x)$. Pokud vztah přepíšeme pomocí hybnosti $p = mv$ získáváme⁹²

$$E \equiv H = \frac{p^2}{2m} + V(x). \quad (74)$$

V kvantovém případě stačí tedy jen přejít do x -reprezentace a počítat energetické hladiny jako vlastní stavy tohoto operátoru. Operátor potenciálu bude na složky stavového vektoru $\psi(x)$ působit násobením svojí hodnotou $V(x)$ stejně jako operátor \hat{X} , protože závisí jen na poloze. Horší už je to s operátorem \hat{P} , pro jehož identifikaci máme jen komutační relaci (73). V podúloze a) k seriálu si můžete ověřit, že v x -reprezentaci splňuje komutační relace operátor

$$(\hat{P})_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}. \quad (75)$$

Když tedy chceme hledat energetické hladiny nějakého fyzikálního systému, jako je třeba elektron v atomu vodíku, vezmeme definici energie (74), vložíme do ní operátor hybnosti vyjádřený v x -reprezentaci (75) (potenciál není třeba měnit) a řešíme diferenciální rovnici⁹³

$$(\hat{H})_x \psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

kde E už je ovšem obyčejné číslo – možná měřená hodnota energie, kterou ovšem neznáme. Získáme tak vlnovou funkci, a tudíž i rozložení pravděpodobnosti výskytu částice, ale co nás většinou zajímá více, možné energetické hladiny daného systému.

Částice jako například elektron v atomu, který pak přechází mezi dvěma oddělenými energetickými hladinami, se nějak musí zbavit *celého rozdílu energie najednou*, v jednom kvantu. Forma energie, kterou se elektron energie zbavuje, je vyzářený foton. Proto, když ionizujeme atomy, pozorujeme u nich diskrétní hodnoty frekvencí (a tudíž energií), na nichž vyzařují při rekombinaci elektronů (jejich návratu do *slupek* atomu).

Jinak řečeno, pozorujeme při ionizaci a následné rekombinaci diskrétní spektrum. Protože byla kvantová mechanika používána nejdříve v kontextu spekter atomů a molekul, říká se často úloze nalezení energetických hladin daného problému *hledání spektra hamiltoniánu*.

Tím protentokrát končíme. Kvantová mechanika je divná, a jak říkal Richard Feynman, kvantové mechanice nerozumí nikdo. Její výhoda je v tom, že ačkoliv jsme v mikrosvětě jako slepci s roztřesenou rukou, kvantová mechanika dokáže v těchto oborech přesto poskytovat *neuvěřitelně přesné experimentální předpovědi*. A o tom fyzika je, o tom, co můžeme změřit. Více ke kvantové mechanice příště a v posledním díle nakvantujeme strunu – je se na co těšit.

⁹²Celkové energii se též někdy říká hamiltonián, proto se též kromě E značí jako H .

⁹³Této rovnici se někdy říká bezčasová Schrödingerova rovnice.

Úloha IV.S ... kvantová

6 bodů

- a) Podívejte se do textu, jak působí operátor polohy \hat{X} a hybnosti \hat{P} na složky stavového vektoru v x -reprezentaci (vlnovou funkci) a spočítejte jejich komutátor, tj.

$$(\hat{X})_x ((\hat{P})_x \psi(x)) - (\hat{P})_x ((\hat{X})_x \psi(x)).$$

Tip Zjistěte si, co se stane při derivaci součinu dvou funkcí.

- b) Problém energetických hladin pro volnou kvantovou částici, tj. pro $V(x) = 0$, vypadá následovně:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = E\psi(x).$$

1. Zkuste jako řešení dosadit $\psi(x) = e^{\alpha x}$ a zjistěte, pro jaká α (obecně komplexní) je E kladná (nadále používejte pouze taková α).
2. Je toto řešení periodické? Pokud ano, tak s jakou prostorovou periodou (vlnovou délkou)?
3. Je získaná vlnová funkce vlastním vektorem operátoru hybnosti (v x -reprezentaci)? Pokud ano, najděte souvislost mezi vlnovou délkou a hybností (tj. odpovídajícím vlastním číslem operátoru hybnosti) daného stavu.
4. Zkuste formálně spočítat hustotu pravděpodobnosti výskytu částice v prostoru naší vlnové funkce podle vzorce uvedeného v textu. Pravděpodobnost, že se částice vyskytuje v celém prostoru by měla být pro fyzikální hustotu pravděpodobnosti 1, tj. $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$. Ukažte, že nelze naší vlnovou funkci *nanormovat* (tj. přenásobit nějakou konstantou) tak, aby její formální hustota pravděpodobnosti podle vzorce z textu byla opravdovou, fyzikální hustotou pravděpodobnosti.
5. *Bonus* Jaká si myslíte, že je limitně neurčitost polohy částice, jejíž vlnová funkce je hodně blízka té naší? (Tj. blíží se ve všech vlastnostech, ale má vždy normovanou hustotu pravděpodobnosti a je to tudíž fyzikální stav.) Lze odhadnout pomocí Heisenbergových relací neurčitosti jaká přitom bude nejméně neurčitost hybnosti?

Tip Dávejte pozor na komplexní čísla, například kvadrát komplexního čísla je něco jiného než kvadrát velikosti komplexního čísla.

- c) V druhém díle jsme si odvodili energetické hladiny elektronu ve vodíku pomocí redukované akce. Zvláštní shodou by řešení spektra hamiltoniánu v coulombickém potenciálu protonu vedlo na úplně samé energie, tj.

$$E_n = -Ry \frac{1}{n^2},$$

kde $Ry = 13,6 \text{ eV}$ je energetická konstanta známá jako *Rydberg*. Elektron, který spadne z libovolné hladiny na $n = 2$, vyzáří energii ve formě jediného fotonu úměrnou rozdílu energie daných hladin. Ze kterých hladin musí elektron na druhou hladinu spadnout, aby bylo vyzářené světlo viditelné? Jakou budou mít odpovídající spektrální čáry barvu?

Tip Vzpomeňte si na fotoelektrický jev a na vztah mezi frekvencí světla a jeho vlnovou délkou.

(řešení str. 170)

Kapitola 5: Strunný

Tento díl bude vyvrcholením našeho seriálu. Odvodíme pohybové rovnice, které plynou z Nambu-Gotovy akce zavedené ve třetím díle. Řekneme si, že ji lze za určitých dodatečných podmínek (které lze ale vždy splnit) přepsat do tvaru vlnové rovnice klasické struny. Povíme si něco o řešeních pohybové rovnice a objevíme pojem D-brán. Přejchod ke kvantové teorii provedeme tak, že z klasických pozorovatelných (v našem případě funkcí $X^\mu(\tau, \sigma)$ parametrizujících strunu v daném čase spolu s příslušnou hustotou hybnosti na struně) přejdeme k operátorům, které splňují kanonické komutační relace z minulého dílu seriálu. Dostaneme tak hledanou kvantovou teorii relativistické struny. Po tomto matematicky vyčerpávajícím dílu seriálu nás již příště čeká fyzikální diskuze toho, co v sobě teorie strun skrývá.

Pohybové rovnice relativistické struny

Začneme odvozením pohybových rovnic pro relativistickou strunu. Strunu pohybující se v D -rozměrném⁹⁴ prostoročase jsme parametrizovali funkcemi

$$\mathbf{X}(\tau, \sigma) = (X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma)),$$

kde $d = D - 1$ je dimenze prostoru,⁹⁵ ve kterém se struna pohybuje. My už víme, že rozumnou akcí pro naši strunu je Nambu-Gotova akce

$$\mathcal{S}[\mathbf{X}(\tau, \sigma)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^l \mathcal{L}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}') \, d\sigma d\tau,$$

kde jsme v analogii s klasickou strunou označili hustotu Lagrangianu

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}') = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}')^2 - |\dot{\mathbf{X}}|^2 |\mathbf{X}'|^2}.$$

Pro jednoduchost značíme $\dot{\mathbf{X}}$ derivaci vektoru podle τ a \mathbf{X}' derivaci podle σ . Připomeňme také, že skalární součin a velikosti vektorů nepočítáme stejně jako v eukleidovské geometrii: pro vektory $\mathbf{A} = (A^0, A^1, A^2, \dots, A^d)$ a $\mathbf{B} = (B^0, B^1, B^2, \dots, B^d)$ máme předpis

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + \dots + A^d B^d.$$

Velikost vektoru lze pomocí tohoto skalárního součinu spočítat jako $|\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$.

Víme již, že pohybové rovnice, které nám popisují vývoj struny v časoprostoru, určíme z podmínky nulovosti variace akce. Provedme proto naposledy v tomto seriálu variaci

$$\delta \mathcal{S}[\mathbf{X}(\tau, \sigma)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^l \mathcal{L}(\dot{\mathbf{X}} + \delta \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}' + \delta \mathbf{X}') \, d\sigma d\tau - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^l \mathcal{L}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}') \, d\sigma d\tau. \quad (76)$$

⁹⁴Uvažování obecného rozměru prostoročasu je nutné. Kdybychom se totiž omezili hned na začátku na $D = 4$, dostali bychom nekonzistentní teorii.

⁹⁵Jednotlivé složky značíme souhrnně $X^\mu(\tau, \sigma)$.

Pro malé změny $\delta \mathbf{X}$ se členy na pravé straně liší jen málo a můžeme použít v případě prvního členu Taylorův rozvoj do prvního řádu, a to v obou proměnných $\dot{\mathbf{X}}$ i \mathbf{X}' . Dostáváme tak

$$\delta \mathcal{S}[\mathbf{X}(\tau, \sigma)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^l \sum_{\mu=0}^d \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}')}{\partial \dot{X}^\mu} \frac{\partial (\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}')}{\partial X'^\mu} \frac{\partial (\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right) d\sigma d\tau,$$

kde první člen v rozvoji se odečetl s druhým členem v (76) a další členy v rozvoji jsou úměrné prvním derivacím hustoty Lagrangiánu. Ve výrazu výše jsme také prohodili derivaci a variaci δ .

Protože se nám začínají výrazy komplikovat, označme

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}, \quad \mathcal{P}_\mu^\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu}. \quad (77)$$

Stejně jako u všech ostatních variací, i nyní bude následujícím krokem použití per partes, v jednom případě k prohození derivace podle τ a ve druhém k prohození derivace podle σ

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}[\mathbf{X}(\tau, \sigma)] = & - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^l \sum_{\mu=0}^d \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \delta X^\mu d\sigma d\tau + \int_0^l \sum_{\mu=0}^d [\mathcal{P}_\mu^\tau \delta X^\mu]_{\tau_1}^{\tau_2} d\sigma \\ & + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{\mu=0}^d [\mathcal{P}_\mu^\sigma \delta X^\mu]_0^l d\tau. \end{aligned}$$

Nyní se však objevily dva okrajové členy. Jeden z těchto členů je nulový, protože stejně jako v případě volné částice či klasické struny předpokládáme, že známe počáteční a koncovou konfiguraci struny, tj. $\delta X^\mu(\tau_1, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_2, \sigma) = 0$.

Vymizení druhého okrajového členu si zaslouží vlastní kapitolu a podíváme se na něj za chvíli. Aby tedy byla variace akce nulová pro všechny $\delta X^\mu(\tau, \sigma)$, musí být nulový i výraz v závorce a dostáváme tak pohybové rovnice pro relativistickou strunu

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0.$$

Okrajové podmínky a D-brány

Nyní je čas vrátit se zpět k okrajovému členu ve variaci Nambu-Gotovy akce. Nulovosti tohoto členu docílíme tak, že

$$[\mathcal{P}_\mu^\sigma \delta X^\mu]_0^l = \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, l) \delta X^\mu(\tau, l) - \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, 0) \delta X^\mu(\tau, 0) = 0$$

pro všechna $\mu = 0, 1, 2, \dots, d$. Existuje několik možností, jak nulovosti docílit, a ty si nyní podrobněji rozebereme.

1. *Zavřené struny* nemají žádný okraj, a proto není ani potřeba anulovat žádný okrajový člen. Hodnoty $\sigma = 0$ a $\sigma = l$ zde odpovídají témuž bodu na světloploše. Na tento případ lze proto nahlížet také tak, že se příslušné dva členy ve vztahu výše odečtou díky tomu, že jde o hodnoty v téže bodě.

2. *Otevřené struny* přinášejí zajímavější možnosti. Uvažujme pro jednoduchost jeden index μ odpovídající nějakému prostorovému rozměru a jeden z konců otevřené struny. Máme následující dvě možnosti, jak zajistit nulovost:

- V případě tzv. *Neumannovy okrajové podmínky* je $\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, 0) = \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, l) = 0$. Toto je dodatečná podmínka na konce struny, které se v tomto směru pohybují jinak volně.
- V případě tzv. *Dirichletovy okrajové podmínky* máme na okraji $\delta X^\mu = 0$. To znamená, že je poloha konce struny v tomto směru fixována. Konec struny se v tomto směru nemůže pohybovat libovolně, ale je vázán na pevnou trajektorii.

Na každém konci otevřené struny a pro každou prostorovou dimenzi můžeme zvolit buď Dirichletovu, nebo Neumannovu okrajovou podmínku. V d prostorových dimenzích musíme tak zvolit celkem $2d$ okrajových podmínek. Podle toho, jak tyto podmínky namícháme, dostáváme různé fyzikální situace. Uvažujme například otevřenou strunu, která splňuje Dirichletovy okrajové podmínky na obou koncích v p prostorových dimenzích, tedy $\delta X^\mu = 0$ pro $\mu = 1, 2, \dots, p$ a Neumannovy podmínky v ostatních rozměrech. Konce struny se nemohou volně pohybovat v těchto směrech a mají tedy pevnou souřadnici (obecně však pro oba konce různou). Jsou připevněny k $p = d - q$ rozměrnému objektu, který nazýváme *Dp-bránou*.⁹⁶ Tento název vznikl složením sousloví Dirichletova-membrána, tj. membrána v časoprostoru, která odpovídá Dirichletově okrajové podmínce pro strunu.

D-brány jsou objekty, na kterých žijí otevřené struny. Z naší analýzy se nám tak přirozeně vynořily objekty, které hrají významnou roli v dnešní teoretické fyzice a výrazně přesahují rámec teorie strun. Existují například modely vesmíru, které předpokládají, že žijeme na 4-rozměrné D-bráně ve více rozměrném prostoročasu. Některé modely vzniku vesmíru zase předpokládají, že se všechny částice zrodily při kolizi a následném vymizení (anihilaci) dvou nestabilních D-brán během velkého třesku. D-brány stály také u vzniku tzv. AdS/CFT korespondence. Ukázalo se totiž, že dvě zcela odlišné teorie (teorie gravitace na anti de-Sitterově pozadí a konformní teorie pole na jeho hranici) jsou svázány nečekanou dualitou. Gravitaci v D dimenzích můžeme popsat kvantovou teorií v $D - 1$ dimenzích. Není to užasné?! AdS/CFT korespondence se stala centrem výzkumu mnohých teoretických fyziků a dodnes jí nikdo pořádně nerozumí.

Řešení pohybové rovnice relativistické struny

Přestože jsme nepočítali explicitně derivace (77), dokážeme si představit jejich komplikovanost. Dosazením do pohybové rovnice bychom pak dostali prakticky neřešitelnou soustavu diferenciálních rovnic. Naštěstí se nám podaří rovnici tak zjednodušit, že již nebude dále co řešit. Získáme totiž vlnovou rovnici, kterou jsme vyřešili již v úloze ke třetímu dílu seriálu.

Využijeme toho, že v našem popisu struny je velká nejednoznačnost. Fyzikálně přeci nemůže záviset na tom, jak popisujeme svět plochu struny. Nesmí záviset na tom, jak vypadají čáry konstantního τ a σ na světloplše. Rozhodující je pouze

⁹⁶Pokud nespécifikujeme rozměr tohoto objektu, mluvíme jen o D-bráně.

tvar této světoplochy. Jinak řečeno, různé funkce $X^\mu(\tau, \sigma)$ mohou popisovat stejný vývoj struny. Můžeme tedy vybrat parametrizaci (křivky konstantního τ a σ) speciálně tak, aby se nám pohybové rovnice zjednodušily.

