

Úloha VI.E ... ztroskotání balónu

8 bodů; průměr 6,13; řešilo 15 studentů

Když pustíte nafukovací balónek z výšky, po chvíli bude padat s přibližně konstantní rychlostí. Změřte, jak závisí tato rychlost na velikosti balónku a na hmotnosti závaží, které pod něj zavěsíte.

Píkoš spadl z višně.

Teorie

V okamžiku, kdy balónek pustíme, je jeho rychlost nulová. Působí na něj vztlaková síla směrem svisle vzhůru a tíhová síla směrem svisle dolů. Pokud bychom chtěli určit velikost tíhové síly, museli bychom znát hmotnost balónku a vzduchu v něm (tedy např. tlak uvnitř). Proto zavedeme efektivní hmotnost balónku m , což bude taková hmotnost nafouknutého balónku, kterou zvážíme na váze. V této efektivní hmotnosti je již započítán vliv vztlakové síly. Pak velikost výslednice tíhové síly působící na balónek o efektivní hmotnosti m , tíhové síly působící na závaží o hmotnosti M a vztlakové síly působící na balónek je rovna $(m + M)g$, přičemž předpokládáme, že závaží je oproti balónku velmi malé, takže vztlakovou sílu na něj působící můžeme zanedbat. Výsledná síla na balónek působící bude v případě nafouknutí vzduchem směřovat svisle dolů, balónek tedy začne padat.

Jakmile bude rychlost balónku nenulová, začne na něj proti směru pohybu působit odporová síla. Dále budeme uvažovat, že tvar balónku je při všech velikostech stejný a jde o kouli o průměru d . Pak velikost odporové síly je dle Newtonova vztahu $\rho v^2 S/4$, kde ρ je hustota vzduchu, $S = \pi r^2/4$ je v našem případě obsah průmětu balónku do vodorovné roviny a v je jeho rychlost.

Balónek bude nejprve zrychlovat, při určité rychlosti bude výsledná síla působící na balónek nulová a ten se dále bude pohybovat rovnoměrně přímočaře ustálenou rychlostí

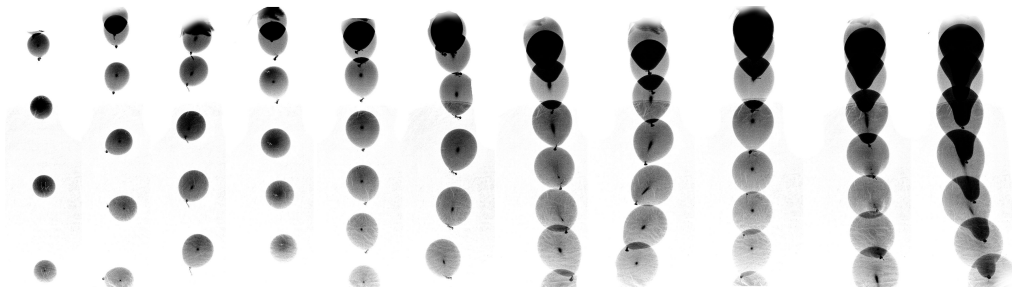
$$v_u \propto \frac{\sqrt{m + M}}{d}, \quad (1)$$

tedy velikost ustálené rychlosti je přímo úměrná odmocnině součtu jeho efektivní hmotnosti a hmotnosti závaží a nepřímo úměrná jeho průměru.

Metody měření rychlosti

Měření rychlosti je možné provést několika způsoby. Nejjednodušší se jeví použít stopky a změřit čas, za jaký balónek urazí danou dráhu. K tomu by však bylo třeba alespoň odhadnout, kdy již balónek nezrychluje. Navíc bychom do měření zanesli velkou nejistotu v podobě měření času stopkami, což by se ovšem dalo eliminovat použitím optické závory.

Přesnější metoda měření rychlosti je využitím stroboskopu (např. blesku s touto funkcí) a fotoaparátu. Na fotografii zachytíme balónek v několika okamžicích a při známé frekvenci záblesků po kalibraci délky (např. vyfotografováním pravítka) měříme vzdálenosti, které balónek urazil mezi záblesky. Výhodou je, že můžeme zaznamenávat pohyb balónku od okamžiku upuštění a rychlost určovat jen z vhodné části pohybu. Nevýhodou naopak to, že musíme pracovat ve tmě a před tmavým pozadím. Příklad snímků s použitím stroboskopu je pro použité balónky na obrázku 1. Všechny snímky byly pořízeny při frekvenci stroboskopu 5 Hz. Ačkoliv nebyly použity k měření, dobře dokumentují to, že se zvyšující se velikostí balónku jeho velikost rychlosti klesá a je (kromě prvních několika záblesků) přibližně konstantní. Také je zde vidět, že balónek se při pádu otáčí.