Už dříve jsme volili tyto čáry konstantního τ a σ navzájem kolmé. To můžeme určitě vždy udělat a vede to na podmínku

$$\mathbf{X}'(\tau, \sigma) \cdot \dot{\mathbf{X}}(\tau, \sigma) = 0. \quad (78)$$

Vždy také můžeme zařídít to, že $\sigma \in (0, 2\pi)$. Máme-li totiž funkci $X^\mu(\tau, \tilde{\sigma})$ parametrizující světoplochu a konce struny odpovídající $\tilde{\sigma} = 0$ a $\tilde{\sigma} = l$, stačí vzít $\sigma = 2\pi\tilde{\sigma}/l$ a máme tuto podmínku splněnu. Dále můžeme měnit to, jak jsou na sebe „nahuštěny“ čáry konstantního τ , tedy jak daleko jsou od sebe tyto čáry odpovídající parametru τ lišícího se o jednotku. Vždy můžeme brát⁹⁷

$$|\dot{\mathbf{X}}|^2 = -|\mathbf{X}'|^2. \quad (79)$$

Zvolíme-li nyní libovolně čáry konstantního σ na světoploše, fixují nám tyto podmínky již jednoznačně parametrizace celé světoplochy. Vezmeme-li podmínky (78), (79) v úvahu, derivate (77) se dramaticky zjednoduší a lze ukázat, že

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{T_0}{c} \eta_{\mu\mu} \dot{X}^\mu, \quad \mathcal{P}_\mu^\sigma = -\frac{T_0}{c} \eta_{\mu\mu} X'^\mu,$$

kde $\eta_{\mu\mu}$ je stejně jako v prvním díle seriálu rovna -1 pro $\mu = 0$ a $\eta_{\mu\mu} = 1$ jinak. Dosazením do pohybové rovnice dostáváme opravdu vlnovou rovnici

$$\ddot{X}^\mu - X''^\mu = 0$$

pro každý směr v časoprostoru μ .

Toto je rovnice, kterou jsme se již naučili řešit. Můžeme očekávat, že půjde o nějakou kombinaci sinů a kosinů stejně jako v jedné z předchozích seriálových úloh. Kromě těchto členů bude obecné řešení obsahovat také lineární část v proměnné τ . Řešení rovnice by vedlo na zdlouhavý a ne příliš zajímavý výpočet, a proto ihned řešení napíšeme a pouze ho okomentujeme. Poctivý čtenář si může vyzkoušet, že jsou pohybové rovnice i okrajové podmínky splněny.

V případě otevřené struny s volnými konci bychom například dostali řešení

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (a_n^\mu e^{-in\tau} - a_n^{\dagger\mu} e^{in\tau}) \cos n\sigma. \quad (80)$$

V řešení se vyskytuje spousta konstant, jejichž význam si nyní vysvětlíme. První dva členy popisují pohyb středu struny, zatímco poslední člen se sumou odpovídá oscilacím struny. Jelikož je struna velmi malá,⁹⁸ očekáváme, že se bude z dálky jevit jako bodová částice. Pokud na tuto částici nepůsobí žádná síla, očekáváme, že se bude pohybovat rovnoměrně přímočaře. To zajišťují právě první dva členy, které

⁹⁷Všimněme si znaménka na pravé straně. To odpovídá tomu, že je vektor $\dot{\mathbf{X}}$ časupodobný a jeho velikost na druhou je záporná. Znaménka se tak vyruší.

⁹⁸Tak malá, že ji ještě nikdy nikdo nepozoroval.

popisují pohyb hmotného středu struny. Dosadíme-li do výrazu $\tau = 0$, zjistíme, že poloha hmotného středu je určena právě konstantami x_0^μ . Zderivujeme-li výraz podle τ , měli bychom získat výraz, který odpovídá rychlosti. První člen řešení při derivaci vypadne a posledního oscilujícího členu si zatím nevšímáme. Jako rychlost hmotného středu můžeme tedy identifikovat $2\alpha' p_0^\mu$. Konstantu $2\alpha'$ jsme zavedli pouze z konvenčních důvodů a zajišťuje to, že můžeme p_0^μ považovat za hybnost struny. α' je konstanta všudypřítomná v teorii strun, ve které se objevila již od jejího samotného počátku. Tuto konstantu lze také vyjádřit jakožto funkci napětí struny T_0 , ale nebudeme se nyní zdržovat takovými maličkostmi.

Nyní přejdeme k části obsahující sumu. I zde se objevuje konvenční konstanta, tentokrát $i\sqrt{2\alpha'/n}$, kde i je imaginární jednotka. Někoho by mohla zmást exponenciála komplexního čísla. Té se ovšem nemusíme bát, protože podle definice platí

$$e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

a pomocí tohoto výrazu dostaneme v rozvoji (80) očekávané členy se siny a kosiny a nyní již s reálnými argumenty. Celkově máme následující parametry řešení pohybové rovnice pro otevřenou relativistickou strunu s volnými konci: x_n^μ a p_n^μ pro všechna n přirozená čísla a $\mu = 0, 1, \dots, d$.

Kvantujeme strunu!

Tato kapitola bude úvodem ke kvantování relativistické struny. Protože jde většínou o náročné výpočty s komplikovaným vysvětlením, nebudeme vše dělat do detailu, ale jen celou proceduru nastíníme.

Prvním krokem ke kvantové teorii je povýšení klasických veličin na operátory a postulování kanonických komutačních relací mezi nimi. Musíme tedy najít analogii polohy částice a její hybnosti v případě struny. Jak lze snadno vytušit, polohám bude odpovídat $X^\mu(\tau, \sigma)$. Hybnost musí v nějakém smyslu odpovídat časové derivaci polohy. Rozumným kandidátem na roli hybnosti bude proto funkce $\mathcal{P}_\mu^\tau(\tau, \sigma)$, která je až na konstantu derivací $X^\mu(\tau, \sigma)$ podle parametru τ .

Při řešení vlnové rovnice je ovšem potřeba vzít v úvahu vztahy, které nám zafixovaly parametrizaci struny. Lze proto očekávat, že ne všechna $X^\mu(\tau, \sigma)$ a \mathcal{P}_μ^τ budou nezávislé, ale obecně jsou spojeny podmínkami fixujícími parametrizaci. Je-li dimenze časoprostoru D , pak bude nezávislých komponent jen $D - 2$. To lze přirozeně očekávat, vezmeme-li v úvahu fakt, že teorie musí být nezávislá na parametrizaci světloplochy, která je dvourozměrná. To není úplně pravda a přesné vyšetřování podmínek na fixování parametrizace dovolují ještě dvě další proměnné, které označíme x_0^- a p^+ . Ty odpovídají kombinacím poloh a hybností hmotného středu ve zbývajících dvou rozměrech. Celkově máme následující nezávislé operátory kvantové teorie relativistické struny

$$\hat{X}^I(\tau, \sigma), \quad \hat{\mathcal{P}}^{\tau I}, \quad \hat{x}_0^-, \quad \hat{p}^+, \quad (81)$$

kde nyní $I = 2, 3, \dots, d$. Strážky nad písmenky znamenají, že již nejde o číslo, ale o operátor. Máme-li definovány operátory, je dalším krokem pro kvantování

postulování komutačních relací. Minule jsme se dozvěděli, že kanonické komutační relace mezi operátorem polohy a operátorem hybnosti mají tvar

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij},$$

kde δ_{ij} je nulové, pokud $i \neq j$, a je rovno jedné, pokud jsou si indexy rovny. V našem případě máme však indexy dva. Máme index I a k tomu ještě spojitý index σ . Zobecněním komutačních relací je

$$[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\tau, \bar{\sigma})] = i\hbar\delta_{IJ}\delta(\sigma - \bar{\sigma}),$$

kde jsme $\delta(\sigma - \bar{\sigma})$ nazvali δ -funkcí a je zobecněním symbolu δ_{ij} pro případ spojitého indexu σ . Z matematického pohledu jde o příklad tzv. distribuce, ale my se pro nyní spokojíme s intuitivním pohledem, že jde pouze o zobecnění δ_{ij} . Kromě komutačních relací výše musíme také postulovat

$$[\hat{x}_0^-(\tau), \hat{p}^+(\tau)] = -i\hbar$$

a všechny ostatní komutátory operátorů (81) jsou nulové.

Máme prozatím nekonečně mnoho kvantových operátorů (81) parametrizovaných spojitým parametrem σ ⁹⁹ Bude výhodné přejít od tohoto spojitého parametru k diskretnímu. To nám přinese dvě výhody. Operátory budeme schopni očíslovat přirozenými čísly namísto reálného σ a navíc se nám z δ -funkce stane δ_{ij} , se kterým už umíme pracovat. Jak tedy provést diskretizaci? My již známe klasické řešení (80) pohybové rovnice. V rozvoji jsou již koeficienty číslované celými čísly μ a n . V kvantové teorii se z koeficientů stanou operátory a máme tak novou množinu operátorů

$$\hat{a}_n^I, \hat{a}_n^{\dagger I}, \hat{x}_0^I, \hat{p}_0^I, \hat{x}_0^-, \hat{p}^+.$$

Vidíme, že již všechny spojitě indexy zmizely a zůstaly jen diskretní $I = 2, 3, \dots, d$ a n přirozená čísla. Trocha počítání s integrály a δ -funkcemi by nám umožnila počítat komutátory těchto operátorů

$$[a_m^I, a_n^{\dagger J}] = \eta^{IJ}\delta_{mn}, \quad [a_m^{\dagger I}, a_n^{\dagger J}] = 0, \quad [a_m^I, a_n^J] = 0.$$

Poslední ingrediencí, kterou budeme příště potřebovat, je operátor energie, tj. Hamiltonián. Jeho tvar lze opět spočítat ze znalosti Lagrangiánu. My jeho tvar ale uhádneme. Využijeme zkušenosti získané z klasické struny. Energie je součtem kinetické a potenciální energie. Kinetická energie je úměrná hybnosti na druhou, zatímco potenciální energie byla v případě klasické struny úměrná derivaci parametrizace struny v pevném čase. V analogii s klasickou strunou nás nepřekvapí tvar Hamiltoniánu

$$\hat{H} = \int_0^{2\pi} d\sigma \left(\pi\alpha' \hat{\mathcal{P}}^{\tau I} \hat{\mathcal{P}}^{\tau I} + \frac{1}{4\pi\alpha'} \hat{X}'^I \hat{X}'^I \right).$$

⁹⁹Každému odpovídá σ jeden operátor.

My jsme ovšem řekli, že budeme pracovat s diskrétní množinou operátorů, a proto musíme i předpis pro Hamiltonián vyjádřit pomocí této množiny. Dosazením z řešení pohybové rovnice dostaneme jednoduchý výraz¹⁰⁰

$$\hat{H} = \alpha' \sum_{I=2}^d p^I p^I + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{I=2}^d j a_j^{\dagger I} a_j^I - 1.$$

Zde vidíme, proč jsme volili konstanty v řešení pohybové rovnici tak, jak jsme volili. Je to proto, aby nám vyšel vztah pro energii takto jednoduše.

Nyní máme všechny potřebné ingredience k tomu, abychom našli všechny fyzikální stavy naší teorie. V příštím díle se zaměříme na tyto stavy a ukážeme si, že různé módy kmitající struny odpovídají různým částicím. První mód pro uzavřené struny bude například odpovídat gravitonu (částici způsobující gravitaci), zatímco první mód otevřené struny odpovídá fotonu (částici světla, ale také částici zprostředkující elektrickou a magnetickou interakci).

Příště si také povíme o problémech teorie, kterou jsme vybudovali, a jaká jsou řešení těchto problémů. Jedním z problémů je to, že naše teorie neobsahuje fermiony (například elektron), které se v našem světě vyskytují. Teorie je tedy neúplná. Řešením tohoto problému je supersymetrie a teorie superstrun, která je o něco komplikovanější než teorie bosonových strun, o které jsme se již leccos naučili. Druhým problémem je existence tachyonu, tedy částice s imaginární hmotností. Řešením je opět přechod k teorii superstrun, ale ne tak úplně. Řekneme si, že tachyony jsou v teorii strun něco přirozeného a nastíníme jejich roli. Dalším problémem je předpovězená dimenze časoprostoru $D = 26$, kterou zatím ještě nikdo nepozoroval. Na závěr zmíníme pár zajímavostí a aplikací teorie strun, které vás snad motivují k hlubšímu studiu teorie a jednou třeba i výzkumu na tomto aktivním poli teoretické fyziky.

Úloha V.S ... strunná

6 bodů

- Uvažujme otevřené struny a omezme se jen na tři prostorové rozměry. Namalujte, jak vypadá
 - struna volně se pohybující v časoprostoru,
 - struna připevněná oběma konci k D2-bráně,
 - struna natažená mezi D2-bránou a D1-bránou.
 Jaké jsou možnosti, kde mohou struny končit v případě konfigurace tří rovnoběžných D2-brán?
- Vyberte si jednu z funkcí \mathcal{P}_μ^τ nebo \mathcal{P}_μ^σ definovanou v první části seriálu a najděte její explicitní tvar (tj. přímo závislost na \dot{X}^μ a X'^μ). Ukažte, že podmínky $\mathbf{X}' \cdot \dot{\mathbf{X}} = 0$ a $|\dot{\mathbf{X}}|^2 = -|\mathbf{X}'|^2$ opravdu vedou na zjednodušení uvedené v textu.

¹⁰⁰Zde je potřeba použít ještě relativistické invariance teorie. Relativističnost jsme narušili zvolením parametrizace světloplochy a aby byla výsledná teorie relativisticky invariantní, musí být například dimenze časoprostoru rovna 26. Dalším důsledkem je také tento jednoduchý tvar Hamiltoniánu.

3. Najděte spektrum energií harmonického oscilátoru.

a) Energie harmonického oscilátoru je dána Hamiltoniánem

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2.$$

Druhý člen je očividně potenciální energií, zatímco první dává po dosazení $\hat{p} = m\hat{v}$ kinetickou energii. Definujme lineární kombinaci $\hat{\alpha} = a\hat{x} + ib\hat{p}$. Určete reálné konstanty a a b , tak aby měl Hamiltonián tvar

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \right),$$

kde $\hat{\alpha}^\dagger$ je komplexní sdružení $\hat{\alpha}$.

b) Ukažte ze znalosti kanonických komutačních relací pro \hat{x} a \hat{p} , že platí

$$[\hat{\alpha}, \hat{\alpha}] = 0, \quad [\hat{\alpha}^\dagger, \hat{\alpha}^\dagger] = 0, \quad [\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger] = 1.$$

c) Ve spektru oscilátoru bude jistě stav s minimální energií odpovídající nejmenšímu možnému kmitání. Označme ho $|0\rangle$. Tento stav musí splňovat $\alpha|0\rangle = 0$. Ukažte, že je jeho energie rovna $\hbar\omega/2$, tj. $\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega/2|0\rangle$. Dále ověřte, že pokud by bylo $\alpha|0\rangle \neq 0$, pak máme spor s tím, že má $|0\rangle$ minimální energii, tj. $\hat{H}\alpha|0\rangle = E\alpha|0\rangle$, kde nyní je $E < \hbar\omega/2$. Všechny vlastní stavy Hamiltoniánu můžeme potom psát jako $(\alpha^\dagger)^n |0\rangle$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$. Najděte energie těchto stavů, tj. čísla E_n taková, že $\hat{H}(\alpha^\dagger)^n |0\rangle = E_n(\alpha^\dagger)^n |0\rangle$.

Tip Použijte komutační relace pro $\hat{\alpha}^\dagger$ a $\hat{\alpha}$.

(řešení str. 172)

Kapitola 6: Spektrální

Po minulém technickém dílu se dnes podíváme již na fyzikální důsledky našich výpočtů. Nejprve zkonstruujeme spektrum otevřených strun a povíme si také o uzavřených strunách. Následně shrneme problémy námi vybudované teorie bosonových strun a nastíníme jejich řešení. Závěrem si povíme něco o aplikacích teorie strun.

Spektrum struny

Uhodíme-li do struny natažené mezi dvěma body, začne kmitat. Jak už víme, struna může kmitat s různými módy. V případě kvantové struny odpovídají tyto módy různým částicím.

Z minulého dílu víme, že Hamiltonián (operátor časového vývoje v kvantové teorii) struny má tvar

$$\hat{H} = \alpha' \sum_{I=2}^d p^I p^I + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{I=2}^d j a_j^{\dagger I} a_j^I - 1. \quad (82)$$

První člen v Hamiltoniánu má (až na konstantu) tvar jako Hamiltonián volné částice. Je to suma přes všechny nezávislé prostorové složky hybnosti umocněné na druhou. Zapomeneme-li na chvíli na druhý člen, můžeme strunu považovat za volnou částici. První člen tedy vystihuje pohyb těžiště struny. Vlastní stavy operátoru hybnosti můžeme pro jednoduchost označovat $|p^1, p^2, \dots, p^d\rangle$, kde p^1, p^2, \dots, p^d jsou konkrétní číselné hodnoty hybnosti, které operátor na stavu nabývá.

Druhá část je nám také povědomá. V příkladu k minulému dílu seriálu jsme podobné členy (opět až na konstanty) viděli v případě harmonického oscilátoru. Spektrum jsme zkonstruovali aplikací operátorů a^\dagger na vakuum. Tady máme naprosto stejnou situaci, jen máme členů odpovídajícím harmonickému oscilátoru nekonečně mnoho. Každému prostorovému směru $I = 2, \dots, d$ a každému indexu j číslujícímu módy, na kterém struna kmitá v daném směru, odpovídá jeden takzvaný kreační operátor $a_j^{\dagger I}$.

V našem případě ale máme ještě navíc první člen, který je ale na druhém úplně nezávislý. Budeme proto stavům $|p^1, p^2, \dots, p^d\rangle$ říkat *vakua*, protože je to vlastně jen pozadí vůbec neovlivňující život kmitajících módů na struně. Můžeme si to představit tak, že sledujeme strunu z pohledu soustavy spjaté s jejím těžištěm. Různé stavy struny pak dostaneme aplikací kreačních operátorů na tyto naše vakua.¹⁰¹

Podívejme se, jak situace vypadá při aplikaci malého množství kreačních operátorů. Nejprve uvažujeme samotná vakua

$$|p^1, p^2, \dots, p^d\rangle.$$

Tyto stavy odpovídají částici pohybující se hybností se složkami p^1, p^2, \dots, p^d . Jaká je hmotnost této částice? Jelikož jsme slíbili, že v tomto dílu již nebudeme počítat, napíšeme vztah pro hmotnost struny rovnou¹⁰²

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{j=1}^{\infty} j a_j^{\dagger I} a_j^I - 1 \right).$$

Všimněme si, že jde až na multiplikativní konstantu o poslední dva členy v Hamiltoniánu (82). V případě nejméně excitované struny dostáváme tedy hmotnost rovnou $M^2 = -1/\alpha'$. Všimněme si, že je hmotnost v tomto případě ryze imaginární. Takové částice se nazývají tachyony a povíme si o nich něco později.

Přejdeme k případu prvních excitovaných stavů. Druhá nejmenší možná hmotnost bude odpovídat působení jedním kreačním operátorem $a_1^{\dagger I}$. V případě zapůsobení více operátory bychom dostali větší hmotnost. Podobně bychom dostali větší hmotnost i v případě násobení $a_2^{\dagger I}$. Pro každý index $I = 2, \dots, d$ máme tedy stav

$$a_1^{\dagger I} |p^1, p^2, \dots, p^d\rangle.$$

¹⁰¹Stejně jako v případě harmonického oscilátoru splňuje naše vakuum $a_j^I |p^1, p^2, \dots, p^d\rangle = 0$ pro všechny indexy j a I .

¹⁰²Tento vztah lze snadno odvodit z Hamiltoniánu uvedeného výše. Museli bychom však detailně diskutovat tzv. light-cone kalibraci a kvantování polí v light-cone souřadnicích. Diskuze je přímočará a poměrně nudná. Proto jsme se rozhodli ji vynechat.

Hmotnost částice odpovídající tomuto stavu vychází nulová, $M^2 = 0$. Obecný stav částice o dané hmotnosti můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci těchto $d - 1$ stavů. Máme tedy vlastně vektorovou částici s $d - 1$ složkami a nulovou hmotností. V reálném světě se taková částice opravdu vyskytuje a je jí foton, kvantum světla, neboli částice zprostředkávající elektromagnetickou interakci.

Zmínáme si už jen, že elektromagnetické pole je popsáno vektorovými veličinami \mathbf{E} a \mathbf{B} a že tyto veličiny lze s použitím Maxwellových rovnic určit z koeficientů naší $(d - 1)$ -složkové lineární kombinace. Nulová hmotnost fotonu je spojená s tím, že se ve vakuu pohybuje přesně rychlostí světla, která je jinak hmotným částicím zapovězená.

Další částice, tentokrát s hmotností $M^2 = 1/\alpha'$, můžeme získat dvěma způsoby. Máme pro $I = 2, \dots, d$ možnost

$$a_2^{\dagger I} |p^1, p^2, \dots, p^d\rangle,$$

a podobně pro dva indexy I, J lze získat částice

$$a_1^{\dagger I} a_1^{\dagger J} |p^1, p^2, \dots, p^d\rangle.$$

Na této hmotnostní škále dostáváme proto jednu vektorovou částici (první případ) a jednu tenzorovou částici (druhý případ), jejíž složky jsou číslovány dvěma indexy.

My už jsme na jednu tenzorovou veličinu se dvěma indexy narazili, a to v prvním díle seriálu, kdy jsme mluvili o obecné teorii relativity. Zakřivení časoprostoru jsme tehdy zakódovali do tzv. metrického tenzoru $g^{\mu\nu}$. Přirozeně nás napadá, že by částice, kterou jsme zde získali, mohla odpovídat částici tohoto gravitačního pole. Není tomu tak. Tenzorová částice, kterou jsme získali z otevřené struny, má nenulovou hmotnost, a to se nám nezamlouvá. Graviton však musí být částice nehmotná, podobně jako foton, jinak by nebyla gravitace dalekodosahová.

Proč? Vzpomeňme na podobnost Coulombova zákona a Newtonova zákona gravitace. Částice se v obou případech přitahují (případně odpuzují), a to v libovolné vzdálenosti. Naopak například zmiňovaná slabá interakce má konečný dosah a částice příslušející této interakci jsou hmotné. Gravitační vlny, vzruchy v gravitačním poli, se navíc v obecné teorii relativity šíří rychlostí světla. Proto pokud chceme získat kvantovou verzi teorie relativity, musí být graviton nehmotný.

Kdybychom provedli stejnou konstrukci i pro uzavřené struny, také bychom dostali tenzorovou částici, ale v tomto případě již s nulovou hmotností. Graviton tedy odpovídá excitaci uzavřené struny, zatímco foton odpovídá excitaci otevřené struny. Podobně bychom mohli pokračovat dále a konstruovat další částice z vyšších excitací otevřené a uzavřené struny. Vy si to vyzkoušíte na další hmotnostní škále v úloze k seriálu.

Kmitající problémy

Mohli bychom v tuto chvíli zajásat, že máme v ruce kvantovou teorii gravitace. Gravitaci popsanou jako kvantové excitace struny. Navíc se nám povedlo v rámci

jedné teorie popsat také elektromagnetické pole. Zdá se, že teorie strun je sjednocující teorií gravitace a elektromagnetické interakce. Narážíme však na spoustu problémů.

Nejprve si všimněme, že excitace struny mohou dát dohromady nekonečně mnoho částic. My jich však pozorujeme jen konečně mnoho. Proč nevidíme všechny? Tomu se nemůžeme divit v případě, že je konstanta α' hodně malá. Pak je hmotnost excitací už na třetí hmotnostní hladině ohromně velká ($1/\alpha'$ je velké číslo). Produkce takových těžkých částic je možná jen v případě nesmírně energetických srážek. Takové energie se nám nepodařilo docílit zatím ani na největších urychlovačích.

Problém nekonečně mnoha částic se nám podařilo vyřešit. I když je částic nekonečně mnoho, něco nám tu přece jen schází. Zatím jsme totiž dokázali vyrobit pouze *bosony* (fotony, gravitony), částice odpovídající polím, ne každodenní hmotě. Hmota, ze které je například váš stůl v pokoji, je složena hlavně z *fermionů* (elektronů, kvarků), které excitací na naší struně nevyrobíme. Naší právě představené teorii strun se proto říká *bosonová teorie strun*. Není však žádný problém bosonovou teorii strun rozšířit pomocí *supersymetrie*, která elegantně fermiony a bosony propojuje do jednoho velkého celku.

Této rozšířené teorii se říká *teorie superstrun*. My jsme se pro teď zabývali jen jednodušší bosonovou teorií, ale přechod k teorii superstrun je už jen o něco málo komplikovanější.

Jak už jsme si před pár odstavci pověděli, spektrum kvantových stavů struny obsahuje také stav s imaginární hmotností. Částice s imaginární hmotností se však musí pohybovat rychlostí větší než rychlost světla a máme tak zdánlivý rozpor s teorií relativity. Tachyonové stavy lze v některých případech odstranit také přechodem k teorii superstrun. I v teorii superstrun se však za některých podmínek, pokud struna končí na některých typech D-brán, může tachyon objevit.

Existenci tachyonu lze snadno pochopit v rámci kvantové teorie pole. Uvažujme, že máme tachyon popsáný veličinou φ (pole konstantní v celém prostoru). Uvažujme situaci, kdy je dynamika tachyonu popsána přibližným potenciálem ve tvaru

$$V(\varphi) = a + b\varphi^2 + c\varphi^3 + \dots,$$

kde tečky znázorňují členy odpovídající vyšším mocninám φ a a , b , c jsou konstanty. V teorii pole má hmotový člen v potenciálu však následující tvar

$$\frac{1}{2}m^2\varphi^2$$

a porovnáním s výrazem výše můžeme odečíst, že hmotnost musí být rovna

$$m^2 = 2b.$$

Co když je tedy konstanta b záporná? Pak je také záporná druhá mocnina hmotnosti a jedná se o tachyon. To odpovídá tomu, že má potenciál $V(\varphi)$ v nule zápornou druhou derivaci a jde o maximum potenciálu. Když si ale vzpomeneme na obrázek s kuličkami z druhého dílu seriálu, je nám jasné, že tato situace je neudržitelná. Maximum je nestabilní rovnovážný stav a částice má tendenci se při libovolném

vyrušení posunout do minima potenciálu (tj. do *údolí*). V něm je ovšem druhá derivace potenciálu již kladná a při rozvinutí potenciálu kolem této hodnoty dostaneme člen, který odpovídá kladné druhé mocnině hmotnosti. Sklouznutí do minima tedy odpovídá okamžitému rozpadu na částici s kladnou hmotností.

I v případě tachyonu tedy půjde o stabilní stav a tachyon získá kladnou hmotnost. Předchozí tvrzení můžeme také formulovat tak, že je původní teorie nestabilní a tachyon má tendenci kondenzovat do stabilního stavu. To odpovídá tomu, že se původní nestabilní D-brána rozplyne. Tato takzvaná *tachyonová kondenzace* však není v částicové fyzice zas tak výjimečnou situací, jeden z nejslavnějších případů, kde je situace zcela obdobná, je *Higgsův boson*.

Posledním problémem, o kterém se zmíníme, je problém dimenze. Teorie strun, tak jak jsme ji vybuodovali, bohužel není obecně Lorentzovsky invariantní, tj. je v rozporu s teorií relativity. K tomu ovšem nedochází tehdy, je-li dimenze časoprostoru rovna

$$D = d + 1 = 26.$$

Že by byl náš časoprostor 26-rozměrný? Už dvakrát nám z problémů pomohla teorie superstrun. Můžeme tedy čekat, že i zde povede přechod k této teorii na dimenzi $D = 4$ tak, jak bychom čekali. Není tomu ovšem tak! Teorie superstrun dává podmínku $D = 10$. To je už velká redukce původních 26 rozměrů. Co provést se zbylými šesti dimenzemi?

To, že další dimenze nevidíme, nemusí nutně znamenat, že neexistují. Kdyby totiž byly ostatní rozměry svinuté do malinkých ruliček, běžně bychom je nebyli schopni detekovat. Představme si například list papíru, který můžeme považovat za dvojrozměrný objekt. Pokud jej srolujeme do tenké trubičky a podíváme se na ni z dostatečné dálky, bude se nám jevit jako jednorozměrný objekt. Podobně když svineme neboli *kompaktifikujeme* další rozměry a čtyři klasické necháme rovné, z dálky už je nevidíme.

A zkoušel někdo, jestli je to všechno pravda?

Existují experimenty, které by mohly vést k objevu kompaktifikovaných extra dimenzí. Například lze studovat velice jemné odchylky od Newtonova zákona gravitace na malých vzdálenostech (menších než centimetr). Taková odchylka by signalizovala existenci vyšších dimenzí. Bohužel ale nic takového nebylo zatím pozorováno.

Přímé experimentální potvrzení výsledků teorie strun je zatím v nedohlednu. Přesto například objev částic, které předpovídá supersymetrie, by nám však naznačoval, že se ubíráme tím správným směrem. V CERNu bude po krátké pauze brzy opět v provozu velký srážeč hadronů a bude testovat (kromě dalších jevů) supersymetrii. Následující roky rozhodnou, zdali se bude teoretická fyzika ubírat „super-směrem“, nebo úplně jinudy.

Dalším klíčovým experimentem je průzkum fází vesmíru krátce po Velkém třesku. Možná jste zaznamenali v tomto kontextu převratné výsledky experimentu

BICEP2 z minulého měsíce. Tým vědců naměřil specifické vzorce v mikrovlnném pozadí,¹⁰³ které dokládají existenci takzvaných *primordiálních* gravitačních vln.

Důležité jsou pro nás na výsledku týmu BICEP2 dvě věci. První důležitá věc je, že energetická škála, při které dokumentované procesy probíhaly, je jen o dva řády nižší než planckovská, kterou jste si mohli odvodit v prvním dílu seriálu. V dějích by se tedy již mohla otisknout slabá změna gravitace vzhledem ke kvantování. Druhý zásadní fakt je, že vzruchy budící nepřímo pozorované gravitační vlny jsou s vysokou pravděpodobností kvantového původu. To jest mohou za ně nejspíš přímo kvantové fluktuační v gravitačním poli. Každopádně je BICEP2 milníkem v historii fyziky, kdy lidstvo stojí na jakési pomyslné hranici v mnoha ohledech, ať už jde o kosmologii nebo fundamentální fyziku.

Závěr

V letošním seriálu o teorii strun jsme nastínili stěžejní metody využívané v teoretické fyzice. Především se jednalo o základy teorie relativity, kvantové mechaniky, klasické mechaniky v řeči akce a některých matematických metod. Vše jsme prokládali diskuzí teorie strun. Umíme vyřešit pohybovou rovnici klasické struny, odvodit pohybové rovnice relativistické struny z Nambu-Gotovy akce, víme, jakým způsobem lze strunu nakvantovat a jaké jsou různé možné stavy struny.

Tím vším ale rozmanitost teorie strun nekončí, nýbrž začíná. Struny mohou například interagovat, mohou se spojovat a rozpojovat. Můžeme studovat superstruny a duality v této teorii nebo spoustu dalších aspektů. I kdyby se ukázalo, že teorie strun není správnou teorií kvantové gravitace, je přínosem v mnoha dalších oborech matematiky a fyziky, kde dnes hraje významnou roli.

A je konec seriálu o teorii strun. Pokud jste se dočetli až sem, gratulujeme. Tímto dílem seriálu se s vámi loučí Vojta a Mirek. Je nám potěšením předat štafetu tvůrců seriálu na příští rok někomu jinému. Doufáme, že se vám seriál líbil a někdy na viděnou.

Úloha VI.S ... spektrální

6 bodů

1. Jak bude vypadat spektrum otevřené struny na hmotnostní hladině $M^2 = 2/\alpha'$? Kolik máme možných stavů struny na této hladině?
2. Pokud bychom uvažovali interakci tachyonu s jinými strunami, zjistili bychom, že ho můžeme popsat přibližně jako částici pohybující se v nějakém potenciálu. Uvažujme model struny, která je upevněna na nestabilní D-bráně. Odpovídající potenciál tachyonu je určen vztahem

$$V(\varphi) = \frac{1}{3\alpha'} \frac{1}{2\varphi_0} (\varphi - \varphi_0)^2 \left(\varphi + \frac{1}{2}\varphi_0 \right),$$

kde α' a φ_0 jsou kladné konstanty. Roznásobte závorky a určete hmotnost tachyonu jako dvojnásobek koeficientu stojícího před φ^2 . Najděte minimum po-

¹⁰³Nejstarší světlo ve vesmíru vzniklé ve chvíli, kdy začal být vesmír po Velkém třesku *průhledný*.

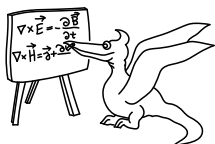
tenciálu $\tilde{\varphi}$ a ukažte, že provedeme-li v potenciálu záměnu $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi} + \varphi$ (tj. rozvíjíme teorii kolem minima tachyonového potenciálu), dostaneme po roznásobení a odečtení koeficientu před φ^2 kladnou hmotnost tachyonu. Záporná hmotnost tedy ukazuje na nestabilitu D-brány a ve stabilní konfiguraci, kdy D-brána vymizí (minimum potenciálu), již hmotnost není záporná.

3. Teorie superstrun umožňuje popis fermionů. Pro jejich popis je však potřeba antikomutujících veličin. Pro ty se zavede namísto komutátoru antikomutátor vztahem

$$\{A, B\} = AB + BA.$$

Najděte takové dvě 2×2 matice a a b , které splňují $\{a, a\} = 1$, $\{b, b\} = 1$ a $\{a, b\} = 0$.