Obr. 1: Snímky (negativy) vytvořené pomocí stroboskopu pro různé velikosti balónek.

Další možnost je záznam videa, které poté analyzujeme např. v programu Tracker¹, viz obrázek 2. Nejprve je třeba, stejně jako v případě použití stroboskopu, udělat kalibrační snímek, na kterém vyfotografujeme měřítko známé délky a pomocí něj v programu nastavíme správné měřítko a orientaci souřadných os. Na nafouklém balóнку uděláme fixem značku (pro dostatečný kontrast je vhodné použít světlé balóнку a tmavý fix). Pomocí funkce Autotracker poté tuto značku v prvním snímku označíme a spustíme trasování. Program v každém ze snímků tuto značku najde, určí její polohu a numerickým derivováním pak i rychlost a zrychlení v jednotlivých časových okamžicích.

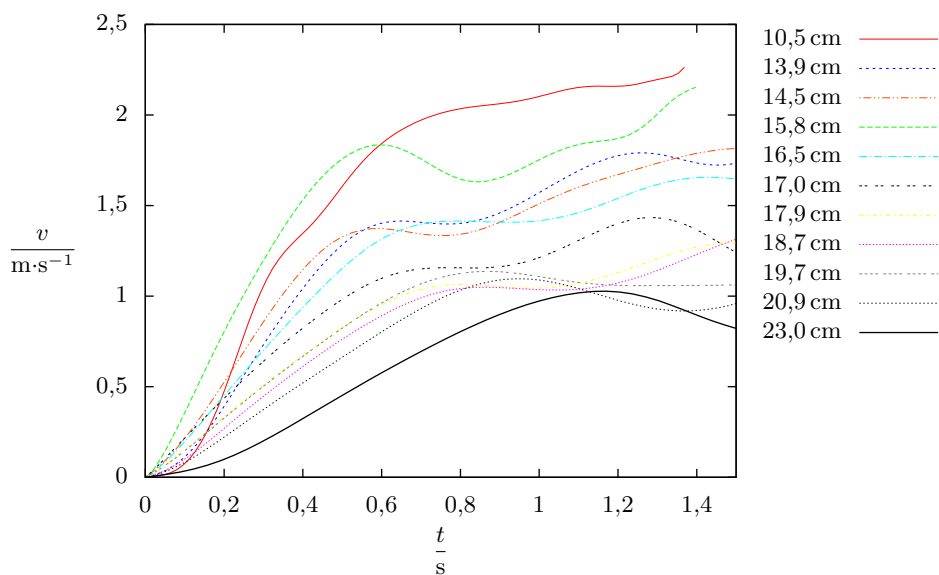


Obr. 2: Práce v programu Tracker. Po označení dostatečně kontrastního bodu (v našem případě černá značka na bílém balóнку) program pohyb tohoto bodu během záznamu vyhledá.

¹<http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>

Měření

Rychlosti balóneků byly měřeny pomocí programu Tracker. Při určování závislosti ustálené rychlosti na velikosti balóneků bylo použito 11 balóneků nafouknutých na různý průměr. S každým balónekem byla provedena tři měření. Závislost rychlosti na čase pro jedno měření s každým z balóneků jsou v grafu na obrázku 3. Při pohledu na něj je zřejmé, že předpoklad, že balónek bude zrychlovat a od určitého okamžiku bude jeho rychlost konstantní, nebyl zcela správný, jelikož situace byla příliš zjednodušená a nebyly uvažovány některé další vlivy. I při pozorování okem bylo zřejmé, že balónek nemá dokonalý tvar rotačního tělesa. Z toho důvodu odpor prostředí způsobí, že se balónek začne otáčet a obsah jeho průmětu do vodorovné roviny se změní, což zapříčiní změnu rychlosti, případně další rotaci. I pokud by byl balónek dokonale symetrický kolem nějaké osy, bylo by třeba jej pouštět tak, aby tato osa byla dokonale svisle. V opačném případě by též mohl začít vykonávat nechtěné pohyby.