(řešení str. 175)



Řešení úloh ze seriálu

Úloha I.S ... relativistická

- a) Kvantovou gravitaci potřebujeme jen při studiu velmi malých vzdáleností, kdy jsou gravitační síla a kvantové efekty rovnocenné. Gravitační sílu charakterizuje gravitační konstanta, kvantovou mechaniku Planckova konstanta a speciální teorii relativity rychlost světla. Najděte hodnoty těchto konstant v tabulkách a zkuste z nich vzájemným násobením a umocňováním získat veličinu s jednotkou délky. Tak získáte délkovou škálu, na které je relevantní gravitace a kvantová mechanika současně.
- b) Ukažte, že provedeme-li speciální Lorentzovu transformaci (tj. přejdeme do systému pohybujícímu se vůči původnímu rychlostí v ve směru osy x^1)

$$x_{\text{nov}}^0 = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x_{\text{nov}}^1 = \frac{-\frac{v}{c}x^0 + x^1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x_{\text{nov}}^2 = x^2, \quad x_{\text{nov}}^3 = x^3,$$

potom se hodnota čtyřintervalu nezmění.

- c) Vzpomeňte na definici čtyřintervalu a položte $\Delta x^3 = \Delta x^2 = 0$. Máme pak

$$(\Delta s)^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2.$$

V jaké části roviny $(\Delta x^0, \Delta x^1)$ je čtyřinterval $(\Delta s)^2$ záporný a kde kladný? Jak vypadá křivka definovaná $(\Delta s)^2 = 0$?

- a) Abyste úlohu vyřešili, stačí vědět příslušné rozměry konstant; jejich číselné hodnoty si dohledáte později.¹⁰⁴ Máme gravitační konstantu $[G] = \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$, Planckovu konstantu $[h] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ a rychlost světla ve vakuu $[c] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (hranaté závorky značí jednotky daných konstant). Ihned si můžeme všimnout, že kilogramy figurují jenom v G a h . Proto pokud chceme kilogramy vyřadit, musí být nutně výsledek v mocninách $[Gh] = \text{m}^5 \cdot \text{s}^{-3}$. Pro vyřazení sekund je potřeba Gh vydělit rychlostí světla na třetí. Pro rozměr v metrech veličinu Gh/c^3 odmocníme a získáváme

$$\sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 4,05 \cdot 10^{-35} \text{ m}.$$

V teoriích kvantové gravitace se mnohdy více hodí takzvaná Planckova délka ℓ_P definovaná analogicky jako naše délka jen pomocí redukované Planckovy konstanty $\hbar = h/2\pi$.

¹⁰⁴Pokud byste konstanty našli v jiných jednotkách, nepaměňte, že $\text{J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ a $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- b) Chceme spočítat čtyřinterval mezi nějakými dvěma obecnými prostoročasovými body (událostmi) \mathbf{x} a \mathbf{y} v inerciálním systému souřadnic. Definujeme-li vektor $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, jeho čtyřinterval pak vypadá takto:

$$(\Delta s)^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2.$$

Pokud transformujeme polohy událostí \mathbf{x} a \mathbf{y} podle předpisu v zadání, dostaneme pro jeho složky po transformaci

$$\begin{aligned}\Delta x_{\text{nov}}^0 &= \frac{\Delta x^0 - \frac{v}{c} \Delta x^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ \Delta x_{\text{nov}}^1 &= \frac{\Delta x^1 - \frac{v}{c} \Delta x^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ \Delta x_{\text{nov}}^2 &= \Delta x^2, \\ \Delta x_{\text{nov}}^3 &= \Delta x^3.\end{aligned}$$

Je tedy vidět, že rozdíl polohových vektorů se transformuje stejně jako vektory samotné. Transformační vztahy dosadíme do nového čtyřintervalu a upravujeme:

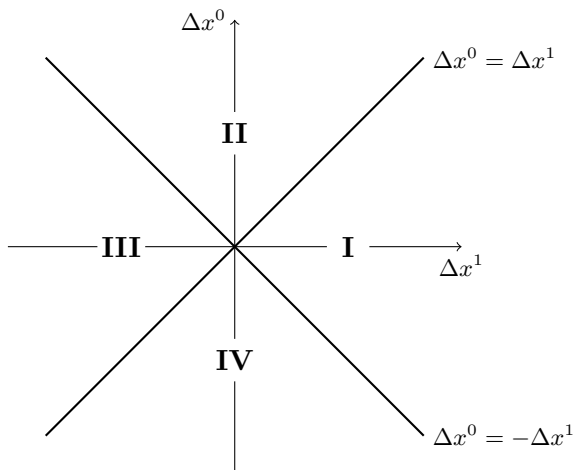
$$\begin{aligned}(\Delta s_{\text{nov}})^2 &= -(\Delta x_{\text{nov}}^0)^2 + (\Delta x_{\text{nov}}^1)^2 + (\Delta x_{\text{nov}}^2)^2 + (\Delta x_{\text{nov}}^3)^2 = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[-\left(\Delta x^0 - \frac{v}{c} \Delta x^1\right)^2 + \left(\Delta x^1 - \frac{v}{c} \Delta x^0\right)^2 \right] + \\ &\quad + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[-(\Delta x^0)^2 + \frac{v^2}{c^2} (\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 - \frac{v^2}{c^2} (\Delta x^1)^2 \right] + \\ &\quad + (\Delta x_{\text{nov}}^2)^2 + (\Delta x_{\text{nov}}^3)^2 = \\ &= -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2,\end{aligned}$$

kde jsme po dosažení zrozpali mocniny v hranatých závorkách, odečetli odpovídající členy a vytkli a pokrátili $1 - v^2/c^2$. Získali jsme tedy požadovanou invarianci čtyřintervalu při speciální Lorentzově transformaci

$$(\Delta s_{\text{nov}})^2 = (\Delta s)^2.$$

- c) Začneme nejdřív položením $(\Delta s)^2 = 0$. Pak můžeme zkoumat znaménko na různých stranách křivky

$$0 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta x^0 = \pm \Delta x^1,$$



Obr. 45: Graf roviny $(\Delta x^1, \Delta x^0)$ s vyznačeným řešením $(\Delta s)^2 = 0$.

což definuje jednu přímku se směrnici 1 a druhou -1 v rovině $(\Delta x^1, \Delta x^0)$, jako je vidět na obrázku 45. Tyto dvě přímky značí události propojené s počátkem částicemi cestujícími rychlostí světla.

Zpátky k příkladu, na obrázku 45 jsou vyznačeny oblasti I, II, III a IV. Je jasné, že v nich bude znaménko $(\Delta s)^2$ konstantní, protože neprochází nulou (to prochází jenom na nakreslených přímkách). V daných oblastech snadno zjistíme, že platí

$$\begin{aligned} \text{I: } & (\Delta x^1)^2 > (\Delta x^0)^2, \\ \text{II: } & (\Delta x^1)^2 < (\Delta x^0)^2, \\ \text{III: } & (\Delta x^1)^2 > (\Delta x^0)^2, \\ \text{IV: } & (\Delta x^1)^2 < (\Delta x^0)^2. \end{aligned}$$

Vzhledem k definici čtyřintervalu je jasné, že v oblastech I a III ($|\Delta x^0| < |\Delta x^1|$) bude čtyřinterval kladný. Vektorům posunutí mezi událostmi, pro které je čtyřinterval kladný, se říká *prostorupodobné*, protože se mezi danými událostmi nelze dostat menší než světelnou rychlostí, a tudíž pro nikoho nepředstavují dvě události na jeho vlastní časové ose.

Naopak v oblastech II a IV ($|\Delta x^0| > |\Delta x^1|$) je čtyřinterval určitě záporný. Těmto vektorům mezi událostmi se říká *časupodobné*, protože dané události lze v principu spojit cestováním podsvětelnou rychlostí, a tudíž to mohou být události pozorované jedním pozorovatelem na jeho časové ose.

Úloha II.S ... akční

- a) Jaký je fyzikální rozměr akce? (Jaké má tato veličina jednotky?) Má stejnou jednotku jako některá z fundamentálních konstant z první otázky k minulému dílu seriálu? Která?
- b) Od Nielse Bohra – Uvažujte pohyb hmotného bodu po kružnici s dostředivou silou

$$F_d = ma_d = \frac{\alpha}{r^2},$$

kde r je poloměr kružnice a α nějaká konstanta. Pak

1. Spočítejte redukovanou akci S_0 pro jeden oběh po kružnici jako funkci jejího poloměru r .
2. Určete hodnoty r_n , pro které je hodnota S_0 přirozeným násobkem konstanty z podúlohy a).
3. Celková energie hmotného bodu je $E = T + V$. Pro tuto sílu je $V = -\alpha/r$. Vyjádřete energie E_n částic v závislosti na poloměrech r_n za pomoci uvede-ných konstant.

Tip Jistě jste ve fyzice probírali pohyb po kružnici a odpovídající vztahy mezi pohybovými veličinami. Použijte je a pak se integrace akce po obvodu kružnice s konstantním r podstatně zjednoduší (veličiny konstantní při integraci můžete před integrál vytknout). Nezapomeňte také, že samotný dráhový integrál „ničeho“ je prostě délka zintegrované dráhy.

- c) Poslední podúloha může znít komplikovaně, ale je pouhým cvičením na derivaci a integraci jednoduchých funkcí. Vystačíte si se základními tabulkovými derivacemi a integrály. Ověřte, že plná akce S pro volnou částici pohybující se z bodu $[0; 0]$ do bodu $[2; 1]$ je pro trajektorii odpovídající přímočarému pohybu (první případ) minimální, tedy je větší v ostatních dvou případech

$$\mathbf{y}(t) = (2t, t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \left(1 - \cos(\pi t) + \frac{1}{\pi} \sin 2\pi t, t \right),$$

$$\mathbf{y}(t) = \left(2t, \frac{e^t - 1 + t^2(t - 1)}{e - 1} \right),$$

kde e je Eulerovo číslo.

Tip Nejprve spočítejte derivaci $\mathbf{y}(t)$, dosadte do výrazu pro akci a zintegrujte.

- a) Rozměr integrované veličiny určíme vždy jako rozměr toho, co je integrováno, krát rozměr toho, přes co je integrováno. Když se tedy podíváme na definici redukované akce, je její rozměr [hybnost·délka], což dává $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ nebo též J·s. Stejně tak má lagrangian rozměr energie a je integrován přes čas, takže i pro neredukovanou akci získáváme rozměr J·s. Jediná ze tří konstant G , h , c má takovýto rozměr, a to Planckova konstanta h .
- b) Od Nielse Bohra

1. Abychom spočítali redukovanou akci, potřebujeme nejdříve vyjádřit hybnost, a tudíž i rychlost částice na kružnici. Pro rovnoměrný pohyb s rychlostí v a dostředivým zrychlením a_d po kružnici s poloměrem r máme

$$\frac{v^2}{r} = a_d = \frac{F_d}{m} = \frac{\alpha}{mr^2}. \quad (83)$$

Získáváme tedy úpravou $p = mv = \sqrt{\alpha m/r}$. To je ovšem výraz konstantní pro celý kruhový pohyb, a tudíž dostáváme po integraci redukované akce podél kružnice

$$S_0 = \int_{\bigcirc} p \, ds = \sqrt{\alpha m/r} \int_{\bigcirc} ds = 2\pi r \sqrt{\alpha m/r}. \quad (84)$$

2. Akci (84) upravíme a položíme pro nějaké poloměry r_n rovnu n -násobkům Planckovy konstanty h (viz výsledek podúlohy a):

$$2\pi\sqrt{\alpha m r_n} = nh. \quad (85)$$

Umocněním celé rovnice (85) na druhou a převedením všech členů kromě r_n dělením na pravou stranu získáváme

$$r_n = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m \alpha}.$$

3. Vyjádříme si nejdříve kinetickou energii částice na kružnici pomocí již použitých vztahů (83)

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ma_d r = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{r}.$$

Protože $V = -\alpha/r$, dostáváme pro celkovou energii $E = T + V = -\alpha/2r$. Dosazením r_n a krácením dostáváme

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m \alpha^2}{n^2 h^2}.$$

Zkuste si za α dosadit $e^2/4\pi\epsilon_0$, kde e je náboj elektronu a ϵ_0 permitivita vakua, a za m hmotnost elektronu – dostanete energetické hladiny elektronu v atomu vodíku. Pokud jste se dostali až sem, gratulujeme. Právě jste totiž spočítali něco, za co dostal Niels Bohr před 91 lety Nobelovu cenu.

- c) V této podúloze je potřeba znát derivace mocnin $(t^n)' = nt^{n-1}$, sinů $(\sin t)' = \cos t$ a kosinů $(\cos t)' = -\sin t$ a exponenciální funkce $(e^t)' = e^t$ a derivaci funkce s přenásobeným argumentem $(f(\alpha t))' = \alpha f'(\alpha t)$, kde derivaci podle t značíme v celém řešení čárkou. Dále potřebujeme znát primitivní funkce k mocninám $\int t^n dt = t^{n+1}/(n+1)$, sinu $\int \sin t dt = -\cos t$ a kosinu $\int \cos t dt = \sin t$ a exponenciální funkci $\int e^t dt = e^t$ spolu se substitucí $\int f(\alpha t) dt = (1/\alpha) \int f(t) dt$ a integrací per-partes zmíněnou již v textu seriálu. Všechny tyto vztahy naleznete v libovolném textu k diferenciálnímu a integrálnímu počtu.

Všimněte si, že každá z trajektorií je v čase $t = 0$ v bodě $[0; 0]$ a v čase $t = 1$ v bodě $[2; 1]$ (argumenty sinu a cosinu jsou v radiánech). Víme, že akce je integrál z $(my'^2)/2$, ale protože $m/2$ je jen pouhá konstanta, bude nám úplně stačit porovnávat integrál

$$\int_0^1 y'^2 dt$$

pro každou zadanou trajektorii. Pro první trajektorii získáme derivaci podle t rychlost $\mathbf{y}' = (2, 1)$. Vynásobením na druhou získáváme $y'^2 = \mathbf{y}' \cdot \mathbf{y}' = 5$. Integrál z pětky přes interval o délce jedna je snadný, je to prostě $5 \cdot 1$. Celkově tedy musíme ověřit, že ostatní integrály z kvadrátu rychlosti jsou větší než 5. Derivace pro druhou trajektorii je už těžší, ale při správném použití všech zmíněných pravidel získáváme

$$\mathbf{y}' = (\pi \sin(\pi t) + 2 \cos 2\pi t, 1) .$$

Musíme tedy spočítat integrál

$$\int_0^1 ((\pi \sin(\pi t) + 2 \cos 2\pi t)^2 + 1) dt .$$

Integrál z jedničky spočteme opět snadno. Po roznásobení závorky dostaneme tři členy, které lze zintegrovat velmi podobně. Integrace těchto tří členů je trochu pracnější a nám stačilo, když jste si příslušné integrály našli na internetu. Ukažme si jako příklad, jak integrovat jeden z těchto členů. Integrál můžeme přepsat následovně

$$\int_0^1 \sin^2(\pi t) dt = \int_0^1 \frac{1 - \cos(2\pi t)}{2} dt ,$$

což plyne z identit $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ a $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ jejich vzájemným odečtením. První člen výše opět zintegrujeme snadno, protože jde o konstantu, a druhý člen je již tabulkový integrál. Primitivní funkci ke kosinu jsme si uvedli výše a pro náš integrál máme tedy

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(2\pi t) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} (\sin(2\pi \cdot 1) - \sin(2\pi \cdot 0)) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} .$$

Podobně vypočteme zbylé dva členy a celkově dostáváme hodnotu 5,27, což je větší než předchozích 5.

V posledním případě máme derivaci rovnu

$$\mathbf{y}' = \left(2, \frac{e^t + 2(t-1)t + t^2}{e-1} \right) .$$

Dosadíme-li do výrazu pro akci, zjistíme, že musíme po umocnění zintegrovat výrazy tvaru t^n pro $n = 2, 3, 4$, e^t , te^t a t^2e^t . První dva případy jsou přímo

tabulkové integrály. Druhé dva integrály lze spočíst pomocí metody per partes. Ukažme si první případ. Druhý je zcela analogický. Dostáváme

$$\int_0^1 te^t dt = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - \int_0^1 e^t dt = e - (e^1 - e^0) = 1.$$

Spočteme-li poctivě všechny integrály, dostaneme hodnotu akce 5,23, což je opět více než původních 5.

V této podúloze jsme si tedy uvědomili, že akce každé trajektorii přiřadí nějaké číslo. Fyzikální trajektorie, podél které se částice pohybuje, odpovídá pak extrémální hodnotě akce. Ukázali jsme si, jak spočíst pár základních derivací a integrálů a věříme, že se vám tyto znalosti budou v budoucnu hodit.

Úloha III.S . . . aplikační

- a) V textu seriálu jsme využili přibližný vztah pro $\sqrt{1+h^2}$, kde h je malá hodnota. Zkoumejte, jak přesná je to aproximace. Jak moc se může h lišit od nuly, aby se aproximovaná a přesná hodnota lišily o méně než deset procent? Podobnou aproximaci můžeme provést pro libovolnou rozumnou funkci pomocí tzv. Taylorova rozvoje. Pokuste se na internetu najít Taylorův rozvoj například pro funkce $\cos h$ a $\sin h$ kolem bodu $h = 0$, zanedbejte členy vyšší než h^2 a najděte přibližnou mezní hodnotu h , kdy se aproximovaná a přesná hodnota liší o 0,1.
- b) Uvažujme vlnovou rovnici pro klasickou strunu ze seriálu a necht' je struna pevně upevněna na jednom konci v bodě $[x; y] = [0; 0]$ a na druhém konci v bodě $[x; y] = [l; 0]$. Pro jaké hodnoty ω , α , a a b je výraz

$$y(x, t) = \sin(\alpha x) [a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)]$$

řešením vlnové rovnice?

Tip Dosadte do pohybové rovnice a využijte okrajové podmínky.

- c) V minulém díle seriálu jsme porovnávali hodnoty akce pro různé trajektorie částice. Nyní vypočtete hodnotu Nambu-Gotovy akce pro uzavřenou strunu, která od času 0 do času t stojí na místě v rovině (x^1, x^2) a má tvar kruhu o poloměru R . Máme tedy

$$X(\tau, \sigma) = (c\tau, R \cos \sigma, R \sin \sigma, 0)$$

pro $\sigma \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Načrtněte dále, jak vypadá světoplocha této struny (na poslední, nulovou komponentu zapomeňme) a jak vypadají čáry konstantního τ a σ .

- a) V textu seriálu jsme využili aproximace

$$\sqrt{1+h^2} \approx 1 + \frac{1}{2}h^2.$$

Dosadíme-li pár hodnot do obou stran výrazu, zjistíme, že pro malá h lze vztah považovat za praktický přesný (relativní odchylka od přesné hodnoty je pro $h = 0,1$ pouhých 0,001 %). Rozdílnost pravé a levé strany však pro vyšší hodnoty h stoupá. Pro $h = 1$ je to již 6 % rozdíl a pro $h = 10$ nelze už ani mluvit o aproximaci.

Jaká je tedy hodnota h , aby byla odlišnost pravé a levé strany právě 10%? Tuto hodnotu určíme řešením následující rovnice

$$\frac{1 + 0,5h^2 - \sqrt{1 + h^2}}{\sqrt{1 + h^2}} = 0,1.$$

Po dvou umocněních na druhou dostaneme kvadratickou rovnici v h^2 , jejímž řešením dostáváme dvě reálná řešení $h \doteq \pm 1,195$. Hodnota h se tedy může lišit od nuly maximálně o 1,195, aby byla přesnost aproximace maximálně 10%.

Podobnou aproximaci lze provést i pro další funkce. Speciálně pro sinus a kosinus máme rozvoje

$$\begin{aligned} \sin h &= h - \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120} + \dots, \\ \cos h &= 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} + \dots \end{aligned}$$

Čím více členů v Taylorově rozvoji funkce vezmeme v úvahu, tím lepší dostáváme aproximaci. Jednotlivé členy se obvykle liší řádově. V případě sinu dává například první člen pro $h = 0,5$ příspěvek 0,5, zatímco druhý člen 0,02 a následující pouhých 0,0003. Člen následující po členu, do kterého uvažujeme rozvoj, pak můžeme považovat za odhad chyby aproximace. V našem případě uvažujeme jen členy do h^2 v rozvoji výše a následující člen pak určuje přibližnou chybu. Pro h odpovídající chybě 0,1 pak máme podmínku

$$\begin{aligned} \frac{h^3}{6} &\approx 0,1, \\ \frac{h^4}{24} &\approx 0,1. \end{aligned}$$

Řešením dostáváme v prvním případě mezní hodnotu 0,843 a ve druhém případě 1,245 (hodnoty udáváme v radiánech). Tento odhad chyby není daleko od skutečné hodnoty, která je 0,854 a 1,261.

b) Dosadíme navrhovaný tvar řešení do vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0,$$

kde jsme označili rychlost šíření vlny $c^2 = (T_0 l) / m$. K tomu potřebujeme umět parciálně derivovat podle x a t . Derivujeme-li parciálně podle jedné proměnné, považujeme ostatní proměnné za konstanty a tedy pro první derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} &= \sin(\alpha x) [-a\omega \sin(\omega t) + b\omega \cos \omega t], \\ \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} &= \alpha \cos(\alpha x) [a \cos(\omega t) + b \sin \omega t]. \end{aligned}$$

Pro druhé derivace pokračujeme podobně a všimněme si, že

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} &= -\omega^2 y(x, t), \\ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} &= -\alpha^2 y(x, t).\end{aligned}$$

Dosazením do vlnové rovnice a vydělením $y(x, t)$ dostáváme tedy podmínku

$$\omega^2 = c^2 \alpha^2.$$

Nyní uvažujme okrajové podmínky, podle kterých musí být v každém čase t

$$\begin{aligned}0 &= y(0, t) = 0, \\ 0 &= y(l, t) = \sin(\alpha l)[a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)],\end{aligned}$$

kde první podmínka je triviálně splněna a druhá dává restrikcii na hodnoty α . Protože je člen v hranaté závorce obecně nenulový, musí být nulový sinus, tedy

$$\alpha l = \pi n,$$

kde n je celé číslo. V případě $n = 0$ máme však triviální (nulové) řešení a záporné hodnoty n odpovídají jen řešením s opačným znaménkem prefaktorů, tedy záměně $a \rightarrow -a$ a $b \rightarrow -b$, které nejsou nikterak omezené. Proto můžeme uvažovat jen přirozená n .

Máme tedy možná řešení vlnové rovnice

$$y(x, t) = \sin(\alpha x)[a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)],$$

kde

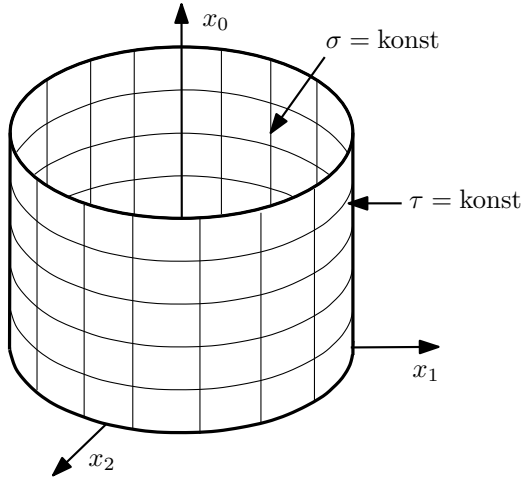
$$\alpha = \frac{\pi}{l}n, \quad \omega = \frac{\pi c}{l}n$$

a hodnoty a a b mohou být libovolné. Tyto hodnoty lze určit ze znalosti počáteční konfigurace struny.

Poznamenejme ještě, že číslo n odpovídá počtu „kopečků“ sinu, které se na strunu „vejdou“. Řešení pro různá n pak odpovídají různým módům kmitání struny. O tom si ještě povíme v dalším díle seriálu.

- c) Kruhá struna stojící v prostoru (pro daného pozorovatele) opisuje v časoprostoru plášť válce tak jako na obrázku. Na obrázku jsou také vyobrazeny čáry konstantního τ a σ , které lze snadno určit ze znalosti parametrizace. Vypočtěme hodnotu akce ze znalosti parametrizace přímým dosazením. Čáry konstantního τ a σ jsou na sebe kolmé a můžeme tedy dosazovat do výrazu

$$S[\mathbf{X}(\tau, \sigma)] = -\frac{T_0}{c} \int_0^t \int_0^{2\pi} \sqrt{-\left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}\right|^2 \left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}\right|^2} d\tau d\sigma.$$



Obr. 46: Světlocha uzavřené struny z příkladu c).

My ale máme po zderivování každé složky

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} &= (c, 0, 0, 0), \\ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} &= (0, -R \sin \sigma, R \cos \sigma, 0).\end{aligned}$$

Velikosti těchto čtyřvektorů jsou tedy (vzpomeňme na první seriál a úlohy k němu, kde jsme tyto velikosti počítali)

$$\begin{aligned}\left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \right|^2 &= -c^2, \\ \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right|^2 &= R^2 \sin^2 \sigma + R^2 \cos^2 \sigma = R^2.\end{aligned}$$

Dosazením do výrazu pro akci a dvěma integracemi konstanty dostáváme konečně

$$S[\mathbf{X}(\tau, \sigma)] = -\frac{T_0}{c} \int_0^t \int_0^{2\pi} cR \, d\tau \, d\sigma = -2\pi R T_0 t.$$

V tomto speciálním případě lze hodnotu akce také uhádnout. Z textu seriálu víme, že hodnota akce odpovídá povrchu světlochy vynásobenému prefaktorem $-T_0/c$. Povrch pláště válce (bez podstavy) o poloměru R a délce ct (viz zadání) je roven $2\pi Rct$ a hodnota akce bude tedy $S = -2\pi T_0 R t$, což je hodnota, která nám výše vyšla. Poznamenejme ovšem, že tomu tak nemusí být vždy, protože plocha je měřená metrikou ds a její naivní výpočet může dát obecně jiný výsledek.

Úloha IV.S . . . kvantová

- a) Podívejte se do textu, jak působí operátor polohy \hat{X} a hybnosti \hat{P} na složky stavového vektoru v x -reprezentaci (vlnovou funkcií) a spočítejte jejich komutátor, tj.

$$(\hat{X})_x \left((\hat{P})_x \psi(x) \right) - (\hat{P})_x \left((\hat{X})_x \psi(x) \right).$$

Tip Zjistěte si, co se stane při derivaci součinu dvou funkcí.

- b) Problém energetických hladin pro volnou kvantovou částici, tj. pro $V(x) = 0$, vypadá následovně:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = E \psi(x).$$

1. Zkuste jako řešení dosadit $\psi(x) = e^{\alpha x}$ a zjistěte, pro jaká α (obecně komplexní) je E kladná (nadále používejte pouze taková α).
2. Je toto řešení periodické? Pokud ano, tak s jakou prostorovou periodou (vlnovou délkou)?
3. Je získaná vlnová funkce vlastním vektorem operátoru hybnosti (v x -reprezentaci)? Pokud ano, najděte souvislost mezi vlnovou délkou a hybností (tj. odpovídajícím vlastním číslem operátoru hybnosti) daného stavu.
4. Zkuste formálně spočítat hustotu pravděpodobnosti výskytu částice v prostoru naší vlnové funkci podle vzorce uvedeného v textu. Pravděpodobnost, že se částice vyskytuje v celém prostoru by měla být pro fyzikální hustotu pravděpodobnosti 1, tj. $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$. Ukažte, že nelze naší vlnovou funkci nanormovat (tj. přenásobit nějakou konstantou) tak, aby její formální hustota pravděpodobnosti podle vzorce z textu byla opravdovou, fyzikální hustotou pravděpodobnosti.
5. Bonus Jaká si myslíte, že je limitně neurčitost polohy částice, jejíž vlnová funkce je hodně blízká té naší? (Tj. blíží se ve všech vlastnostech, ale má vždy normovanou hustotu pravděpodobnosti a je to tudíž fyzikální stav.) Lze odhadnout pomocí Heisenbergových relací neurčitosti jaká přitom bude nejméně neurčitost hybnosti?

Tip Dávejte pozor na komplexní čísla, například kvadrát komplexního čísla je něco jiného než kvadrát velikosti komplexního čísla.

- c) V druhém díle jsme si odvodili energetické hladiny elektronu ve vodíku pomocí redukované akce. Zvláštní shodou by řešení spektra hamiltoniánu v coulombickém potenciálu protonu vedlo na úplně samé energie, tj.

$$E_n = -Ry \frac{1}{n^2},$$

kde $Ry = 13,6 \text{ eV}$ je energetická konstanta známá jako Rydberg. Elektron, který spadne z libovolné hladiny na $n = 2$, vyzáří energii ve formě jediného fotonu úměrnou rozdílu energie daných hladin. Ze kterých hladin musí elektron na druhou hladinu spadnout, aby bylo vyzářené světlo viditelné? Jakou budou mít odpovídající spektrální čáry barvu?

Tip Vzpomeňte si na fotoelektrický jev a na vztah mezi frekvencí světla a jeho vlnovou délkou.

a) Z textu čtvrtého dílu seriálu víme, že $(\hat{X})_x \varphi(x) = x\varphi(x)$ a že

$$(\hat{P})_x \varphi(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x).$$

Zároveň pro derivaci součinu platí $(fg)' = f'g + fg'$. Pro výraz v zadání tedy dostáváme

$$x \left(-i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (x\varphi(x)) = i\hbar \varphi(x),$$

což je přesně vztah postulovaný v textu seriálu.

b) Podle zadání zkusíme do rovnice dosadit $e^{\alpha x}$. Musíme pouze vědět, že $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$. Dosazením a zderivováním tedy získáváme

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \alpha^2 = E.$$

Protože E je nejen reálná, ale i kladná veličina, musí být α čistě imaginární

$$\alpha = \pm i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

Platí, že $e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$. Vidíme tudíž, že vlnová délka tohoto řešení je (identifikujeme $\varphi = \sqrt{2mE}/\hbar$)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\varphi} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2mE}},$$

kde si vzpomeneme, že $\hbar = h/(2\pi)$. Jednoduchým výpočtem zjistíme, že naše řešení je opravdu vlastním vektorem operátoru hybnosti a že

$$(\hat{P})_x e^{\alpha x} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} e^{\alpha x} = -i\hbar \alpha e^{\alpha x},$$

a tudíž $p = -i\hbar\alpha$. Vlnová délka pak je

$$\lambda = \frac{h}{|p|}.$$

Přesně podle De Broglieho vztahu ze seriálu. Kvantová mechanika tedy přesně předpovídá charakter „hmotné vlny“ částic!

Přímým dosazením našeho řešení do vzorce pro hustotu pravděpodobnosti z textu seriálu dostáváme

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2 = \psi^*(x)\psi(x) = e^{\alpha^* x} e^{\alpha x},$$

kde * značí komplexní sdružení. Víme, že α je čistě imaginární a tedy $\alpha^* = -\alpha$, takže

$$\rho(x) = e^{-\alpha x} e^{\alpha x} = 1.$$

Není těžké ukázat, že tuto formální hustotu pravděpodobnosti nelze nanormovat, protože integrál z jakéhokoliv konstantního čísla přes celou reálnou přímku

je nekonečný a nemůže být tudíž roven jedné. Tato vlnová funkce nebo vektor tedy neodpovídá nějakému opravdovému stavu částice, ale je spíš matematickou abstrakcí.

Bonus Tato vlnová funkce má přesnou hybnost p , a tudíž můžeme intuitivně pomocí Heisenbergových relací říct, že neurčitost její polohy tedy musí být nekonečná. To vskutku platí – hustota pravděpodobnosti je všude stejná, tudíž u blízkého stavu opravdové částice by byla všude skoro stejná, nebo přinejmenším hodně rozprostřená, a tudíž bychom fakticky nedokázali vůbec říct, kde by se mohla nacházet.

- c) Přímo aplikací vzorce ze zadání a použitím faktu, že pro foton je¹⁰⁵ $E = hf = hc/\lambda$, dostáváme

$$\lambda_m = \frac{hc}{Ry} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right)^{-1},$$

kde m je hladina, na kterou z $n = 2$ elektron přeskakuje. Dosazením několika prvních přeskoků dostáváme:

$$\lambda_3 = 656 \text{ nm},$$

$$\lambda_4 = 486 \text{ nm},$$

$$\lambda_5 = 434 \text{ nm},$$

$$\lambda_6 = 410 \text{ nm},$$

$$\lambda_7 = 397 \text{ nm}.$$

Všechny další přeskoky už mají kratší vlnové délky. Porovnáním s tabulkami zjistíme, že barvy prvních čtyřech čar jsou červená, tyrkysová, modrá a fialová. Pátý přeskok už je pak ultrafialový a oku neviditelný stejně jako všechny další.