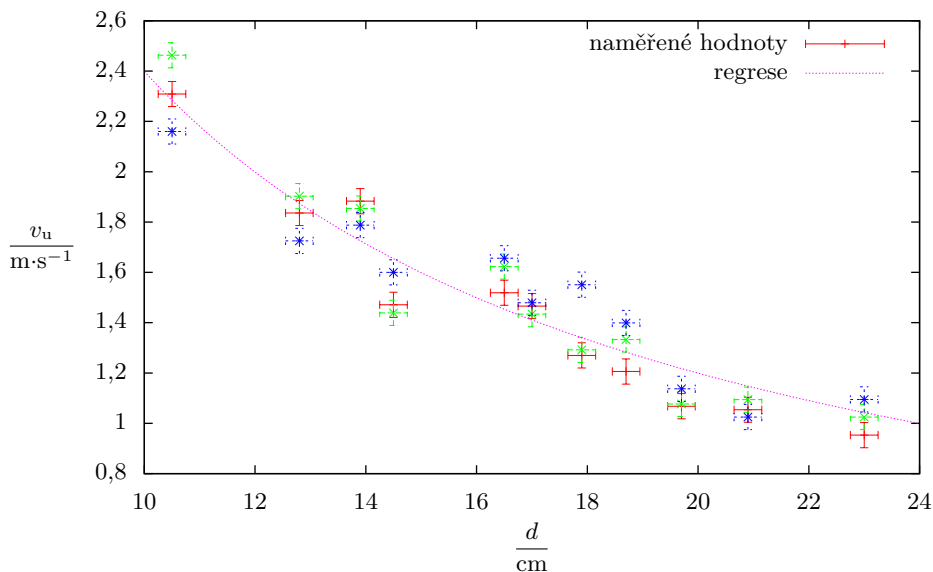


Obr. 3: Závislost velikosti vertikální rychlosti na čase pro různé velikosti balóneků. Každý balónek byl měřen třikrát, pro ilustraci uvádíme jedno měření.

Protože rychlost balóneků není při pohybu konstantní, je třeba dále zvolit rychlost, pro kterou budeme zkoumat závislost na průměru a hmotnosti. Rychlost vyjádřená vztahem (1) je taková rychlost, při které jsou síly na balónek působící v rovnováze, jeho zrychlení je tedy nulové. Je-li nulové zrychlení, musí být rychlost v tomto okamžiku maximální či minimální, popř. musí jít o inflexní bod. Ustálenou rychlostí tedy v dalším textu budeme rozumět velikost rychlosti v prvním maximu, tedy velikost rychlosti v prvním okamžiku od upuštění, kdy je zrychlení balóneků nulové.

Závislost velikosti ustálené rychlosti na velikosti balóneků je v grafu na obrázku 4. Naměřené hodnoty jsou v programu gnuplot proloženy teoreticky odvozenou závislostí na rychlosti (1),

přičemž se předpokládalo, že hmotnost všech balónek byla stejná. Toto předpoklad byl vyvozen z měření hmotností nafouknutých a následně i nenafouknutých balónek. Hmotnosti nenafouknutých balónek ze stejného balení (kde by všechny balónky měly být stejné) se pohybují od 1,27 g do 1,56 g. Efektivní hmotnosti nafouknutých balónek včetně kousku špagátu, kterým byly zavázány (všechny kousky byly přibližně stejně dlouhé) se pohybovaly od 1,60 g do 2,05 g, přičemž ale hmotnost nerostla s průměrem monotónně, zřejmě v důsledku různých hmotností balónek před nafouknutím. Navíc vzhledem k velkému rozptylu naměřených hodnot nemůžeme říci, zda naměřené hodnoty odpovídají teoretické závislosti, takže nejistota skrytá v předpokladu stejných hmotností nevádí.

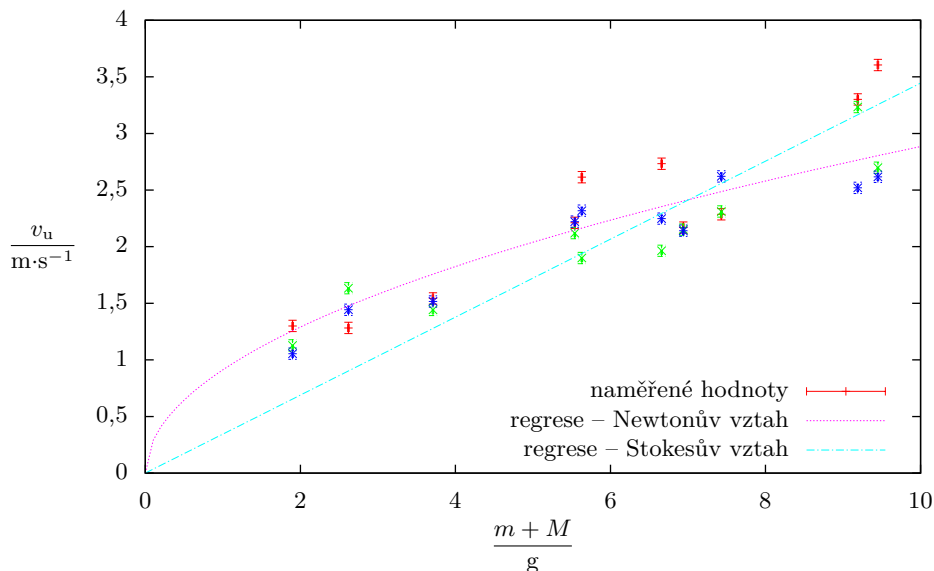


Obr. 4: Závislost velikosti ustálené rychlosti na velikosti balónku. Barevně jsou pouze pro přehlednost odlišena jednotlivá měření.