Úloha V.S ... strunná

- Uvažujme otevřené struny a omezme se jen na tři prostorové rozměry. Namalujte, jak vypadá
 - struna volně se pohybující v časoprostoru,
 - struna připevněná oběma konci k D2-bráně,
 - struna natažená mezi D2-bránou a D1-bránou.
 Jaké jsou možnosti, kde mohou struny končit v případě konfigurace tří rovnoběžných D2-brán?
- Vyběte si jednu z funkcí \mathcal{P}_μ^τ nebo \mathcal{P}_μ^σ definovanou v první části seriálu a najděte její explicitní tvar (tj. přímo závislost na \dot{X}^μ a X'^μ). Ukažte, že podmínky $\mathbf{X}' \cdot \dot{\mathbf{X}} = 0$ a $|\dot{\mathbf{X}}|^2 = -|\mathbf{X}'|^2$ opravdu vedou na zjednodušení uvedené v textu.
- Najděte spektrum energií harmonického oscilátoru.
 - Energie harmonického oscilátoru je dána Hamiltoniánem

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2.$$

¹⁰⁵Vztah mezi frekvencí a vlnovou délkou světla je základní vztah vlnové optiky.

Druhý člen je očividně potenciální energií, zatímco první dává po dosažení $\hat{p} = m\hat{v}$ kinetickou energii. Definujme lineární kombinaci $\hat{\alpha} = a\hat{x} + i\hat{p}$. Určete reálné konstanty a a b , tak aby měl Hamiltonián tvar

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \right),$$

kde $\hat{\alpha}^\dagger$ je komplexní sdružení $\hat{\alpha}$.

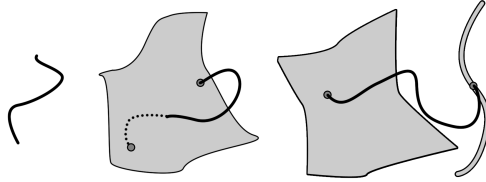
b) Ukažte ze znalosti kanonických komutačních relací pro \hat{x} a \hat{p} , že platí

$$[\hat{\alpha}, \hat{\alpha}] = 0, \quad [\hat{\alpha}^\dagger, \hat{\alpha}^\dagger] = 0, \quad [\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger] = 1.$$

c) Ve spektru oscilátoru bude jistě stav s minimální energií odpovídající nejmenšímu možnému kmitání. Označme ho $|0\rangle$. Tento stav musí splňovat $\hat{\alpha}|0\rangle = 0$. Ukažte, že je jeho energie rovna $\hbar\omega/2$, tj. $\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega/2|0\rangle$. Dále ověřte, že pokud by bylo $\hat{\alpha}|0\rangle \neq 0$, pak máme spor s tím, že má $|0\rangle$ minimální energii, tj. $\hat{H}\hat{\alpha}|0\rangle = E\hat{\alpha}|0\rangle$, kde nyní je $E < \hbar\omega/2$. Všechny vlastní stavy Hamiltoniánu můžeme potom psát jako $(\hat{\alpha}^\dagger)^n |0\rangle$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$. Najděte energie těchto stavů, tj. čísla E_n taková, že $\hat{H}(\hat{\alpha}^\dagger)^n |0\rangle = E_n(\hat{\alpha}^\dagger)^n |0\rangle$.

Tip Použijte komutační relace pro $\hat{\alpha}^\dagger$ a $\hat{\alpha}$.

- Na obrázku 47 vidíte postupně otevřenou strunu, strunu s oběma konci na D2-bráně a na D2-bráně a D1-bráně. V textu jsme se dopustili chyby, když jsme psali, že Dp-brána svazuje p stupňů volnosti. Je tomu právě naopak, p stupňů volnosti v rámci Dp-brány zůstává volných a zbytek směrů je pro konec struny svázaný. Pokud vás to zmátlo, uznáváme samozřejmě plný počet bodů i za obrácené řešení. V případě konfigurace tří rovnoběžných D2-brán mohou konce struny končit kdykoliv na kterékoliv bráně, takže možností je 6.



Obr. 47: Nákresy strun.

- Derivaci Lagrangiánu relativistické struny získáváme

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}') X'_\mu - |\mathbf{X}'|^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}')^2 - |\mathbf{X}'|^2 |\dot{\mathbf{X}}|^2}}.$$

K tomu jsme použili faktu, že $\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}' = \eta_{\alpha\beta} \dot{X}^\alpha X'^\beta$ a že $\eta_{\alpha\beta} \dot{X}^\alpha = \dot{X}_\beta$, to vše samozřejmě v Einsteinově sumační konvenci. Zcela obdobně pro druhou hybnost získáváme

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}') \dot{X}_\mu - |\dot{\mathbf{X}}|^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}')^2 - |\mathbf{X}'|^2 |\dot{\mathbf{X}}|^2}}.$$

Dosazením $\mathbf{X}' \cdot \dot{\mathbf{X}} = 0$ a substitucí $-|\mathbf{X}'|^2 = |\dot{\mathbf{X}}|^2$ do prvního vztahu (opačně do druhého) pak získáváme triviálně vztahy z textu.

3. a) Dosadíme prostě $\hat{\alpha} = a\hat{x} + ib\hat{p}$ do výrazu

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \right),$$

a pak nastavíme konstanty tak, aby dával výraz původní Hamiltonián. Pro sdružený operátor platí $\hat{\alpha}^\dagger = a\hat{x} - ib\hat{p}$, protože \hat{x}, \hat{p} jsou samosdružené operátory a jinak sdružení působí jako komplexní sdružení. Po dosazení a násobení dostáváme¹⁰⁶

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(a^2 \hat{x}^2 + b^2 \hat{p}^2 - ab\hbar + \frac{1}{2} \right).$$

Porovnáním s původním Hamiltoniánem z toho už snadno plyne

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}.$$

- b) První dva komutátory nemusíme počítat, stačí si uvědomit, že je to rozdíl dvou úplně stejných výrazů. Třetí komutátor je složitější, podobně jako v předchozím příkladě spočítáme

$$\hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha} = a^2 \hat{x}^2 + b^2 \hat{p}^2 - ab\hbar, \quad \hat{\alpha} \hat{\alpha}^\dagger = a^2 \hat{x}^2 + b^2 \hat{p}^2 + ab\hbar.$$

Rozdíl těchto dvou je právě kýžený komutátor. S použitím hodnot a a b z předchozího bodu dostáváme již

$$[\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger] = 1.$$

- c) Zapůsobením Hamiltoniánu z předchozích bodů zničí α z prvního členu náš $|0\rangle$ vektor a přispívá pouze člen druhý, tj. $\hbar\omega/2$. To je tedy energie stavu značeného $|0\rangle$. Pro další část tohoto bodu si ukážeme, že operátor α vlastní stav Hamiltoniánu $|\Psi\rangle$ převede na další s nižší energií. Jediná nekonstantní část Hamiltoniánu je $\hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha}$, počítáme tedy

$$\hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha} |\Psi\rangle = \hat{\alpha} \hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha} |\Psi\rangle - [\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger] \hat{\alpha} |\Psi\rangle = \hat{\alpha} (\hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha} - 1) |\Psi\rangle.$$

Když toto porovnáme s Hamiltoniánem, zjistíme, že zapůsobení operátorem $\hat{\alpha}$ sníží energii vektoru o $\hbar\omega$. Pokud by tedy operátor $\hat{\alpha}$ vektor $|0\rangle$ neanihiloval, znamenalo by to, že jej zobrazil na vektor s nižší energií, což je spor. Obdobným odvozením můžeme ukázat, že operátor $\hat{\alpha}^\dagger$ naopak o $\hbar\omega$ zvyšuje. Energetické hladiny pak jednoduše začínají na $\hbar\omega/2$ a pak jdou nahoru o celé násobky $\hbar\omega$, tedy

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

¹⁰⁶Nezapomeňte, že \hat{x}, \hat{p} *nekomutují*, musíme proto jejich násobení prohazovat s pomocí komutátoru!

Úloha VI.S . . . spektrální

1. Jak bude vypadat spektrum otevřené struny na hmotnostní hladině $M^2 = 2/\alpha'$? Kolik máme možných stavů struny na této hladině?
2. Pokud bychom uvažovali interakci tachyonu s jinými strunami, zjistili bychom, že ho můžeme popsat přibližně jako částici pohybující se v nějakém potenciálu. Uvažujme model struny, která je upevněna na nestabilní D-bráně. Odpovídající potenciál tachyonu je určen vztahem

$$V(\varphi) = \frac{1}{3\alpha'} \frac{1}{2\varphi_0} (\varphi - \varphi_0)^2 \left(\varphi + \frac{1}{2}\varphi_0 \right),$$

kde α' a φ_0 jsou kladné konstanty. Roznásobte závorky a určete hmotnost tachyonu jako dvojnásobek koeficientu stojícího před φ^2 . Najděte minimum potenciálu $\tilde{\varphi}$ a ukažte, že provedeme-li v potenciálu záměnu $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi} + \varphi$ (tj. rozvíjíme teorii kolem minima tachyonového potenciálu), dostaneme po roznásobení a odečtení koeficientu před φ^2 kladnou hmotnost tachyonu. Záporná hmotnost tedy ukazuje na nestabilitu D-brány a ve stabilní konfiguraci, kdy D-brána vymizí (minimum potenciálu), již hmotnost není záporná.

3. Teorie superstrun umožňuje popis fermionů. Pro jejich popis je však potřeba antikomutujících veličin. Pro ty se zavede namísto komutátoru antikomutátor vztahem

$$\{A, B\} = AB - BA.$$

Najděte takové dvě 2×2 matice a a b , které splňují $\{a, a\} = 1$, $\{b, b\} = 1$ a $\{a, b\} = 0$.

1. Připomeňme vzorec pro hmotnost struny z minulého dílu¹⁰⁷

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{I=2}^d j a_j^{\dagger I} a_j^I - 1 \right).$$

Hmotnost $M^2 = 2/\alpha'$ dostaneme působeními na „vakuum“ $|p^1, p^2, \dots, p^d\rangle$:

$$a_3^{\dagger I} |p^1, p^2, \dots, p^d\rangle, \quad a_2^{\dagger I} a_1^{\dagger J} |p^1, p^2, \dots, p^d\rangle, \quad a_1^{\dagger I} a_1^{\dagger J} a_1^{\dagger K} |p^1, p^2, \dots, p^d\rangle,$$

pro obecně různé indexy I, J, K . Stavů s takovou hmotností je obecně nekonečně mnoho, lineárně nezávislých¹⁰⁸ je však

$$(d-1) + (d-1)^2 + (d-1)^3,$$

kde každý člen odpovídá předchozím možnostem v uvedeném pořadí.

¹⁰⁷V seriálu nám tam vypadla suma přes všechny dimenze I , za což se omlouváme, ale z textu to snad bylo pochopitelné.

¹⁰⁸Tj. takových, které se nedají navzájem lineárně poskládat.

2. Prostým roznásobením $V(\varphi)$ ze zadání získáváme

$$V(\varphi) = \frac{1}{6\alpha'\varphi_0} \left(\varphi^3 - \frac{3}{2}\varphi_0\varphi^2 + \frac{1}{2}\varphi_0^3 \right).$$

Efektivní hmotnost pole φ odečteme tedy jako imaginární, $m^2 = -1/(2\alpha')$. S použitím diferenciálního počtu (uznáváme i výpočet pomocí symbolického programu nebo výpočet uhodnutím) určíme lokální minimum potenciálu jako $\varphi_{min} = \varphi_0$. Když dosadíme do potenciálu $\varphi' = \varphi - \varphi_0$ a opět roznásobíme závorky, dostáváme

$$V(\varphi') = \frac{1}{6\alpha'\varphi_0} \left(\varphi'^3 + \frac{3}{2}\varphi_0\varphi'^2 \right),$$

efektivní hmotnost φ je tedy ve stabilní konfiguraci $m^2 = 1/(2\alpha')$.

3. Nejdříve si relace ze zadání trochu přepíšeme

$$\{a, a\} = aa + aa = 2a^2 = I_2, \quad (2b^2 = I_2),$$

kde I_2 značí jednotkovou matici 2×2 . Pro složky a_{ij} matic ze zmíněného získáváme následující podmínky (pro b_{ij} jsou zcela analogické):

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} &= \frac{1}{2}, & a_{22}^2 + a_{12}a_{21} &= \frac{1}{2}, \\ (a_{11} + a_{22})a_{12} &= 0, & (a_{11} + a_{22})a_{21} &= 0. \end{aligned}$$

Máme dohromady osm obecně komplexních složek dvou 2×2 matic, takže řešení bude určitě nejednoznačné. Stačí tedy vybrat nějakou jednoduchou matici a splňující dané rovnice a zkonstruovat b tak, aby splňovala relaci $ab = -ba$. Nesmíme však vybrat násobek jednotkové matice, která komutuje se vším, takže k antikomuaci bychom ji opravdu nedonutili. Zvolme tedy například $a_{11} = a_{22} = 0$ a $a_{12} = a_{21} = 1/\sqrt{2}$. Tuto *konkrétní* matici a vložíme do komutační relace s maticí b a získáváme pro její složky podmínky

$$b_{12} = -b_{21}, \quad b_{11} = -b_{22}.$$

Zkombinováním s předchozími podmínkami pak dostáváme

$$b_{11}^2 - b_{12}^2 = \frac{1}{2}, \quad b_{11}b_{12} = 0.$$

Pokud bychom požadovali složky b_{ij} pouze reálné, byly by už plně určeny danými rovnicemi, protože $b_{11}^2 \geq 1/2$, a tudíž z druhé rovnice $b_{12} = 0$. V reálném oboru je pak už jediným řešením matice

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(při zvoleném a). Pokud bychom však složky matice povolili komplexní, řešení by bylo například i

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Tím si však nemusíte lámat hlavu – plný počet bodů získáte za libovolné z obdobných řešení.

Zmíníme jen pro zajímavost, že pokud lineárně zkombinujete tři zmíněné matice

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

se třemi koeficienty odpovídajícími složkám nějakého vektoru \mathbf{A} kolmého na vektor \mathbf{B} , jehož tři složky naopak použijeme na tvorbu druhé lineární kombinace těchto matic, dostanete dvě matice, které jsou opět řešením našeho zadání. (Můžete schválně vyzkoušet a promyslet proč.)



Akce FYKOSu

Podzimní soustředění v Ludvíkově

Podzimní soustředění FYKOSu proběhlo ve Ludvíkově ve dnech 5.–13. 10. 2013.

Organizátoři

Michal Červeňák, Veronika Dočkalová, Aleš Flandera, Dominika Kalasová, Karel Kolář, Lukáš Ledvina, Jiří Nárožný, Kristína Nešporová, Aleš Podolník, Ján Pullman, Tereza Steinhartová

Účastníci

Filip Ayazi, Pavel Blažek, Jakub Dolejší, Petr Doležal, Jakub Dvořák, Tomáš Fiala, Martin Gažo, Peter Hojnoš, Lýdia Janitorová, Petr Kepčija, Samuel Kočiščík, Tomáš Kremel, Anna Kuřová, Jakub Kverka, Zuzana Mičková, Marek Otýpka, Mojmír Poprocký, Viktor Skoupý, Miloslav Staněk, Klára Stefanová, Kateřina Stodolová, Petr Šimůnek, Karolína Šromeková, Přemysl Šťastný, Petra Štefaníková, Radka Štefaníková, Luboš Vozdecký, František Zajíc, Mikuláš Zindulka



Účastníci podzimního soustředění v Ludvíkově

Legenda

Podzimní soustředění bylo připraveno na motivy filmu *In time* (Vyměřený čas)¹⁰⁹, ve kterém se úspěšní řešitelé dostali do světa, kde se za všechno platí časem vlastního života. Každý účastník měl na začátku přidělen jeden den času, který mohl účastí na přednáškách a hrách rozmnožit, aby „přežil“ do dalšího dne. Během týdne bylo potřeba sehnat dost času na to, aby se dal koupit vstup do bohatších oblastí světa, kde byla možnost sehnat kontakt na odbojáře, kteří bojovali za navrácení přirozeného života. Nakonec se podařilo sestavit umělý virus, který pomohl zvrátit účinky původní genetické manipulace a všechno se vrátilo do normálu.

Jarní soustředění ve Skleném u Fryšavy

Jarní soustředění FYKOSu 2014 proběhlo ve Skleném u Fryšavy ve dnech 26. 4. až 4. 5. 2014.

Organizátoři

Veronika Dočkalová, Lubomír Grund, Erik Hendrych, Dominika Kalasová, Karel Kolář, Lukáš Ledvina, Jiří Nárožný, Kristína Nešporová, Michal Nožička, Aleš Podolník, Jakub Šafin, Lukáš Timko (a v duchu byl s námi i Michal Červeňák)

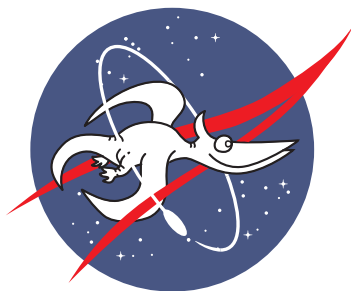
Účastníci

Denisa Lampášová, Filip Ayazi, Jáchym Bártík, Jakub Kvorka, Jakub Maruška, Jakub Sláma, Jan Preiss, Jaroslav Janoš, Jozef Burkuš, Kateřina Smítalová, Kateřina Stodolová, Klára Stefanová, Kryštof Šulc, Luboš Vozdecký, Luboš Krnáč, Lucie Brichová, Lýdia Janitorová, Marek Martaus, Marek Otýpka, Martin Štyks, Matěj Mezera, Michaela Horňáková, Miloslav Staněk, Mojmír Poprocký, Pavel Blažek, Pavel Souček, Petr Hrubý, Petra Štefaníková, Přemysl Štastný, Tomáš Fiala, Tomáš Kremel, Veronika Rajňáková, Zdeněk Turek

Počátek legendy

Účastníci byli na soustředění pozváni jako pečlivě vybraní účastníci vesmírného programu – prvního letu k hvězdě jiné než Slunce, k Proximě Centauri. Po příjezdu k letové základně byli prověřeni a vycvičeni k cestě. Vzhledem k současným technologiím bylo rozhodnuto, že větší část cesty k Proximě bude probíhat ve stázi (bylo by komplikované převážet dostatek jídla a ve stázi, jak dobře známo, člověk jíst nepotřebuje).

¹⁰⁹<http://www.imdb.com/title/tt1637688/>



Maskot vesmírného programu

Následující část byla pravděpodobně skupinovou halucinací vyvolanou jedním účastníkem, který si ji vysnil a přes stázový systém byla přenesena na ostatní.

Sen v průběhu kosmického letu

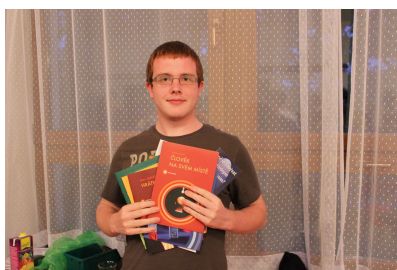
Účastníkům se zdálo, že se probudili po havárii raketoplánu. Velice brzy zjistili, že to mělo být vyvolané havárií loď, která nastala těsně u Proximy. Loď se prý měla obrátit, ale vzhledem k tomu, že měla poškozené motory, tak se k Zemi měli vrátit, jak sami tvrdili, v roce 2184. Loď pak havarovala, protože nebyly funkční všechny přistávací systémy a poslední energii investovala do oživení osob ve stázi.

Účastníci (prý) zjistili, že se probrali do diktatury ovládané Velkým Bratrem Pavlem Augustinským. Všude vlály prapory Fykosie a Pavel Augustinský je sledoval na každém kroku (dokonce snad i na záchodech a ve sprchách). Rozhodli se přežít, ale proti režimu bojovat jako odbojáři. S tím jim pomáhali někteří členové vnitřní strany (prý organizátoři FYKOSu, kteří by v té době již museli být určitě mrtví), kteří je při přiletu zachránili od vaporizování a současně jim zařídili pozici ve vnější straně. Nemuseli prý tedy jako proléti jíst jednou denně ze země.

Moc v zemi byla prý rozdělena mezi Ministerstvo míru (války), Ministerstvo pravdy (propagandy), Ministerstvo hojnosti (které neustále snižovalo příděly potravin, i když v rozhlase bylo neustále ohlašováno jejich zvýšení) a Ministerstvo lásky (které provádělo opravdu, ale opravdu nepěkné výsledky a podvazovalo členy Anti-sexuální ligy mládeže). Jejich názvy se zkracovaly jako MírMini, PraMini, HojMini a LaMini. Z rozhlasu (s hlasem nezaujaté Elišky), který jakoby měl ampliony všude, se denně ozývaly, kromě hlášení o zvýšení přídělů a bojích na Malabarské frontě, popravách na náměstí a hrdinských činech Fykosanů, i tzv. „pravdy“. Jednalo se o udání, která zpracovávalo PraMini, ale mohly pocházet od kohokoliv. Lidé v té době dokonce snad i sbírali „body“ za udání a PraMini prý mělo co dělat, aby udrželo svou nadvládu pravd. Vzhledem k tomu, že režim se zdál být v dohledné době nezničitelný a účastníkům prý hrozila vaporizace na každém kroku a již byli jednou i zadrženi a vyslýchání, někteří dokonce na LaMini (opět se zde objevuje zcela nelogická věc – prý je krutě vyslýchali samotní odbojáři z vnitřní strany), se rozhodli opravit loď a utéct.

Zakončení legendy

Po týdnů se účastníci v pořádku probudili ze stáže, přestože jejich mise byla neúspěšná. Hned ze začátku, ještě v centru Sluneční soustavy, došlo ke kolizi lodi s prudkým závanem slunečního větru. Motory lodě byly poškozeny. Sice ne navratně, ale dostatečně na pochybnost o možnosti 100% úspěchu mise. Pozemská kontrola tedy vyslala signál na loď, aby se navrátila. Tento manévř trval právě týden. Všechny halucinace lze rozumně vysvětlit. Například hlas, který slyšovali z rozhlasu, byl ve skutečnosti syntetický hlas lodi. Změna jednoho účastníka byla vyvolána zákeřnou infekcí ze stáže, která způsobuje nezvratitelné plastické operace. A rozhodně nikomu nevěřte to, že má oblečení s obrazem Pavla Augustinského či stranické spodní prádlo s heslem strany „Společně za ptáka Fykosáka!“, protože si to nejspíš sami vyrobili, aby svou iluzi podpořili.



Z jarního soustředění ve Skleném u Fryšavy

FYKOSí Fyziklání

Osmý ročník FYKOSího Fyziklání proběhl v pátek 14. 2. 2014 v budovách Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. 74 týmů mezi sebou soutěžilo ve třech kategoriích, do kterých byly rozřazeny podle ročníku studia jednotlivých členů. V kategorii A, kam spadaly týmy s nejstaršími studenty, vyhrál tým Pozitrony z Gymnázia Ludovíta Štúra v Trenčíně. Na druhém a třetím místě se se shodným počtem bodů i všemi ostatními pomocnými hodnoceními umístily týmy Truhla z Gymnázia a ZŠ G. Jarkovského v Praze a Budulínci, tým složený ze studentů Gymnázia J. Škody v Přerově a Gymnázia Kojetín. Losem ovšem bylo rozhodnuto, že druhé místo náleží týmu Truhla. V kategorii B se na prvním místě umístil tým Fyzici GVBV z Gymnázia V. Nedožerského v Prievidzi a v kategorii C tým Gymtri z gymnázia v Třinci.

Pravidla

Soutěže se účastní družstva s nejvýše pěti členy. Na začátku soutěže dostane každé družstvo sedm příkladů. Za úspěšně vyřešený příklad si družstvo připiše počet bodů, který závisí na počtu pokusů potřebných k jeho vyřešení. Dále si od organizátorů může vyzvednout nový příklad. Samotná soutěž probíhá 3 hodiny a jejím

cílem je samozřejmě získat co největší počet bodů. Přesná pravidla jsou k dispozici na webových stránkách semináře.

Výsledky

Středoškoláci A

- | | | |
|----|------------------------|--------|
| 1. | G Ludovíta Štúra | 171 b. |
| 2. | G a ZŠ G. Jarkovského | 164 b. |
| 3. | G J. Škody a G Kojetín | 164 b. |

Středoškoláci B

- | | | |
|----|-------------------------------|--------|
| 1. | G V. Nedožerského | 166 b. |
| 2. | G Mostecká a SPŠ a SOŠGS Most | 156 b. |
| 3. | G Česká Lípa | 147 b. |

Středoškoláci C

- | | | |
|----|-----------------------------|--------|
| 1. | G Třinec | 129 b. |
| 2. | G Havlíčkův Brod | 125 b. |
| 3. | G Jana Keplera a G Lovosice | 119 b. |

Ve výsledkové listině jsou pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je na našich webových stránkách.

Fyziklání Online

V pořadí třetí ročník internetové soutěže Fyziklání online se konal 5. 12. 2013. Do soutěže se aktivně zapojilo 106 týmů českých středoškoláků, 26 zahraničních středoškolských týmů a 32 týmů v kategorii open, celkem tedy 164 týmů, čímž opět padl rekord v účasti.

Nejlepším se stal tým *Veterani* z kategorie open, který získal 124 bodů. Tým *The Mathefficient Gaussketeers* se umístil se 111 body na místě druhém a třetí celkově skončil *Smoluchowski's team* se ziskem 108 bodů, oba dva též z kategorie open. Vítězem kategorie A českých středoškoláků se stal tým *m.raszyk* s 88 body, které mu vynesly páté místo celkově a první místo mezi týmy středoškolskými. Zisk 53 bodů stačil týmu *Qaterknan* na první místo v kategorii B a 17. místo celkově. Mezi týmy kategorie C na první příčku dosáhl tým *60letGymtri*, který získal 30 bodů a celkově skončil 39. Nejlepší zahraniční středoškolský tým *Yognau(gh)ts* se umístil celkově 14. s 63 body.

Pravidla

Na začátku soutěže každý, maximálně pětičlenný, tým obdržel pět úloh, jejichž výsledkem bylo číslo. Po zadání správného výsledku do internetového systému tým získal zadání nové úlohy. Soutěž trvala 3 hodiny, přičemž v průběhu soutěže proběhla také půlhodinová hurry up část, v níž byly úlohy rozděleny do tří fyzikálních témat a vyřešení jedné úlohy od všech témat bylo hodnoceno bonusovými body. Protože se tato soutěž koná přes internet, nebyly povolené pomůcky nijak omezeny.

Výsledky**Stredoškolači A**

1.	m.raszyk	88 b.
2.	Gymji PRO Team 1337	84 b.
3.	Spoza priehrady pri Istre	64 b.
4.	Gustiózny Jedácy Horalyek	61 b.
5.	Gymik	59 b.

Stredoškolači B

1.	Qaterknan	53 b.
2.	GČL	49 b.
3.	Hatalom	34 b.
4.	GJK 1	33 b.
5.	Sprinteri 27	32 b.

Stredoškolači C

1.	60letGymtri	30 b.
2.	Gratulujeme, jste 999999 návštevník táto stránky !!!	26 b.
3.	Gymlovo Masters	23 b.
4.	Hodor	14 b.
5.	Nový Jiřík	14 b.

Zahraniční stredoškolači

1.	Yognau(gh)ts	63 b.
2.	Bošnjaci	50 b.
3.	breguenights	43 b.
4.	Magical 5	37 b.
5.	dindar	27 b.

Open

1.	Veterani	124 b.
2.	The Mathefficient Gaussketeers	111 b.
3.	Smoluchowski's team	108 b.
4.	FtáKopySk	100 b.
5.	p5	86 b.

Ve výsledkové listině jsou pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je na našich webových stránkách.

Den s experimentální fyzikou

Den s experimentální fyzikou je tradiční akce FYKOSu, během které se mohou účastníci porozhlédnout po fyzikálních pracovištích na MFF UK. Na vlastní oči mohou vidět, jak se dělá fyzika dnešních dní. Letošní již desátý DSEF se konal dne 13. 2. 2014. Dopolední program na MFF UK v Tróji začal přednáškami RNDr. Karla Závěty, CSc. o Mössbauově spektroskopii a RNDr. Vojtěcha Chlana, Ph.D. o nukleární magnetické rezonanci. Na tyto přednášky navazovaly později

exkurze na stejnojmenná pracoviště a dále například na katedry fyziky povrchů, nízkých teplot a didaktiky fyziky. Účastníci mohli vidět řádkovací tunelový mikroskop, pokusy s tekutým dusíkem, zařízení pro magnetickou rezonanci a další. Odpoledne navštívili školní reaktor Vrabc a Hvězdárnu Ďáblice.

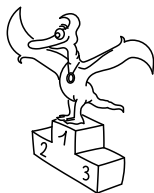
Cyklus přednášek pro středoškoláky

Přednášky pořádané spolu s pražským výborem Fyzikální olympiády se konaly zimním semestru celkem pětkrát. Jsou určeny především pro studenty SŠ jako doplněk přípravy na Fyzikální olympiádu.

Jejich témata spolu s autory byly: Modely atomu (Radomír Gajdošoci), Kmitání (Jakub Kocák), Tepelné stroje (Lukáš Ledvina), Magnetostatika (Ján Pulmann) a Speciální teorie relativity (Jakub Vošmera).

Přednášky byly též zaznamenávány a online streamovány prostřednictvím akademické sítě Cesnet. Odkazy na záznamy jsou uvedeny na adrese:¹¹⁰

¹¹⁰http://fykos.cz/akce/prednasky_archiv



Pořadí řešitelů

Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 236
1. Jan Preiss	G, Lovosice	179
2. Matěj Mezera	G Havlíčkův Brod	178
3. Martin Štyks	G Jana Keplera, Praha	177
4. Jáchym Bártík	G Havlíčkův Brod	170
5. Jozef Lipták	G Tajovského, B. Bystrica	145
6. Přemysl Šťastný	G, Žamberk	134
7. Lucie Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	107
8. Daniela Pittnerová	G L. Svobodu, Humenné	100
9. Vít Horáček	G L. Jaroše, Holešov	77
10. Jaroslav Janoš	G, Lesní čtvrť, Zlín	75
11. Kateřina Stodolová	G, Dašická, Pardubice	69
12.–13. Adam Poloček	G, Havlíčkova, Český Těšín	61
12.–13. Klára Ševčíková	G Uherské Hradiště	61
14. Jozef Burkuš	G, Rožňava	60
15. Petr Jakubčík	PORG, Praha	58
16.–17. Petra Štefaníková	G O. Havlové, Ostrava	56
16.–17. František Zajíc	G, Nymburk	56
18. Aneta K. Lesná	G Christiana Dopplera, Praha	43
19. Veronika Rajňáková	G Nové Zámky	40
20. Erik Wetter	Bilingválne G, Sučany	35
21. Simona Buryšková	G Matyáše Lercha, Brno	33
22. Hana Lounová	G, Olomouc – Hejčín	32
23. Petr Šimůnek	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	30
24. Simona Gabrielová	G, Jírovcova, České Budějovice	29
25. Jiří Ledvinka	G Opatov, Praha	25
26. Vít Pískovský	G O. Havlové, Ostrava	23
27. Martin Barnovský	G Stará Lubovňa	21
28. Štěpán Stenclák	G, Třinec	19
29.–30. Dominik Krasula	G, Krnov	15
29.–30. Peter Kubaščík	G Kysucké Nové Mesto	15
31. Honza Touš	G, Nymburk	13
32.–34. Veronika Gintnerová	G Sv. Františka, Žilina	12
32.–34. Filip Mečtír	Cyrilometodějské G, Prostějov	12
32.–34. Dominika Tanglová	G, Nymburk	12
35.–36. Lukáš Doležel	G, Šumperk	11
35.–36. Jaromír Mielec	G Volgogradská, Ostrava	11
37.–38. Michal Červenec	G, Považská Bystrica	10
37.–38. Tomáš Mayer	DELTA - SŠ inf. a ekon.	10
39. Matěj Coufal	G Havlíčkův Brod	9
40.–43. Alžběta Andrášková	G, Olomouc – Hejčín	8

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 236
40.–43. <i>Branislav Belko</i>	G Milana Rúfusa	8
40.–43. <i>Cyril Šaroch</i>	G, Hranice	8
40.–43. <i>Jonáš Uříčář</i>	Stojanovo G Velehrad	8
44.–45. <i>Pavol Petruš</i>	G Poštová, Košice	7
44.–45. <i>Minh Tran The</i>	První české G, Karlovy Vary	7
46.–50. <i>Anežka Doležalová</i>	G, Dašická, Pardubice	6
46.–50. <i>Daniel Hrdinka</i>	G, Trutnov	6
46.–50. <i>Lukáš Kramný</i>	Wichterlovo G, Ostrava	6
46.–50. <i>Martin Kudělka</i>	G, Neumannova, Ždár n. S.	6
46.–50. <i>Pavla Škuligová</i>	G, Dašická, Pardubice	6
51.–53. <i>Jiří Nábělek</i>	ZŠ a MŠ Chuchelná	5
51.–53. <i>Simona Saparová</i>	G, Šrobárova, Košice	5
51.–53. <i>Jakub Zemek</i>	G Uherské Hradiště	5
54.–57. <i>David Němec</i>	G, Tanvald	4
54.–57. <i>Ivan Novák</i>	SŠ de La Salle	4
54.–57. <i>Ondřej Pařez</i>	G, nám. E. Beneše, Kladno	4
54.–57. <i>Kateřina Volková</i>	Masarykovo G, Vsetín	4
58. <i>Marie Kozáková</i>	G Cheb	3
59. <i>Patrik Prokop</i>	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	2
60. <i>Pavel Turinský</i>	G, Brandýs n. L.	1
61.–66. <i>Lucka Hosová</i>	G, Špitálská, Praha	0
61.–66. <i>Tomáš Hromada</i>	ZŠ V. Vančury, Praha	0
61.–66. <i>Viktor Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	0
61.–66. <i>Dušan Morbitzer</i>	G a SOŠZZE Vyškov	0
61.–66. <i>Bartoloměj Pecháček</i>	Církevní G, Plzeň	0
61.–66. <i>Michaela Svatošová</i>	G M. Koperníka, Bílovec	0

Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 236
1. <i>Petr Hrubý</i>	G, Polička	172
2. <i>Domínika Ďurovčíková</i>	G Hlohovec	159
3. <i>Tomáš Hrbek</i>	G J. Ressela, Chrudim	155
4. <i>Jakub Jambřich</i>	G J. A. Raymana, Prešov	146
5. <i>Jiří Jarošík</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	112
6. <i>Klára Stefanová</i>	G B. Němcové, HK	111
7. <i>Daniela Šimánková</i>	G, Pelhřimov	99
8. <i>Samuel Obuch</i>	G Jána Hollého, Trnava	95
9. <i>Vojtěch Jelínek</i>	G, Neumannova, Ždár n. S.	85
10.–11. <i>Kuba Pilarš</i>	G J. Ressela, Chrudim	79
10.–11. <i>Pavel Souček</i>	G, Nymburk	79
12. <i>Jaroslav Stránský</i>	G, Tišnov	67
13. <i>Minh Tran Anh</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	63
14. <i>Marek Otýpka</i>	G, Židlochovice	56
15. <i>Pavel Kús</i>	G J. Š. Baara, Domažlice	53
16. <i>Jakub Marták</i>	G Golianova, Nitra	47
17. <i>Tomáš Drozdík</i>	G Andreja Vrábľa, Levice	46
18.–19. <i>Martin Gažo</i>	G, Pankúchova, SR	41

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 236
18.–19. <i>Anna Kufová</i>	G M. Koperníka, Bílovec	41
20. <i>Jozef Mišt</i>	G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	39
21. <i>Lukáš Honsa</i>	G, Jírovcova, České Budějovice	35
22. <i>Vojtěch Lukeš</i>	G Luďka Píka, Plzeň	31
23. <i>Marian Poljak</i>	G J. Škody, Přerov	28
24.–26. <i>Adam Greš</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	24
24.–26. <i>Jakub Kolář</i>	Reálné G a ZŠ, Prostějov	24
24.–26. <i>Lukáš Supík</i>	G, Třinec	24
27.–28. <i>Daniel Hausner</i>	G, Plasy	21
27.–28. <i>Christian Mikláš</i>	G Jána Hollého, Trnava	21
29. <i>Milan Suk</i>	G, Boskovice	20
30. <i>Karel Chládek</i>	G, Lanškroun	19
31.–32. <i>Pavel Bláha</i>	Jiráskovo G, Náchod	17
31.–32. <i>Tomáš Novotný</i>	G, Pelhřimov	17
33.–34. <i>Tomáš Fárník</i>	G P. de Coubertina, Tábor	16
33.–34. <i>Matúš Žilínek</i>	G Ružomberok	16
35. <i>Filip Šmejkal</i>	G Uherské Hradiště	15
36. <i>Daniel Backov</i>	G Ružomberok	14
37.–38. <i>Jaroslav Cerman</i>	G a SOŠ, Jilemnice	13
37.–38. <i>Huy Do Duc</i>	Masarykovo G, Plzeň	13
39.–41. <i>Jiří Chmel</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	12
39.–41. <i>Peter P. A. Petráš</i>	ŠpMNDaG, SR	12
39.–41. <i>David Pokorný</i>	G, Bučovice	12
42.–43. <i>Jakub Liška</i>	SG Dr. Randy, Jablonec n. N.	11
42.–43. <i>Richard Stiskálek</i>	G J. Škody, Přerov	11
44.–46. <i>Markéta Doležalová</i>	G Brno-Řečkovice	10
44.–46. <i>Juraj Halabrin</i>	G Jura Hronca, Bratislava	10
44.–46. <i>Zsófia Kálosi</i>	G H. Selyeho Komárno	10
47. <i>Vojtěch Juríček</i>	G, Kralupy	9
48. <i>Alena Žižková</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	7
49.–50. <i>Šimon Jelínek</i>	G, Mostecká, Chomutov	6
49.–50. <i>Stanislav Šípka</i>	G, Kukučínova, Poprad	6
51. <i>Tomáš Šulák</i>	G Púchov	5
52.–53. <i>Denis Dimítrov</i>	Gymnázium Vítkov	4
52.–53. <i>Kloda Korpelová</i>	G Školská, Spišská Nová Ves	4
54.–55. <i>Alena Košáková</i>	G, Strakonice	3
54.–55. <i>Jakub Stanovský</i>	G, Krnov	3
56.–57. <i>Barbora Bujalková</i>	G L. Štúra, Zvolen	2
56.–57. <i>Adam Černý</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	2

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 212
1. <i>Filip Ayazi</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	213
2. <i>Luboš Vozdecký</i>	G a SOŠZZE Vyškov	179
3. <i>Pavel Peterka</i>	G P. de Coubertina, Tábor	168
4. <i>Mojmír Poprocký</i>	G Matyáše Lercha, Brno	144
5. <i>Jakub Dolejší</i>	G B. Němcové, HK	138
6. <i>Jakub Sláma</i>	G Opatov, Praha	133
7. <i>Tomáš Kremel</i>	G J. Škody, Přerov	102
8. <i>Jakub Maruška</i>	G Andreja Vrábľa, Levice	99
9. <i>Pavel Blažek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	97
10. <i>Tomáš Fiala</i>	G, SOŠ a VOŠ, Ledec n. Sáz.	96
11. <i>Jozef Bucko</i>	G PdC, Piešťany	80
12.–13. <i>Samuel Kočíščík</i>	G Poštová, Košice	74
12.–13. <i>Miloslav Staněk</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	74
14. <i>Martin Vančura</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	68
15. <i>Lucie Brichová</i>	PSG jazykové, HK	66
16. <i>Kateřina Smítalová</i>	G, Dašická, Pardubice	63
17. <i>Kryštof Šulc</i>	VOŠ, SOŠ a G, Evropská, Praha	61
18. <i>Petr Doležal</i>	G Z. Wintra, Rakovník	60
19. <i>Luboš Krnáč</i>	G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	46
20.–21. <i>Matyáš Grof</i>	G Christiana Dopplera, Praha	44
20.–21. <i>Václav Skála</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	44
22. <i>Zdeněk Turek</i>	G a SOŠ, Rokycany	42
23. <i>Václav Rozhoň</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	41
24. <i>Petr Smíšitel</i>	G, Bučovice	35
25. <i>Marie Smetanová</i>	Wichterlovo G, Ostrava	33
26. <i>Brigita Holendová</i>	G A. Kmeťa	32
27. <i>Miroslav Gašpárek</i>		28
28. <i>Jiří Kučera</i>	G Jana Keplera, Praha	25
29. <i>Jakub Löwit</i>	G, Českolipská, Praha	24
30. <i>Martin Kihoulou</i>	G, Plzeň, Mikulášské n. 23	23
31. <i>Juraj Jonák</i>	G Dolný Kubín	22
32.–33. <i>Zuzana Mičková</i>	G Dolný Kubín	18
32.–33. <i>Štěpán Štěpán</i>	Jiráskovo G, Náchod	18
34. <i>Michaela Hornáková</i>	CSS Snina	17
35.–36. <i>Gianamar Giovannetti-Singh</i>		16
35.–36. <i>Michal Prokop</i>	Jiráskovo G, Náchod	16
37.–39. <i>Peter Čambal</i>	G, Skalica	15
37.–39. <i>Jakub Dvořák</i>	G, Botičská, Praha	15
37.–39. <i>Jan Škvára</i>	G J. Škody, Přerov	15
40. <i>Václav Šimon</i>	Jiráskovo G, Náchod	14
41.–42. <i>Ivana Mrázová</i>	G Dolný Kubín	12
41.–42. <i>Pepa Špaček</i>		12
43. <i>Barbora Balcarová</i>	Jiráskovo G, Náchod	9
44. <i>Dušan Stěhule</i>	G B. Němcové, HK	8
45. <i>Lenka Kolářová</i>	G, Hranice	3
46.–48. <i>Michal Matyska</i>	Jiráskovo G, Náchod	2
46.–48. <i>Michal Šafek</i>	G, Vysoké Mýto	2
46.–48. <i>Milena Vaňková</i>	Jiráskovo G, Náchod	2
49. <i>Pavel Pich</i>	Jiráskovo G, Náchod	1

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 212
1. <i>Jakub Kvorka</i>	G, Dubnica n. Váhom	195
2. <i>Ondřej Zelenka</i>	SPŠ a SOŠGS Most	162
3. <i>Lýdia Janitorová</i>	G, Šrobárova, Košice	49
4. <i>Zuzana Vlasáková</i>	G, Rumburk	47
5. <i>Markéta Vohníková</i>	PORG, Praha	45
6. <i>Michal Belina</i>	G Volgogradská, Ostrava	33
7. <i>Tomáš Tměj</i>	G, Arabská, Praha	30
8. <i>Denisa Lampášová</i>	G, Považská Bystrica	25
9. <i>Patrik Turzák</i>	G Poštová, Košice	24
10.–11. <i>Peter Hojnoš</i>	G Školská, Spišská Nová Ves	21
10.–11. <i>Ján Ondráš</i>	G Grösslingova, Bratislava	21
12. <i>Marek Martaus</i>	G Velká okružná, Žilina	20
13.–14. <i>Norbert Slivka</i>	G Tajovského, B. Bystrica	19
13.–14. <i>Karolína Šromeková</i>	ŠpMNDaG, SR	19
15. <i>Lukáš Knob</i>	G, Kojetín	18
16.–18. <i>Július Koval</i>	G Senica	15
16.–18. <i>Andrej Novák</i>	G M. Hattalu, Trstená	15
16.–18. <i>Radka Štefaníková</i>	G O. Havlové, Ostrava	15
19. <i>Daniel Slezák</i>	Svobodná chebská škola	13
20.–21. <i>Jiří Guth</i>	G, Jírovcova, České Budějovice	12
20.–21. <i>Viktor Skoupý</i>	G, Moravská Třebová	12
22. <i>Irena Bačinská</i>	ŠpMNDaG, SR	11
23.–24. <i>Josef Havlíček</i>	G, Neumannova, Ždár n. S.	9
23.–24. <i>Jan Stulhofer</i>	G, SpgŠ, OA a JŠ Znojmo	9
25.–27. <i>Ota Čapek</i>	G, Roudnice nad Labem	8
25.–27. <i>Petr Kepčija</i>	G, Jírovcova, České Budějovice	8
25.–27. <i>Petr Machač</i>	G J. Škody, Přerov	8
28. <i>Radek Kozárek</i>	Arcibisk. G, Kroměříž	7
29.–30. <i>Domínik Nedvídek</i>	G, Hodonín	6
29.–30. <i>Samo Tomašec</i>	G Varšavská, Žilina	6
31. <i>Martin Jurček</i>	G, Studentská, Havířov	4

ALEŠ FLANDERA A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXVII. ročník – 2013/14

Předmluva: Kristína Nešporová

Náměty úloh:

Radomír Gajdošoci (I.5, II.5), Miroslav Hanzelka (III.1, III.5, IV.1, IV.3, V.1, V.2, V.5, VI.2, VI.4), Dominika Kalasová (III.P, V.E), Jakub Kocák (IV.4), Karel Kolář (I.1, I.2, I.3, I.P, I.E, II.2, II.3, II.P, II.E, III.3, IV.P, V.4, V.P, VI.1, VI.3, VI.P, VI.E), Michal Koutný (III.P, IV.E), Lukáš Ledvina (I.4, II.1, III.2, III.4, IV.5, VI.5), Jiří Nárožný (V.3), Kristína Nešporová (III.E, IV.2), Jan Prachař (III.P), Ján Pulmann (II.4), Miroslav Rapčák (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S), Vojtěch Witzany (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S)

Autoři řešení úloh:

Tomáš Bárta (I.5, IV.P), Michal Červeňák (II.E), Veronika Dočkalová (V.1), Radomír Gajdošoci (I.4), Lubomír Grund (II.P), Miroslav Hanzelka (III.1, IV.1, V.5, VI.2), Zdeněk Jakub (II.2), Dominika Kalasová (II.1, V.E), Jakub Kocák (I.P, II.3, IV.4), Karel Kolář (VI.1), Michal Koutný (VI.P), Lukáš Ledvina (II.E, III.4, V.P), Jiří Nárožný (V.3), Kristína Nešporová (I.1, III.E, IV.2, V.2), Tomáš Pikálek (I.E, III.2, IV.E), Aleš Podolník (III.P, VI.3, VI.5), Ján Pulmann (IV.5), Miroslav Rapčák (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S), Jakub Šafin (III.5, V.4), Tereza Steinhartová (I.3, VI.4, VI.E), Lukáš Timko (II.4), Kuba Vošmera (I.2, II.5, III.3, IV.3), Vojtěch Witzany (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S)

Seriál o teorii strun: Miroslav Rapčák, Vojtěch Witzany

Legenda podzimního soustředění: Aleš Podolník

Legenda jarního soustředění: Karel Kolář

Sazba: Tomáš Pikálek

Obrázky a grafy: Lukáš Ledvina

Jazykové korektury: Dominika Kalasová, Kristína Nešporová, Jakub Kocák

Odborné korektury: Miroslav Hanzelka, Lukáš Ledvina, Jakub Vošmera

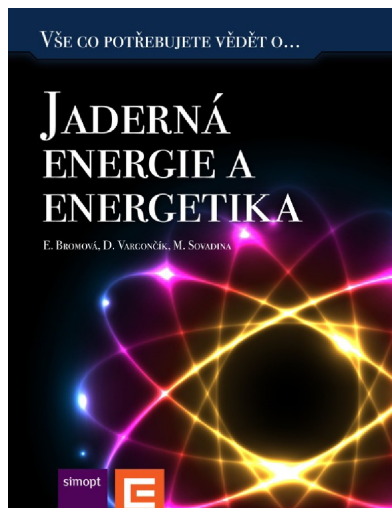
Aplikace pro vaše elektronické hračky

pro iPady na Appstore, pro Androidy na Google Play

Velká encyklopedie Jaderná energie a energetika

Text (224 stránek) je doplněn množstvím grafických materiálů – 336 fotografií v 60 tematických fotogaleriích, 45 ilustračních nákrešů a grafů, 31 interaktivních schémat a 31 videí a 3D modelů. Každá ze 7 kapitol končí blokem testů, ve kterých si můžete ověřit svoje vědomosti.

Vše ke stažení zdarma jako součást vzdělávacího programu ČEZ Svět energie na <http://www.cez.cz/vzdelavaciprogram>. Také ve verzi pro PC na <http://books.simopt.cz>.



Miniencyklopedie na různá témata

Jaderná energetika, Einstein, K vysokým energiím, Lasery, Elektrokutil, RTG záření, Solární energie, Elektřina

<http://www.cez.cz/minienykyklopedie>



Virtuální procházky elektrárnami ČEZ

Je libo cesta až do reaktorové šachty jaderné elektrárny Temelín? Víte, jak uvnitř vypadá tušimická elektrárna po komplexní obnově nebo jak je z výšky 300 m krásná vodní elektrárna? Nebo se chcete jen tak kochat pohledem z gondoly „větrníků“ u Litomyšle?

<http://www.cez.cz/cez-virtualni-prohlidky>



ALEŠ FLANDERA A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXVII. ročník – 2013/14

Vydal **MATFYZPRESS**
vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 465. publikaci

Vytiskl TISK SPRINT

Vydáno pro vnitřní potřebu MFF UK
Publikace není určena k prodeji

196 stran, 47 obrázků
Sazba písmem Latin Modern v programu $\text{X}_{\text{L}}^{\text{L}}\text{A}_{\text{T}}\text{E}_{\text{X}}$
Vydání první
Náklad 400 výtisků

Praha 2014

ISBN 978-80-7378-271-9