Dalším úkolem bylo měření závislosti ustálené rychlosti na hmotnosti závaží, které pod balónek zavěsíme. Jako závaží byly použity mince a knoflíkové baterie, které byly pod balónek připevněny lepicí páskou, kterou též považujeme za závaží. Měření bylo provedeno s jedním balónekem pro deset různých hmotností závaží vždy třikrát. V grafu na obrázku 5 je uvedena hmotnost součtem efektivní hmotnosti balónku $m = (1,90 \pm 0,01)$ g a hmotnosti závaží M . Pokud bychom požadovali graf závislosti ustálené rychlosti na hmotnosti závaží, stačilo by pouze vodorovnou osu posunout. Naměřené hodnoty jsou v programu gnuplot proloženy teoreticky odvozenou závislostí (1).

Diskuse a nejistoty měření

Nejistoty tohoto měření je možné rozdělit na nejistoty měření polohy, velikosti balónku a jeho hmotnosti. Polohy balónku (a z nich numericky vypočítané rychlosti) byly měřeny v programu



Obr. 5: Závislost velikosti ustálené rychlosti na hmotnosti balónku se závažím. Barevně jsou pouze pro přehlednost odlišena jednotlivá měření.

Tracker, který určoval polohu označeného bodu balónku. Jelikož ten se ale mohl v průběhu měření pohybovat i jinak než svisle dolů (např. se naklánět), nedá se říci, že naměřené polohy jsou polohy těžiště. V případě měření polohy z videa hraje také roli zkreslení obrazu, které bylo minimalizováno měřením z větší vzdálenosti a použitím objektivu s dlouhým ohniskem. Nejistota určení velikosti rychlosti byla odhadnuta na $0,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Jelikož balónek nebyly kulaté (menší balónek se kouli blížíly více, viz obrázek 1) a v modelu jsme balónek modelovali koulí, nedá se též jednoznačně určit jeho rozměr. Proto byl brán průměr průmětu do vodorovné roviny (s tím, že balónek se pouštěly otvorem dolů), přičemž byl měřen s nejistotou asi $0,5 \text{ cm}$.

Nejistota měření hmotnosti byla malá, použité váhy rozlišují $0,01 \text{ g}$.

Při pohledu na grafy na obrázcích 4 a 5 je zřejmé, že naměřené hodnoty mají rozptyl větší než odhadnuté nejistoty. Jak již bylo zmíněno výše, pohyb balónku, který nemá tvar koule s těžištěm ve svém středu, z velké části ovlivňuje i to, jak natočený jej pustíme.

Při takto velkém rozptylu se nedá jednoznačně říci, zda naměřené hodnoty korespondují s teoreticky odvozenou závislostí. V obou případech je trend správný (tj. velikost ustálené rychlosti klesá se zvyšující se velikostí balónku a klesá se zvyšující se hmotností závaží), nicméně více se toho říci nedá.

Pokud bychom pro výpočet velikosti odporové síly použili Stokesův vztah, tedy předpokládali bychom, že velikost odporové síly je přímo úměrná průměru koule a velikosti její rychlosti, dostali bychom též, že ustálená rychlost je nepřímo úměrná průměru koule. Závislost na hmotnosti by však byla jiná – velikost ustálené rychlosti by byla přímo úměrná $m + M$. Naměřená data na obrázku 5 bychom tedy prokládali přímkou procházející počátkem (pokud by efektivní

hmotnost balónku byla nulová a náklad by byl též nulový, výslednice tíhové a vztlakové síly by byla nulová, tudíž po upuštění by se balónek nezačal pohybovat), což na naměřené hodnoty zjevně nesedí.

Závěr

Analýzou videí padajících balónků v programu Tracker byla zjištěna závislost rychlosti balónku na jeho velikosti (obrázek 4) a dále závislost této rychlosti na hmotnosti balónku (obrázek 5). Použité balónky nebyly po nafouknutí symetrické, proto se při pádu různě otáčely (viz obrázek 1), kvůli čemuž rychlost nebyla během žádné fáze pohybu konstantní.

Tomáš Pikálek
pikos@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.